Appendice C

Osservabilità

Richiamiamo in questo paragrafo il concetto di osservabilità per i sistemi non lineari. Ci limitiamo allo studio di sistemi non lineari in forma di controllo, poichè in tale forma sono espressi i sistemi di nostro interesse. Consideriamo allora un sistema multivariabile con m ingressi $u = [u_1 \ldots u_m]^T$ e p uscite $y = [y_1 \ldots y_p]$ nella forma:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \tag{C.1}$$

$$y_i = h_i(x) \quad 1 \leq i \leq p \tag{C.2}$$

dove $h = [h_1 \ldots h_p]^T$ è la mappa regolare dell'uscita del sistema e $x \in M$. Diamo inizialmente alcune definizioni.

Def. C.1 *Due stati $x1, x2 \in M$ si dicono* indistinguibili *(usiamo la notazione compatta $x_1 I x_2$) se, per ogni controllo $u \in U$ (con U insieme dei controlli ammissibili), l'evoluzione y_1 per $t > 0$ a partire dallo stato iniziale $x(0) = x_1$ e l'evoluzione y_2 per $t > 0$ a partire dallo stato iniziale $x(0) = x_2$ sono identiche nel loro dominio di definizione.*

Per verificare l'indistinguibilità di due stati è dunque necessario verificare l'uguaglianza delle due uscite $y(x_1, u)$ e $y(x_2, u)$. Per fare ciò bisogna fare ricorso agli strumenti dell'algebra di Lie.

Def. C.2 *Due funzioni $f_1(x), f_2(x)$ si dicono* indipendenti *se i covettori $df_1(x) = \frac{\partial f_1}{\partial x}$ e $df_2(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ sono indipendenti (in un punto o in un insieme).*

In particolare, per verificare l'uguaglianza di due funzioni in ogni istante t, è sufficiente confrontare i valori di tutte le loro derivate in $t = 0$ (se le due funzioni sono funzioni analitiche). Dove sarà

$y_i(0) = h_i(x_0)$
$\dot{y}_i(0) = \frac{\partial h_i}{\partial x}\dot{x} \mid_0 = \frac{\partial h_i}{\partial x} f(x) + \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial x} g_j(x) u_j \mid_0 = L_f h_i(x_0) + \sum_j L_{g_j} h_i u_j(0)$
$\ddot{y}_i(0) = . =$
$L_f L_f h_i + \sum_j L_f L_{g_j} h_i u_j(0) + \sum_j L_{g_j} L_f h_i u_j(0) + \sum_j L_{g_j} L_{g_j} h_i u_j(0) + \ldots$

Si può fin da ora enunciare una prima definizione di osservabilità:

Def. C.3 *il sistema è osservabile se* $x_1 I x_2$ *implica che* $x_1 = x_2$.

In realtà siamo interessati a dare una definizione di osservabilità trovando delle condizioni di rango su matrici. Per fare ciò dobbiamo però accontentarci di condizioni valide localmente, trattandosi di sistemi non lineari. Allora anche la definizione di indistinguibilità è da intendersi in senso locale, considerando cioè solo controlli tali che, per piccoli intervalli temporali, non facciano allontanare lo stato $x(t)$ da un intorno di x_1. Diamo dunque la seguente definizione di indistinguibilità.

Def. C.4 *Due stati* $x_1, x_2 \in V \subset M$ *si dicono* indistinguibili *(*$x_1 I x_2$*) se, per ogni controllo costante* $u \in U$ *(con* U *insieme dei controlli ammissibili) che mantenga le soluzioni* $x(t, x_1, u)$*,*$x(t, x_2, u)$ *contenute in* V*, l'evoluzione* y_1 *per* $t > 0$ *a partire dallo stato iniziale* $x(0) = x_1$ *e l'evoluzione* y_2 *per* $t > 0$ *a partire dallo stato iniziale* $x(0) = x_2$ *sono identiche nel loro dominio di definizione.*

Allora siamo pronti a dare una definizione di osservabilità non lineare valida localmente.

