

Capitolo 3

Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

Il metodo di localizzazione descritto nel capitolo 2 ed utilizzato in [7] si basa sulla conoscenza geometrica delle altezze dei punti 3D usati come riferimento. In questo capitolo analizzeremo la possibilità di stimare tutte le coordinate dei punti rispetto ad una terna solidale al veicolo (e quindi alla telecamera). Una volta note le coordinate dei punti ed, in particolare le altezze, la localizzazione verrà effettuata secondo quanto riportato in precedenza. In questo caso il filtro di Kalman esteso sarà utilizzato per ricostruire le coordinate dei punti sulla base delle misurazioni provenienti dalla telecamera e delle informazioni odometriche. Per ulteriore chiarimento descriviamo brevemente il problema che vogliamo esaminare (vedi fig.3.1). Consideriamo l'uniciclo in posizione iniziale $(0, 0, 0)$ (conosciuta) sulla terna fissa $\langle W \rangle$. Scegliamo un numero determinato di feature sull'immagine catturata in questa posizione. Facendo quindi muovere l'uniciclo secondo traiettorie *opportune*¹ trackiamo le feature scelte, in modo che ad ogni istante di campionamento sia possibile misurarne le coordinate (x_i, y_i) sul piano immagine. Diamo in ingresso al filtro queste misure e gli spostamenti misurati dagli encoder nell'intervallo. Dopo un numero ragionevole di passi il vettore di stato stimato dal filtro dovrebbe convergere al valore reale delle coordinate delle feature in terna $\langle C \rangle$, solidale al robot. A questo punto sarà possibile anche risalire alle coordinate delle features rispetto alla terna fissa $\langle W \rangle$ di partenza e quindi all'attuale posizione dell'uniciclo rispetto alle condizioni iniziali, utilizzando le formule descritte nel par.2.1.

¹Vedi par.3.5.

3.2 Implementazione del filtro

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = h_1(x) = \alpha_x \frac{{}^C p_1^1}{{}^C p_3^1} + v_1(t) \\ y_2 = h_2(x) = \alpha_y \frac{{}^C p_2^1}{{}^C p_3^1} + v_2(t) \\ \dots \\ y_{2n-1} = h_{2n-1}(x) = \alpha_x \frac{{}^C p_1^n}{{}^C p_3^n} + v_{2n-1}(t) \\ y_{2n} = h_{2n}(x) = \alpha_y \frac{{}^C p_2^n}{{}^C p_3^n} + v_{2n}(t) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Gli ingressi del sistema sono la velocità lineare u_1 e la velocità angolare u_2 impresse al robot. $\omega \in N(0, Q)$ e $v \in N(0, R)$ sono processi aleatori gaussiani a media nulla aventi matrici di covarianza rispettivamente Q e R . Il sistema rappresenta la dinamica delle features in una terna solidale al robot assumendo che il robot sia di tipo unicycle e che si muova su un piano (si nota infatti che la coordinata ${}^C p_2^1$ rimane costante). Le uscite misurate sono le coordinate $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$ delle feature sul piano immagine (relazione prospettica, vedi par.2.1).

Il sistema eq.(3.1)+eq.(3.2) è osservabile per un numero qualsiasi di feature: si rimanda alla fine del capitolo per la dimostrazione (vedi par.3.8).

3.2 Implementazione del filtro

Nelle simulazioni abbiamo preso in considerazione un vettore di stato di 3 features. Il sistema discretizzato ha quindi la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C p_1^1[k+1] = {}^C p_1^1[k] + {}^C p_3^1[k]u_2[k] \\ {}^C p_2^1[k+1] = {}^C p_2^1[k] \\ {}^C p_3^1[k+1] = {}^C p_3^1[k] - u_1[k] - {}^C p_1^1[k]u_2[k] \\ {}^C p_1^2[k+1] = {}^C p_1^2[k] + {}^C p_3^2[k]u_2[k] \\ {}^C p_2^2[k+1] = {}^C p_2^2[k] \\ {}^C p_3^2[k+1] = {}^C p_3^2[k] - u_1[k] - {}^C p_1^2[k]u_2[k] \\ {}^C p_1^3[k+1] = {}^C p_1^3[k] + {}^C p_3^3[k]u_2[k] \\ {}^C p_2^3[k+1] = {}^C p_2^3[k] \\ {}^C p_3^3[k+1] = {}^C p_3^3[k] - u_1[k] - {}^C p_1^3[k]u_2[k] \end{array} \right. \quad (3.3)$$

dove $u_1[k]$ e $u_2[k]$ sono gli ingressi e rappresentano lo spostamento lineare e angolare del robot nell'intervallo di campionamento, ottenuti dagli encoder.

