Appendice B

Filtraggio alla Kalman

B.1 Filtro di Kalman lineare

Il Filtro di Kalman[11] è un algoritmo utilizzato per il filtraggio dei dati costruito sulla base di una media ragionata tra il prossimo valore predetto e il prossimo valore stimato. Questo filtro è spesso utilizzato per ottenere una migliore valutazione di un dato ottenuto dalla lettura di più sensori, ognuno caratterizzato da un rumore di misura avente caratteristiche differenti nel tempo (e quindi nella frequenza).

Per costruire un filtro di Kalman sono necessari i seguenti ingredienti:

- Una serie di misure sul sistema da stimare;
- La conoscenza di un modello matematico lineare descrittivo del sistema;
- Il modello statistico dei rumori sulle misure;

Per la descrizione del sistema dinamico lineare, non stazionario e tempo discreto, si usino i seguenti simboli, tenendo conto che i pedici k sono utilizzati per tenere conto dell'istante in cui si effettua l'operazione di aggiornamento della stima:

- S_k: vettore di stato;
- u_k: vettore degli ingressi;
- y_k: vettore delle misure: lo stato di un sistema è a volte direttamente misurabile, a volte deve essere misurato attraverso grandezze loro equivãlenti o il cui valore rappresenta la combinazione di una o più variabili di stato, possibilmente sporcato da errori di misura o da imprecisione nella modellizzazione matematica del sistema lineare;

- ω_k: disturbo sullo stato: rappresenta gli ingressi che agiscono in maniera incontrollabile sullo stato del sistema;
- υ_k: rumore sulle misure: rumore di lettura presente nel vettore delle misure rispetto al valore che avrebbero in conseguenza al valore attuale dello stato e delle variabili di ingresso.
- Q_k: matrice di covarianza del disturbo sullo stato: rappresenta la variabilità statistica del vettore dei disturbi sullo stato (il vettore ha media nulla) ovvero la potenza del disturbo introdotto nel sistema che devia l'andamento delle variabili di stato rispetto a quello prevedibile dalla conoscenza del vettore degli ingressi e dalla legge lineare che ne governa l'evoluzione;
- R_k: matrice di covarianza del rumore sulle misure: rappresenta la variabilità statistica del vettore dei disturbi di misura (vettore a media nulla) e rappresenta la potenza del disturbo sulla misura introdotta su ciascuna delle misure accessibili;
- P_k: matrice di varianza dell'errore sullo stato: rappresenta la variabilità dell'errore sulla stima dello stato conseguente ai due fattori di disturbo (errore di misura e disturbo dello stato);
- K_k: matrice di correzione della stima: indica il livello di fiducia assegnata alla misura rispetto alla fiducia assegnata alla stima dello stato in base al valore precedente e al modello matematico che ne rappresenta l'evoluzione; Tanto maggiore è il valore di K_k, tanto minore fiducia merita la stima basata sul modello rispetto alla misura riportata;
- A_k: matrice di stato: matrice descrittiva dell'evoluzione libera della variabile di stato rispetto al suo valore attuale;
- B_k: matrice degli ingressi: matrice descrittiva dell'evoluzione forzata della variabile di stato rispetto al valore attuale dell'ingresso;
- H_k: matrice delle uscite: matrice descrittiva del valore assunto dalle variabili misurate in funzione del valore attuale della variabile di stato;

Le grandezze elencate hanno le seguenti proprietà (descrizione del modello statistico degli errori: $E[.]$ rappresenta l'operatore di calcolo della varianza) e definizioni:

- $Q_k = E[\omega_k \omega_k^T]$; essendo $E[\omega_j \omega_k^T] = 0$ per $j \neq k$;
- $R_k = E[\upsilon_k \upsilon_k^T]$; essendo $E[\upsilon_j \upsilon_k^T] = 0$ per $j \neq k$;