Def. C.5 *Il sistema è detto* localmente osservabile in x_0 *se esiste un intorno* W *di* x_0 *in cui, per ogni intorno* $V \subset M$ *di* x_0*, la relazione* $x_1 I x_2$ *implica che* $x_1 = x_2$.
Se il sistema è localmente osservabile per ogni x_0*, allora è detto* localmente osservabile.

Def. C.6 *Definiamo* Spazio di osservazione *lo spazio lineare di funzioni che contiene* $h_1, \ldots, h_p$ *e tutte le loro derivate direzionali di Lie*[1] *lungo le traiettorie del sistema, cioè* $L_{x_1} L_{x_2} \ldots L_{x_k} h_j$*, con* $x_i = f, g_1, g_2, \ldots, g_m,\ k = 1, 2, \ldots$
.
In pratica

[1] Ricordiamo che: data una funzione $\lambda(x) : \Re^n \to \Re^1$ e dato un campo vettoriale $f(x)$,

$O = [h_1, \dots, h_p,$
$L_f h_1, \dots, L_f h_p,$
$\dots$
$L_f^{n-1} h_1, \dots, L_f^{n-1} h_p,$
$L_{g_1} h_1, \dots\ L_{g_1} h_p, \dots, L_{g_m} L_{g_{m-1}} h_p, \dots]$

Nella definizione sono cioè comprese tutte le funzioni dello stato che appaiono nelle uscite, moltiplicate per le funzioni degli ingressi. In pratica lo spazio di osservazione coincide con lo spazio delle variazioni delle uscite corrispondenti ad ingressi costanti a tratti di piccola durata. Lo *spazio di osservabilità* O contiene tutte le funzioni $h(x)$ e le loro derivate di ogni ordine, calcolate lungo le traiettorie del sistema.

Def. C.7 *Definiamo la* codistribuzione di osservabilità dO *come:*

$dO = span\left[\frac{\partial h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial h_p}{\partial x}, \frac{\partial L_f h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial L_f h_p}{\partial x}, \frac{\partial L_{g_1} h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial L_{g_1} h_p}{\partial x}, \dots, \frac{\partial L_{g_m} h_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial L_{g_m} h_p}{\partial x}, \dots\right] = span[d\lambda(x), \lambda \in O]$

In maniera più compatta,

$dO(q) = span[dH(q) | H \in O], q \in M$

Enunciamo ora un teorema che ci dà una condizione sull'osservabilità (locale) sfruttando la definizione di codistribuzione di osservabilità appena fornita. Come è lecito attendersi, trattando sistemi non lineari, l'osservabilità locale non implica l'osservabilità globale.

Teorema 1 (osservabilità locale) *Sia un sistema multivariabile con* m *ingressi* $u = [u_1 \dots u_m]^T$ *e* p *uscite* $y = [y_1 \dots y_p]$ *nella forma:*

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i$$

si definisce *Derivata direzionale di* $\lambda(x)$ *lungo* $f(x)$ l'operazione

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} f_i(x) \tag{C.3}$$

Tale operazione associa dunque ad una funzione scalare e ad un campo vettoriale una nuova funzione scalare. La derivata direzionale è ripetibile, dunque per esempio, prendendo la derivata di $\lambda(x)$ lungo $f(x)$ e successivamente lungo $g(x)$ si ottiene la nuova funzione:

$$L_g L_f \lambda(x) = \frac{\partial (L_f \lambda(x))}{\partial x} g(x) \tag{C.4}$$

$$y_i = h_i(x) \quad 1 \leq i \leq p$$

dove $h = [h_1 \ldots h_p]^T$ *è la mappa regolare dell'uscita del sistema e* $x \in M$*. Se*

$$\text{dim}dO = n \tag{C.5}$$

allora il sistema è localmente osservabile *(in un punto o in un insieme), cioè tra i punti vicini a* x_0 *l'unico indistinguibile è* x_0 *stesso.*

Nel caso in cui in un punto isolato valga $dimdO = k < n$ (punto di singolarità), non possiamo escludere la locale osservabilità.