Oss. 3.1 *Il modello della dinamica delle feature utilizzato per la predizione nell'EKF è tanto più impreciso quanto più è veloce il robot rispetto alla frequenza di campionamento del sistema. Nel problema esaminato il tempo di campionamento è dato dal frame-rate della telecamera.*

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

Per quanto riguarda le uscite si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1^1[k] = \alpha_x \frac{c_{p_1^1}[k]}{c_{p_3^1}[k]} \\ z_2^1[k] = \alpha_y \frac{c_{p_2^1}[k]}{c_{p_3^1}[k]} \\ z_1^2[k] = \alpha_x \frac{c_{p_1^2}[k]}{c_{p_3^2}[k]} \\ z_2^2[k] = \alpha_y \frac{c_{p_2^2}[k]}{c_{p_3^2}[k]} \\ z_1^3[k] = \alpha_x \frac{c_{p_1^3}[k]}{c_{p_3^3}[k]} \\ z_2^3[k] = \alpha_y \frac{c_{p_2^3}[k]}{c_{p_3^3}[k]} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Gli Jacobiani da utilizzare nel filtro sono:

$$A = \frac{\partial f}{\partial S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2[k] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2[k] & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u_2[k] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u_2[k] & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u_2[k] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u_2[k] & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \frac{\partial f}{\partial \omega} = I(9)$$

$$H = \frac{\partial h}{\partial S} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_x}{c_{p_3^1}} & 0 & -\alpha_x \frac{c_{p_1^1}}{c_{p_3^1}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_y}{c_{p_3^1}} & -\alpha_y \frac{c_{p_2^1}}{c_{p_3^1}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_x}{c_{p_3^2}} & 0 & -\alpha_x \frac{c_{p_1^2}}{c_{p_3^2}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_y}{c_{p_3^2}} & -\alpha_y \frac{c_{p_2^2}}{c_{p_3^2}^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_x}{c_{p_3^3}} & 0 & -\alpha_x \frac{c_{p_1^3}}{c_{p_3^3}^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_y}{c_{p_3^3}} & -\alpha_y \frac{c_{p_2^3}}{c_{p_3^3}^2} \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{\partial h}{\partial v} = I(6)$$

3.3 Modello Simulink del sistema in esame

In figura 3.2 è riportato lo schema del sistema usato per la stima delle features. Il blocco Robot si compone di due sottoblocchi come descritto nel par.2.5.1.

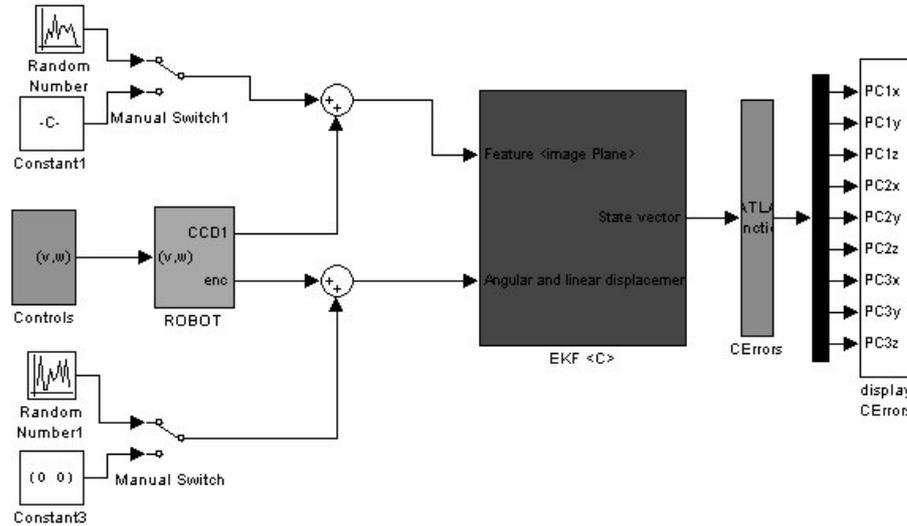


Figura 3.2: *Modello per la simulazione della stima delle coordinate in terna $\langle C \rangle$.*

Per la descrizione dei blocchi fare riferimento al par.2.5. Il blocco *CErrors* dà in uscita la differenza tra i valori stimati e reali delle coordinate delle features in terna $\langle C \rangle$.

3.4 Simulazioni

Analizziamo ora i risultati ottenuti in simulazione con l'applicazione del filtro di Kalman esteso alla stima delle coordinate delle features in terna solidale al robot. I parametri sono i seguenti per tutte le simulazioni:

- Tempo di simulazione: 0-400 sec
- Step size: 0.1 sec
- Solver: ode1 (Euler)

3.4.1 Simulazione 1

I dati relativi alla simulazione sono:

Coordinate iniziali reali delle feature :

- ${}^C P_1 = [-100 \ 40 \ 700]mm$

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

- ${}^C P_2 = [-80 \quad -80 \quad 850]mm$
- ${}^C P_3 = [-90 \quad 50 \quad 900]mm$

Coordinate iniziali stimate delle feature :

- ${}^C P_{1st} = [-375 \quad 150 \quad 2625]mm$
- ${}^C P_{2st} = [-150 \quad -150 \quad 1594]mm$
- ${}^C P_{3st} = [-270 \quad 150 \quad 2700]mm$

Controlli al robot $(u_1, u_2) = [40mm/s, 0rad/s]$ fino a che una delle feature raggiunge il bordo dello schermo e $(u_1, u_2) = [-40mm/s, 0rad/s]$ fino alla posizione iniziale delle feature, alternativamente fino alla fine della simulazione.

Rumore sulle misure Per ogni coordinata del punto sull'immagine si è aggiunto un rumore gaussiano di media nulla e varianza $\sigma^2 = 0.1pixel$;

Rumore sull'odometria $\sigma_l^2 = 0.1mm$ per lo spostamento lineare e $\sigma_a^2 = 0rad$ per lo spostamento angolare;

Matrici di covarianza $Q = 10 * eye(9)$ e $R = 10 * eye(6)$.

Nelle figure 3.3, 3.4 e 3.5 è riportato il tracciato delle feature sul piano immagine. Si nota come la prima feature abbia un'escursione più ampia: vedremo che questo comporterà una migliore convergenza del filtro.