- $E[\omega_j \upsilon_k^T] = 0 \forall j, k;$
- $P_0 = E[(S_0 - S)(S_0 - S)]$ avendo definito $S = E[S_0]$;

Il modello matematico del sistema è definito dalle equazioni seguenti:

$$\begin{array}{ll} \textit{Evoluzione dello stato} & S_k = A_{k-1}S_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} \\ \textit{Evoluzione della misura} & y_k = H_k S_k \end{array} \tag{B.1}$$

B.1.1 Descrizione dell'algoritmo

Nelle formule, i simboli (-) e (+) individuano lo stato attuale della stima. Quando una variabile è seguita dal simbolo (-) si intende il valore stimato per predizione, quando è seguita dal simbolo (+) si intende che è stata applicata la correzione dovuta al valore attuale della misura. L'uso del simbolo ˆ sulla variabile S che rappresenta lo stato del sistema, è necessario per ricordare che comunque, il valore di S calcolato è solo un'approssimazione di quello reale.

B.1.2 Step 1: inizializzazione dell'algoritmo

- È necessario possedere le matrici che rappresentano l'evoluzione dello stato (A_k, B_k e H_k);
- È necessario aggiornare le matrici che rappresentano la varianza dei disturbi sullo stato (Q_k) e del rumore sulla misura (R_k);
- Si usa un valor medio dello stato iniziale S_0 per inizializzare nell'algoritmo il valore dello stato stimato all'istante $k-1$, S_{k-1}^+.

La cosa più complessa da valutare nella fase di inizializzazione dell'algoritmo è una stima iniziale del valore della matrice P_k. Un valore indicativo di questa matrice può però essere ottenuto a partire dal valore iniziale di Q_k. Prima di attivare l'algoritmo, è infatti possibile iterare più volte l'espressione che compare nel loop del filtro ($P_k^- = A_{k-1}P_{k-1}^+A_{k-1}^T + Q_k$) fino a che P_k raggiunge un valore di convergenza. Tale valore può essere utilizzato come un punto di partenza più verosimile per l'algoritmo.

La convergenza del calcolo di un valore iniziale per P_k avviene a condizione che, come da premessa, la matrice di stato A_k dia luogo ad un sistema stabile. Come primo valore per P_k può essere utilizzato un valore qualsiasi, ad esempio una matrice unitaria.

Le matrici Q_k e R_k sono solitamente utilizzate e definite come matrici costanti. Spesso, infatti, non ha senso modificarne il valore durante le stime successive dello stato. Talvolta, può essere consigliabile modificare Q_k e R_k per tener conto di particolari fattori, come ad esempio, una condizione di maggiore disturbo sullo stato del sistema, ovvero di presenza di maggiori errori sulla misura, motivati ad esempio dal malfunzionamento di un sensore.

B.1.3 Step 2: previsione dello stato

Predizione della variabile di stato Si esegue la predizione della variabile di stato in base alle informazioni certe che si hanno del modello:

$$\hat{S_k^-} = A_{k-1}\hat{S_{k-1}^+} \tag{B.2}$$

Aggiornamento della varianza dell'errore sullo stato Si aggiorna il valore della varianza dell'errore in base all'ultima stima del disturbo sullo stato:

$$P_k^- = A_{k-1}P_{k-1}^+A_{k-1}^T + Q_{k-1} \tag{B.3}$$

E' da notare come, nella prima formula sia applicata la legge di evoluzione dello stato, senza il contributo dovuto agli ingressi. Se questi sono noti, la legge di evoluzione dello stato deve essere applicata nella sua versione integrale ($S_k = A_{k-1}S_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1}$). Al contrario, se gli ingressi non sono noti è necessario considerare il contributo degli ingressi come un disturbo non misurabile e quindi da inserire nella matrice Q_k.

La legge di aggiornamento della matrice di varianza dell'errore sullo stato è di semplice interpretazione:

- se Q_k è nullo, la varianza dell'errore sullo stato andrà a diminuire quanto più stabilizzante è la matrice di stato A_k;
- quanto maggiore è Q_k, tanto maggiore inciderà il disturbo sullo stato nell'errore complessivo di stima.

B.1.4 Step 3: calcolo del guadagno di Kalman

Il guadagno K_k risulterà maggiore o minore a seconda se prevale l'incertezza dello stato P_k^- o l'incertezza sulla misura R_k:

$$K_k = P_k^- H_k' [H_k P_k^- H_k' + R_k]^{-1} \tag{B.4}$$

Con $K_k = I$, posto che $C_k = I$, l'algoritmo dà piena fiducia alla misura effettuata. Per K_k tendente a zero, l'algoritmo tenderà a confermare il valore predetto dalla stima, come illustrato nel passo successivo.

B.1.5 Step 4: aggiornamento della stima dello stato

Si pesa con la matrice K_k il valore della variabile predetta per propagazione dello stato S_k^- con l'errore attuale sulla misura:

$$\hat{S_k^+} = \hat{S_k^-} + K_k \left[y_k - H_k \hat{S_k^-} \right] \tag{B.5}$$

Come si diceva nello step precedente, la matrice K_k indica la fiducia posta dall'algoritmo nella misura. K_k tendente a zero indica una scarsa affidabilità della misura rispetto alla fiducia posta nella propagazione del modello.

B.1.6 Step 5: aggiornamento della varianza dei disturbi sullo stato e aggiornamento del ciclo

Al contrario dello step 2, l'aggiornamento della matrice di varianza dei disturbi sullo stato viene fatta a posteriori, utilizzando le informazioni contenute nella matrice K_k sulla affidabilità della misura rispetto alla qualità della previsione dello stato.

$$P_k^+ = \left[I - K_k H_k \right] P_k^- \tag{B.6}$$

$$k = k + 1$$

Come si ricorda dal passo precedente, la matrice K_k indica la fiducia posta dall'algoritmo nella misura. Con K_k tendente a zero, la matrice P_k rimane sostanzialmente invariata nell'aggiornamento dell'algoritmo da un passo al successivo.

A questo punto si torna alla previsione dello stato (par.B.1.3).

B.2 Filtro di Kalman esteso

Il filtro di Kalman risolve il problema generale della stima dello stato $S \in \Re^n$ di un sistema governato da equazioni differenziali lineari stocastiche. Che succede se il processo da stimare e/o le misure relative al processo sono non lineari? In maniera simile a quanto si fa per le serie di Taylor, possiamo linearizzare il sistema attorno alla stima corrente usando le derivate parziali delle funzioni di stato e di misura.

Un filtro di Kalman che linearizza intorno alla stima ed alla covarianza correnti è detto filtro di Kalman esteso (Extended Kalman Filter).

Limitiamo l'analisi al tempo discreto. Assumiamo, quindi, che il processo abbia un vettore di stato $S \in \Re^n$ e sia governato da una equazione differenziale stocastica non lineare:

$$S_k = f(S_{k-1}, u_{k-1}, \omega_{k-1}) \tag{B.7}$$

con misure $z \in \Re^m$ date da:

$$z_k = h(S_k, \upsilon_k) \tag{B.8}$$

dove ω_k e υ_k rappresentano rispettivamente i rumori di processo e di misura: ω_k e υ_k sono processi normali aleatori a media nulla. Poichè non conosciamo istante per istante il valore di ω_k e υ_k possiamo approssimare le eq.(B.7) e eq.(B.8) come:

$$\tilde{S_k} = f(\hat{S_{k-1}}, u_{k-1}, 0) \tag{B.9}$$

e

$$\tilde{z_k} = h(\tilde{S_k}, 0) \tag{B.10}$$

dove $\hat{S_{k-1}}$ è la stima a posteriori dello stato (relativo al precedente istante di campionamento $k-1$).