I successivi grafici rappresentano l'errore di stima per ogni coordinata di ogni feature: in particolare la fig.3.6 si riferisce alle coordinate della feature 1, la fig.3.7 alle coordinate della feat.2 e la fig.3.8 alle coordinate della terza feature.

In fig.3.9 riportiamo anche il grafico delle distanze 3D (rif. eq.(3.5)) tra i punti reali e i punti stimati istante per istante dal filtro.

Osservazioni sulla simulazione 1

Dall'analisi dei risultati si deduce quanto segue.

1. Con questa scelta dei parametri di simulazione il filtro converge alla stima desiderata. Con la particolare scelta delle matrici di covarianza diamo lo stesso peso alle misure odometriche e alle informazioni visive;
2. la stima delle coordinate della feature 1 converge più velocemente delle altre. Questo dipende dalla maggiore escursione della feature sul piano immagine: le misure sono più informative per questo punto;

3.4 Simulazioni

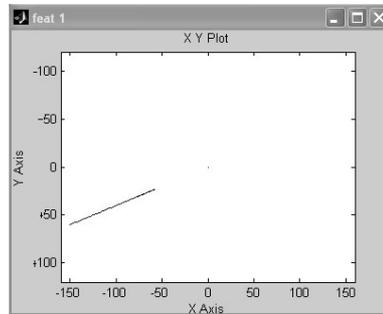


Figura 3.3: *Simulazione 1: escursione della feature 1 sul piano immagine.*

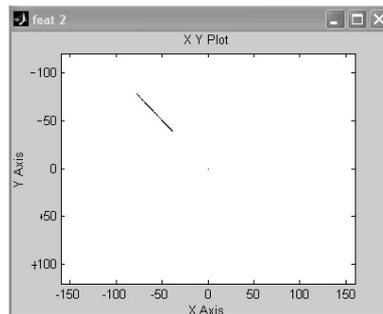


Figura 3.4: *Simulazione 1: escursione della feature 2 sul piano immagine.*

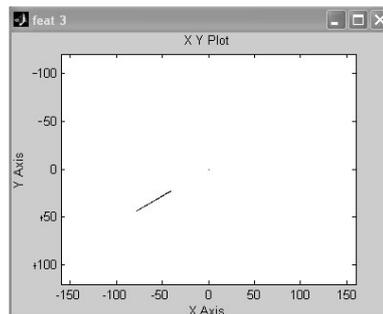


Figura 3.5: *Simulazione 1: escursione della feature 3 sul piano immagine.*

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

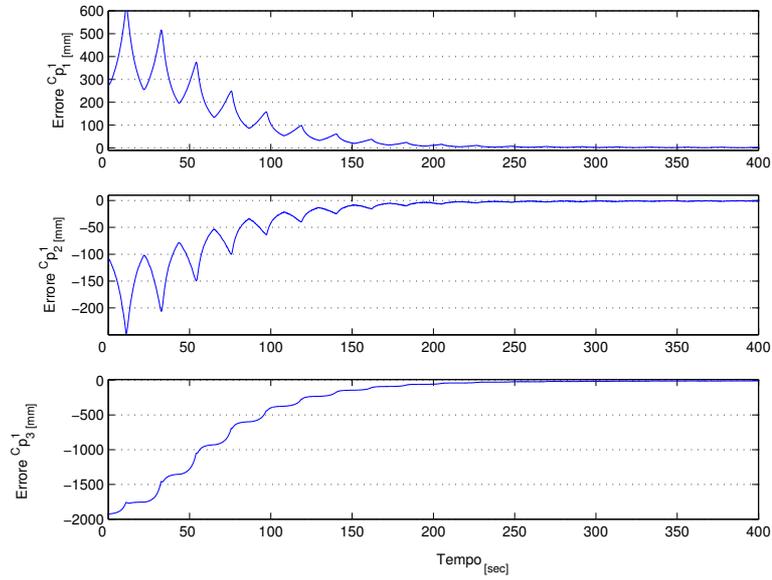


Figura 3.6: *Simulazione 1: errore di stima per le coordinate della feature 1.*

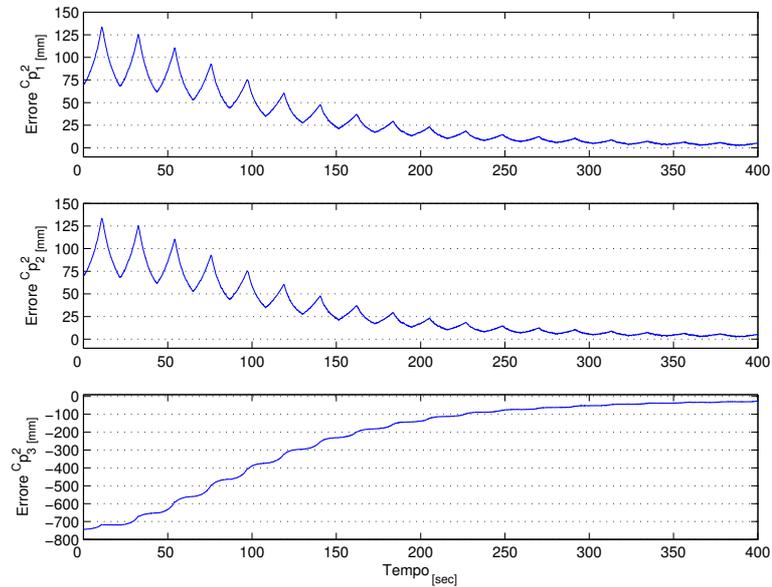


Figura 3.7: *Simulazione 1: errore di stima per le coordinate della feature 2.*

3.4 Simulazioni

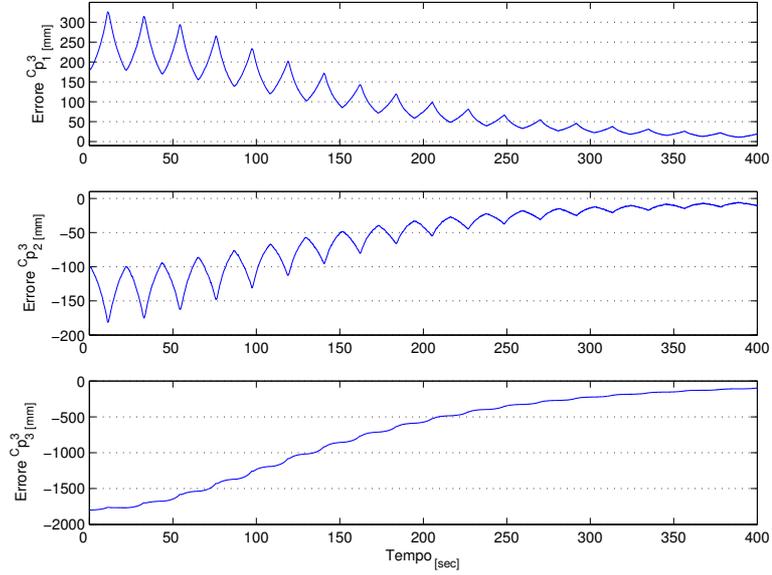


Figura 3.8: *Simulazione 1: errore di stima per le coordinate della feature 3.*

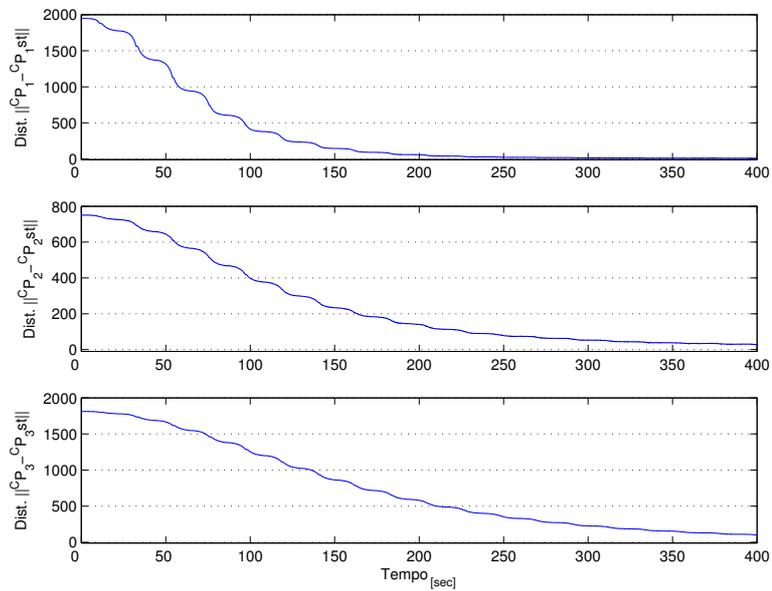


Figura 3.9: *Simulazione 1: distanza 3D tra i punti reali e le relative stime del filtro.*

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

- quando il veicolo va in avanti le stime delle coordinate ${}^C p_1^i$ e ${}^C p_2^i$ peggiorano, mentre migliorano quando il veicolo torna indietro. Invece la stima della coordinata ${}^C p_3^i$ migliora sempre, con convergenza migliore quando il robot va in avanti. Nel par.3.6 è riportata una possibile interpretazione di questo comportamento;
- la funzione distanza 3D:

$$|{}^C P_i - {}^C P_{i\text{st}}| = \sqrt{({}^C p_1^i - {}^C p_{1\text{st}}^i)^2 - ({}^C p_2^i - {}^C p_{2\text{st}}^i)^2 - ({}^C p_3^i - {}^C p_{3\text{st}}^i)^2} \quad (3.5)$$

è monotona decrescente, indicando che ad ogni passo il filtro migliora la stima globale.

3.4.2 Simulazione 2

In questa simulazione diamo un controllo diverso al robot: aggiungiamo la componente angolare alla velocità. Prendiamo in considerazione le stesse feature della simulazione 1. I dati relativi alla simulazione sono i seguenti:

Coordinate iniziali reali delle feature :

- ${}^C P_1 = [-100 \ 40 \ 700]mm$
- ${}^C P_2 = [-80 \ -80 \ 850]mm$
- ${}^C P_3 = [-90 \ 50 \ 900]mm$

Coordinate iniziali stimate delle feature :

- ${}^C P_{1\text{st}} = [-375 \ 150 \ 2625]mm$
- ${}^C P_{2\text{st}} = [-150 \ -150 \ 1594]mm$
- ${}^C P_{3\text{st}} = [-270 \ 150 \ 2700]mm$

Controlli al robot :

- $u_1 = 40mm/s$ per 12 sec e $u_1 = -40mm/s$ per 12 sec, alternativamente fino alla fine della simulazione;
- $u_2 = 0.02 * \sin(2\pi * 0.05 * t)$;