Un aspetto fondamentale dell'EKF è che le distribuzioni (o le densità nel caso continuo) delle variabili aleatorie non rimangono normali dopo le trasformazioni non lineari. L'EKF, quindi, è semplicemente uno stimatore dello stato ad hoc che approssima per linearizzazione l'ottimalità della regola di Bayes.

B.2.1 Descrizione del filtro

Linearizziamo intorno alla stima le eq.(B.7) e eq.(B.8):

$$S_k \approx \tilde{S_k} + A(S_{k-1} - \hat{S_{k-1}} + W\omega_{k-1} \tag{B.11}$$

$$z_k \approx \tilde{z_k} + H(S_k - \tilde{S_k}) + V\upsilon_k \tag{B.12}$$

dove:

- S_k e z_k sono i vettori di stato e di misura attuali;
- $\tilde{S_k}$ e $\tilde{z_k}$ sono i vettori di stato e di misura approssimati dati dalle eq.(B.9) e eq.(B.10);
- A_k è lo Jacobiano di f rispetto a S, calcolato in $(\hat{S}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$, cioè attorno alla stima corrente;
- W_k è lo Jacobiano di f rispetto a ω, calcolato in $(\hat{S}_{k-1}, u_{k-1}, 0)$;
- H_k è lo Jacobiano di h rispetto a S, calcolato in $(\tilde{S}_k, 0)$;
- V_k è lo Jacobiano di h rispetto a υ, calcolato in $(\tilde{S}_k, 0)$;

Per semplicità di notazione non utilizziamo il pedice k per gli jacobiani, sebbene essi siano, in generale differenti ad ogni step. Definiamo l'errore di predizione come:

$$\tilde{e}_{S_k} \equiv S_k - \tilde{S}_k \tag{B.13}$$

e l'errore di misura come:

$$\tilde{e}_{z_k} \equiv z_k - \tilde{z}_k \tag{B.14}$$

Ricordiamo che nella pratica non si ha accesso direttamente a S_k, ciò al vettore di stato attuale, che è la quantità da stimare. E' possibile invece usare le z_k per tentare di stimare S_k. Dalle eq.(B.11) e eq.(B.12) possiamo riscrivere le eq.(B.13) e eq.(B.14) come:

$$\tilde{e}_{S_k} \equiv A(S_{k-1} - \hat{S}_{k-1}) + \epsilon_k \tag{B.15}$$

$$\tilde{e}_{z_k} \equiv H\tilde{e}_{S_k} + \eta_k \tag{B.16}$$

dove ϵ_k e η_k rappresentano nuove variabili aleatorie indipendenti aventi media nulla e matrici di covarianza WQW^T e VRV^T rispettivamente, dove Q ed R sono le matrici di covarianza dei processi aleatori ω ev.

Notiamo che le eq.(B.15) e eq.(B.16) sono lineari e molto simili alle eq.(B.1) del filtro di Kalman lineare, per cui possiamo usare l'errore di misura $\tilde{e}_{z_k}$ dato dalla eq.(B.14) ed un secondo (ipotetico) filtro di Kalman per stimare l'errore di predizione $\tilde{e}_{S_k}$ dato dalla eq.(B.15). Questa stima, che indicheremo con $\hat{e}_k$, potrà essere utilizzata per ottenere una stima a posteriori per il processo non lineare di partenza come:

$$\hat{S}_k = \tilde{S}_k + \hat{e}_k \tag{B.17}$$

Le variabili aleatorie che appaiono nelle eq.(B.15) e eq.(B.16) hanno approssimativamente le seguenti distribuzioni di probabilità:

$$\begin{aligned} p(\tilde{e}_{z_k}) &\sim N(0, E\left[\tilde{e}_{S_k}\tilde{e}_{S_k}^T\right]) \\ p(\epsilon_k) &\sim N(0, WQ_kW^T) \\ p(\eta_k) &\sim N(0, VR_kV^T) \end{aligned}$$

Date queste approssimazioni ed assumendo che il valore predetto di $\hat{e}_k$ sia zero, l'equazione del filtro di Kalman usata per stimare $\hat{e}_k$ è:

$$\hat{e}_k = K_k\tilde{e}_{z_k} \tag{B.18}$$

Sostituendo la eq.(B.18) nella eq.(B.17) e usando la eq.(B.14) si ha:

$$\hat{S}_k = \tilde{S}_k + K_k(z_k - \tilde{z}_k) \tag{B.19}$$

La eq.(B.19) può essere ora utilizzata per la correzione nel filtro di Kalman esteso, con $\tilde{S}_k$ e $\tilde{z}_k$ date dalle eq.(B.9) e eq.(B.10) e il guadagno di Kalman K_k dato dalla eq.(B.4) con l'appropriata sostituzione della matrice di covarianza delle misure. Il set completo delle equazioni del filtro di Kalman esteso sono descritte nel par.B.2.2.

Un'importante caratteristica dell'EKF è che lo jacobiano H_k nell'equazione del guadagno di Kalman K_k (eq.(B.24)) serve a propagare correttamente o ad amplificare solo le componenti rilevanti dell'informazione di misura. Ad esempio se non c'è una corrispondenza uno a uno tra le misure z_k e lo stato attraverso h, lo jacobiano H_k influisce sul guadagno di Kalman in modo da amplificare solo la porzione del residuo $z_k - h(\hat{S}_k^-, 0)$ che influice sullo stato.

B.2.2 Implementazione del filtro di Kalman esteso

In questa sezione descriviamo l'algoritmo dell'EKF (Extended Kalman Filter). Sostanzialmente il processo di osservazione avviene in due fasi:

1. **Time update**
   - vengono generate le proiezioni dello stato del sistema, a partire dalla conoscenza del modello e della stima dello stato precedente;
   - vengono aggiornati i parametri probabilistici di errore sulla misura dello stato.
2. **Measurement update**
   - vengono corrette le stime prodotte al passo precedente, sulla base delle osservazioni delle uscite;
   - vengono aggiornati i parametri probabilistici di errore sulla misura delle uscite.

Quindi, dato un sistema non lineare nella forma:

$$s_{k+1} = f(s_k, u_k, \omega_k) \tag{B.20}$$

$$z_k = h(s_k, v_k) \tag{B.21}$$

l'algortimo per EKF è:

- time update

$$\hat{s}_{k+1}^- = f(\hat{s}_k, u_k, 0) \tag{B.22}$$

$$P_{k+1}^- = A_k P_k A_k^T + W_k Q_k W_k^T \tag{B.23}$$

- measurement update

$$K_{k+1} = P_{k+1}^{-} H_k^T (H_k P_{k+1}^{-} H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \tag{B.24}$$

$$\hat{s}_{k+1}^{+} = \hat{s}_{k+1}^{-} + K_{k+1}(z_k - h(\hat{s}_{k+1}^{-}, 0)) \tag{B.25}$$

$$P_{k+1} = (I - K_k H_k) P_{k+1}^{-} \tag{B.26}$$

dove:

$\hat{s}_k$: è lo stato stimato al passo precedente (stima corrente);

$\hat{s}_{k+1}^{-}$: è lo stato predetto, noto $\hat{s}_k$;

z_k : sono le misure;

$h(\hat{s}_{k+1}^{-}, 0)$: è l'uscita predetta, noto $\hat{s}_{k+1}^{-}$;

$\hat{s}_{k+1}^{+}$: è lo stato stimato dal filtro;

A_k : è lo Jacobiano di f rispetto a s, calcolato in $(\hat{s}_k, u_k, 0)$, cioè attorno alla stima corrente;

W_k : è lo Jacobiano di f rispetto a ω, calcolato in $(\hat{s}_k, u_k, 0)$;

H_k : è lo Jacobiano di h rispetto a s, calcolato in $(\hat{s}_{k+1}^{-}, 0)$, cioè attorno alla predizione;