Rumore sulle misure Per ogni coordinata del punto sull'immagine si è aggiunto un rumore gaussiano di media nulla e varianza $\sigma^2 = 0.1pixel$;

Rumore sull'odometria $\sigma_l^2 = 0.1mm$ per lo spostamento lineare e $\sigma_a^2 = 0rad$ per lo spostamento angolare;

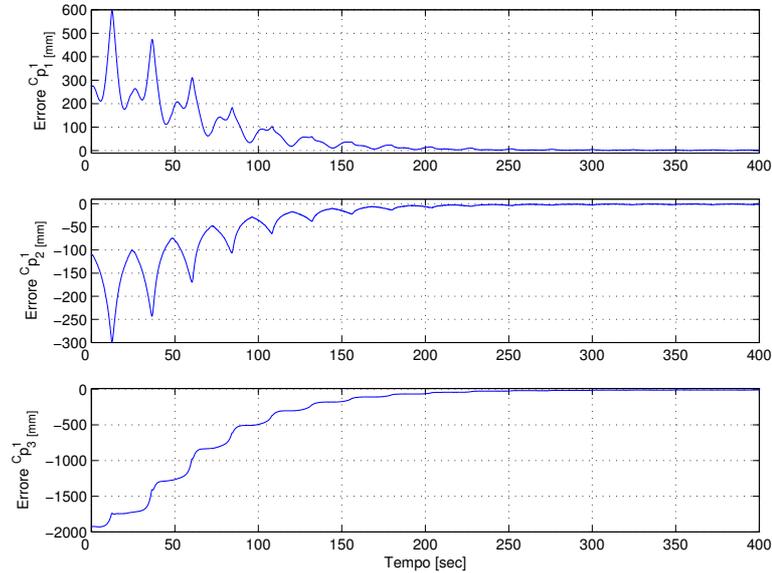


Figura 3.10: *Simulazione 2: errore di stima per le coordinate della feature 1.*

Matrici di covarianza $Q = 10 * eye(9)$ e $R = 10 * eye(6)$.

Notiamo che non aggiungiamo errore sulla misura dello spostamento angolare per rendere la simulazione perfettamente confrontabile con la precedente. In figura 3.10 sono riportati gli andamenti degli errori di stima per le 3 coordinate.

Osservazioni sulla simulazione 2

Con un movimento oscillatorio (componente lineare + componente angolare) non otteniamo miglioramenti. In particolare dal confronto delle fig.3.6, fig.3.7 e fig.3.8 con le fig.3.10, fig.3.11 e fig.3.12 si nota un comportamento leggermente peggiore per la stima nella simulazione 2. Per questa particolare configurazione delle feature, quindi, il movimento angolare non aggiunge informazione utile al filtro.

3.5 Controllo del robot

Dalle simulazioni si è verificato, almeno per le situazioni analizzate, che uno spostamento lineare del robot è tanto informativo quanto uno lineare+angolare. Nella pratica uno spostamento lineare del veicolo aggiunge

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

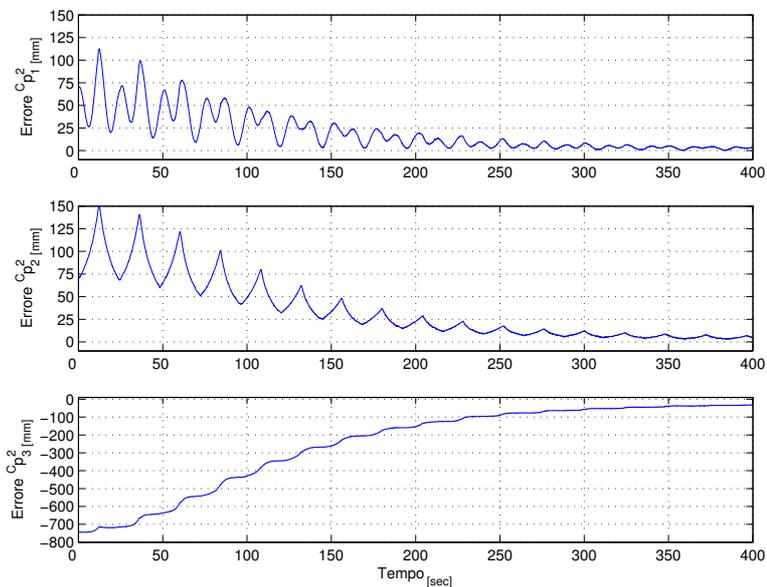


Figura 3.11: *Simulazione 2: errore di stima per le coordinate della feature 2.*

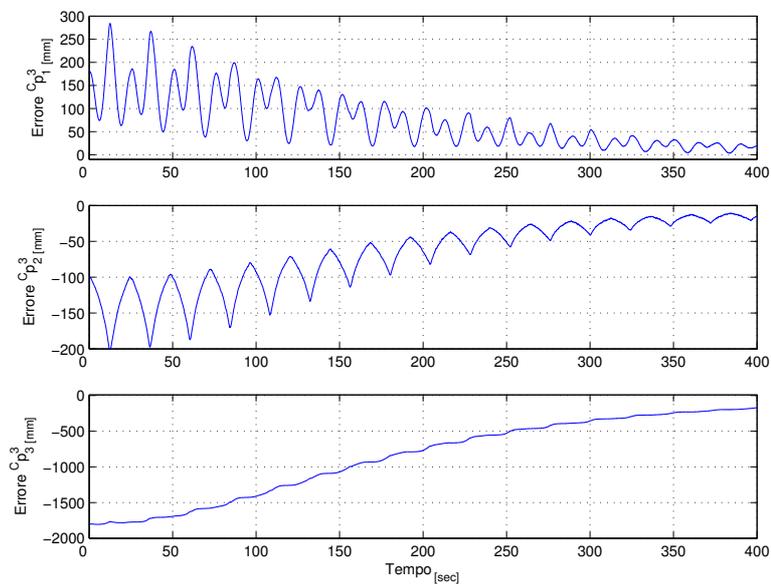


Figura 3.12: *Simulazione 2: errore di stima per le coordinate della feature 3.*

3.6 Descrizione del comportamento del filtro

meno rumore rispetto ad uno misto. Inoltre per ottenere quanta più informazione possibile è opportuno far muovere il robot il più possibile: il controllo IBVS implementato sposta il robot in avanti fino a che una delle feature non raggiunge il bordo del piano immagine e poi fa tornare il robot nella postura iniziale, cioè con le feature nelle posizioni iniziali.

3.6 Descrizione del comportamento del filtro

Facciamo le seguenti osservazioni, sulla base dell'analisi dell'andamento delle stime del filtro:

Oss. 3.2 *ad ogni passo il filtro tende a dare come stima un punto che soddisfa la relazione prospettica eq.(2.1).*

Oss. 3.3 *la convergenza della stima dipende dalle informazioni di movimento, sia del veicolo che delle feature sul piano immagine: se tutto è fermo il filtro si ferma su una qualsiasi soluzione della relazione prospettica eq.(2.1).*

Date queste osservazioni il comportamento del filtro può essere interpretato come descritto di seguito: per semplicità consideriamo un movimento lineare del veicolo e limitiamo l'analisi alle coordinate del piano $[Z_c, Y_c]$. Ciò è lecito perchè dalla relazione prospettica si vede che conoscendo 2 coordinate si identifica univocamente la terza.

Velocità di avanzamento positiva

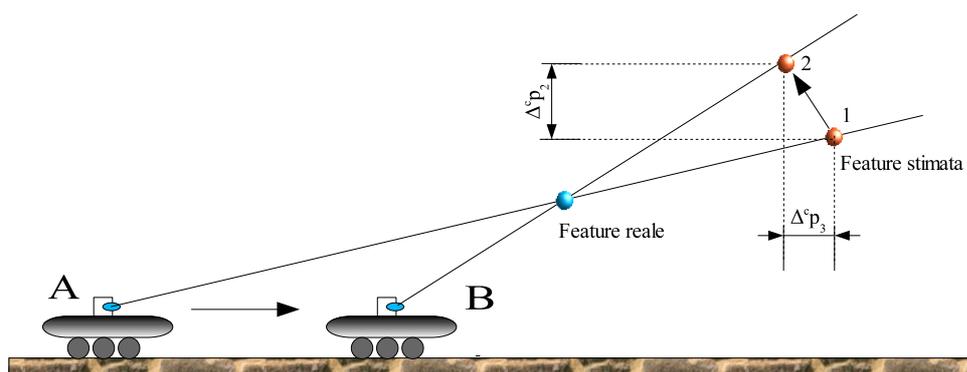


Figura 3.13: *Variazione delle coordinate della stima mentre il veicolo avanza.*

Facciamo riferimento alla figura 3.13. Sia l'uniciclo in una data posizione A e la stima del filtro in questa posizione sia il punto 1. Se il veicolo si

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

sposta in avanti, verso la posizione **B**, cambia la linea retta che unisce la focale della telecamera al punto 3D in osservazione. La vecchia stima del punto, quindi, non soddisferà più la relazione prospettica, per cui il filtro cercherà una nuova soluzione da proporre come stima. Il filtro varierà la soluzione secondo i minimi quadrati², per cui la nuova stima (punto **2**) sarà localizzata lungo il segmento di minima distanza che unisce le due rette e parte dal punto **1**.

Questo processo si riflette sulla stima delle coordinate nel modo seguente:

1. la coordinata $^C p_2$ peggiora, essendo la nuova stima più alta della precedente rispetto al punto 3D da stimare;
2. la coordinata $^C p_3$ migliora essendo la nuova stima più vicina della precedente al punto 3D da stimare;

Velocità di avanzamento negativa

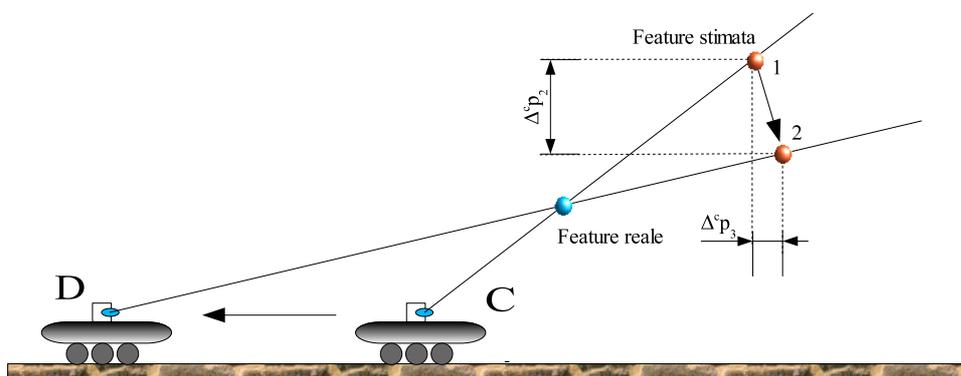


Figura 3.14: *Variazione delle coordinate della stima mentre il veicolo retrocede.*