V_k : è lo Jacobiano di h rispetto a υ, calcolato in $(\hat{s}_{k+1}^{-}, 0)$;

Oss. B.1 *La sequenza dei guadagni $\{K_k\}$ deve necessariamente essere calcolata in tempo reale, non può essere calcolata off-line prima della lettura delle misure e poi immagazzinata in memoria.*

Oss. B.2 *La sequenza delle matrici di covarianza stimate $\{P_k\}$ dipende dall'andamento di $\hat{S}_k$. Quindi l'accuratezza della stima risulta essere dipendente dalla traiettoria e, di conseguenza, dalla stima iniziale.*

B.2.3 Schema generale di filtraggio

Analizziamo le 2 parti di cui si compone l'EKF.

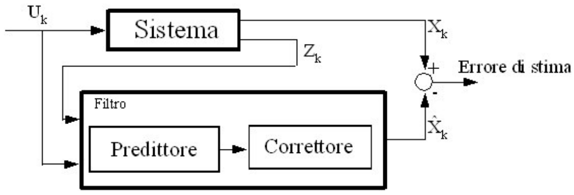

Figura B.1: *Schema generale di filtraggio per il filtro di Kalman esteso*

Predizione

Nel nostro caso, la predizione fa essenzialmente uso dell'odometria: si utilizzano i dati forniti dagli encoder per stimare lo spostamento effettuato dal robot. La covarianza P_{k+1}^- esprime l'incertezza della stima odometrica ed è composta da:

- propagazione dell'incertezza della stima precedente;
- incertezza introdotta dal rumore;

Notiamo che: $P_{k+1}^- > P_k$ sempre, cioè l'ellissoide si espande.

Correzione

Nel nostro caso, la correzione fa uso delle misure effettuate tramite la videocamera. Il termine in (B.25) $\left[z_k - h_k(\hat{s}_k^-)\right]$ viene detto *innovazione* e rappresenta l'informazione apportata dal processo di misura. La (B.24) è il *guadagno di Kalman*. Il termine $\left[H_k P_{k+1}^- H_k^T + V_k R_k V_k^T\right]$ è la covarianza dell'innovazione. Essa compone due tipi di incertezze:

- incertezza sulla stima odometrica;
- incertezza sulle misure;

Dalla (B.26) si vede che la covarianza dell'errore di stima diminuisce dopo la correzione.

B.3 Confronto tra KF e EKF

Richiamiamo brevemente le proprietà del filtro di Kalman lineare [12]:

- filtro lineare ottimo ricorsivo;

- minimizza la varianza dell'errore di stima. Le ipotesi che assicurano l'ottimalità sono la linearità del sistema e la presenza di rumore additivo gaussiano bianco;

- tutte le variabili aleatorie in gioco sono gaussiane perchè trasformazioni lineari di v.a. gaussiane;

- il filtro è un sistema lineare nello stato e nelle misure;

- nessun filtro non lineare è migliore;

- la ricorsività permette di elaborare ad ogni passo soltanto le misure relative a quel passo, ottenendo però lo stesso risultato che si otterrebbe processando tutte le misure contemporaneamente: ciò significa che ad ogni passo viene estratta tutta l'informazione contenuta nelle misure.

Il filtro di Kalman esteso, invece, è uno stimatore che si applica a sistemi non lineari con rumore additivo gaussiano bianco. Si utilizza una linearizzazione del sistema intorno alla predizione. Le caratteristiche dell'EKF sono:

- filtro ricorsivo;

- non si può assicurare la convergenza;

- non si può assicurare l'ottimalità in generale;

- le variabili aleatorie in gioco non sono più gaussiane;

- il filtro è lineare nelle misure ma non nello stato;

- la matrice di guadagno K è ottenuta componendo le matrici di covarianza ottenute linearizzando intorno alla stima di predizione che è una variabile aleatoria. Ne segue che K è una variabile aleatoria.