Facciamo riferimento alla figura 3.14. Se il veicolo si sposta dalla posizione **C** alla posizione **D**, in base alle considerazioni fatte in precedenza, la stima si porta dal punto **1** al punto **2**. Cioè:

1. la coordinata $^C p_2$ migliora;

²In genere il filtro, per ricavare la stima, utilizza un numero di informazioni ridondante rispetto alla dimensione del vettore di stato (più equazioni rispetto alle incognite), pesando con opportune matrici i dati derivanti dalla predizione e dalla misura. Nel nostro caso si hanno $3n$ equazioni dalla predizione e $2n$ equazioni dalle misure per $3n$ parametri da stimare dove n è il numero di feature.

3.6 Descrizione del comportamento del filtro

2. la coordinata $^C p_3$ tende a peggiorare (per punti lontani rimane pressochè costante).

Movimento avanti-indietro

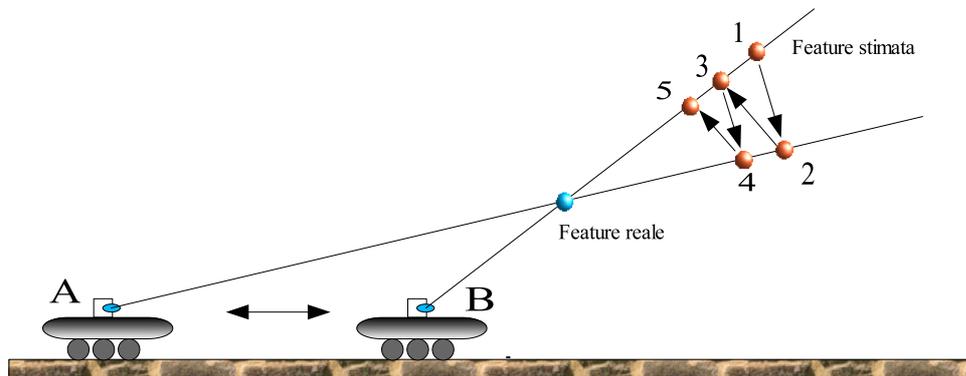


Figura 3.15: Variazione delle coordinate della stima.

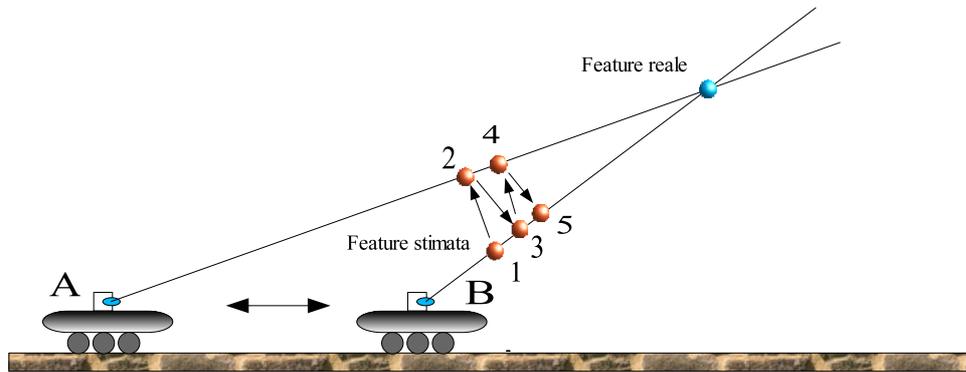


Figura 3.16: *Variazione delle coordinate della stima.*

In riferimento alla figura 3.15, si vede che muovendo il veicolo dalla posizione A alla B, e viceversa, la stima converge verso il valore reale. Le stesse considerazioni valgono se la feature stimata è più vicina alla telecamera della feature reale (vedi fig.3.16).

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

3.7 Localizzazione del robot

Una volta stimate le coordinate delle features in terna $\langle C \rangle$ solidale al robot, è possibile localizzare il robot rispetto alla posizione iniziale tramite i seguenti passi:

1. Si ottengono i ${}^C P_i$ iniziali (cioè quando il robot è in posizione $(0, 0, 0)$) mediante la eq.(2.2) e le posizioni iniziali delle features sul piano immagine (tramite l'immagine iniziale);
2. Dai ${}^C P_i = [{}^C p_1 \ {}^C p_2 \ {}^C p_3]$ si ottengono i ${}^W P_i = [{}^C p_3 \ {}^C p_2 \ -{}^C p_1]$;
3. Si ricava la postura del robot dalle eq.(2.6) e eq.(2.7). Vedi anche il par.2.5.3.

La precisione della localizzazione dipende dall'accuratezza delle stime effettuate.

3.8 Studio dell'osservabilità per 1 feature

N.B.: in questo e nel successivo paragrafo, per chiarezza, utilizziamo una notazione differente rispetto alla notazione usata nel resto della tesi: in particolare $x = [{}^c p_{11} \ {}^c p_{12} \ {}^c p_{13}]^T$ è il vettore di stato contenente le coordinate di un punto nella terna solidale al robot. Valgono le seguenti corrispondenze:

- ${}^C p_1^i \rightarrow {}^c p_{i1}$;
- ${}^C p_2^i \rightarrow {}^c p_{i2}$;
- ${}^C p_3^i \rightarrow {}^c p_{i3}$;

Consideriamo il seguente sistema in cui lo stato contiene le coordinate della feature (nella terna solidale al robot) scelta per il tracking:

$$\begin{bmatrix} {}^c \dot{p}_{11} \\ {}^c \dot{p}_{12} \\ {}^c \dot{p}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} {}^c p_{13} \\ 0 \\ -{}^c p_{11} \end{bmatrix} u_2 \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} x_1 = h_1(x) = \alpha_x \frac{{}^c p_{11}}{{}^c p_{13}} \\ y_1 = h_2(x) = \alpha_y \frac{{}^c p_{12}}{{}^c p_{13}} \end{cases} \quad (3.7)$$

dove gli ingressi del sistema sono la velocità lineare u_1 e la velocità angolare u_2 impresse al robot. Le uscite misurate sono le coordinate (x_1, y_1) della feature sul piano immagine (relazione prospettica). I campi vettoriali sono

3.8 Studio dell'osservabilità per 1 feature

$$g_1 = [0 \ 0 \ -1]^T \text{ e } g_2 = [{}^c p_{13} \ 0 \ -{}^c p_{11}]^T.$$

Per lo studio dell'osservabilità iniziamo con il calcolo dello spazio di osservazione:

$$\begin{aligned} h_1 &= \alpha_x \frac{{}^c p_{11}}{{}^c p_{13}} \\ h_2 &= \alpha_y \frac{{}^c p_{12}}{{}^c p_{13}} \\ L_{g_1} h_1 &= \alpha_x \frac{{}^c p_{11}}{{}^c p_{13}^2} \\ L_{g_2} h_1 &= \alpha_x \frac{({}^c p_{11}^2 + {}^c p_{13}^2)}{{}^c p_{13}^2} \\ L_{g_1} h_2 &= \alpha_y \frac{{}^c p_{12}}{{}^c p_{13}^2} \\ L_{g_2} h_2 &= \alpha_y \frac{{}^c p_{11} {}^c p_{12}}{{}^c p_{13}^2} \\ L_{g_2} L_{g_1} h_1 &= \alpha_x \frac{(2{}^c p_{11}^2 + {}^c p_{13}^2)}{{}^c p_{13}^3} \\ L_{g_2} L_{g_1} h_2 &= 2\alpha_y \frac{{}^c p_{11} {}^c p_{12}}{{}^c p_{13}^3} \end{aligned}$$

Gli elementi fino ad ora calcolati permettono di scrivere:

$$O = h_1, h_2, L_{g_1} h_1, L_{g_2} h_1, L_{g_1} h_2, L_{g_2} h_2, L_{g_2} L_{g_1} h_1, L_{g_2} L_{g_1} h_2$$

Calcoliamo quindi la corrispondente codistribuzione di osservabilità:

$$dO = \text{span} [dh_1, dh_2, dL_{g_1} h_1, dL_{g_2} h_1, dL_{g_1} h_2, dL_{g_2} h_2, dL_{g_2} L_{g_1} h_1, dL_{g_2} L_{g_1} h_2]$$

dove:

$$\begin{aligned} dh_1 &= \left[\frac{\alpha_x}{{}^c p_{13}}, 0, -\alpha_x \frac{{}^c p_{11}}{{}^c p_{13}^2} \right] \\ dh_2 &= \left[0, \frac{\alpha_y}{{}^c p_{13}}, -\alpha_y \frac{{}^c p_{12}}{{}^c p_{13}^2} \right] \\ dL_{g_1} h_1 &= \left[0, \frac{\alpha_x}{{}^c p_{13}^2}, 0, -2\alpha_x \frac{{}^c p_{11}}{{}^c p_{13}^3} \right] \\ dL_{g_2} h_1 &= \left[2\alpha_x \frac{{}^c p_{11}}{{}^c p_{13}^2}, 0, -2\alpha_x \frac{{}^c p_{11}^2}{{}^c p_{13}^3} \right] \end{aligned}$$

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

$$\begin{aligned}
dL_{g_1}h_2 &= \left[0, \frac{\alpha_y}{c p_{13}^2}, -2\alpha_y \frac{c p_{12}}{c p_{13}^3} \right] \\
dL_{g_2}h_2 &= \left[\alpha_y \frac{c p_{12}}{c p_{13}^2}, \alpha_y \frac{c p_{11}}{c p_{13}^2}, -2\alpha_y \frac{c p_{11} c p_{12}}{c p_{13}^3} \right] \\
dL_{g_2}L_{g_1}h_1 &= \left[4\alpha_x \frac{c p_{11}}{c p_{13}^3}, 0, -2\alpha_x \frac{6c p_{11}^2 + c p_{13}^2}{c p_{13}^4} \right] \\
dL_{g_2}L_{g_1}h_2 &= \left[2\alpha_y \frac{c p_{12}}{c p_{13}^3}, 2\alpha_y \frac{c p_{11}}{c p_{13}^3}, -6\alpha_y \frac{c p_{11} c p_{12}}{c p_{13}^4} \right]
\end{aligned}$$

Passiamo al calcolo dei minori 3×3 :

$$D1 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1}h_1 \end{bmatrix} = -\alpha_x^2 \alpha_y \frac{c p_{11}}{c p_{13}^5}$$

$$D2 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_1}h_2 \end{bmatrix} = -\alpha_x \alpha_y^2 \frac{c p_{12}}{c p_{13}^5}$$

$$D3 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2}h_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$D4 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dL_{g_2}h_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$D5 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dL_{g_1}h_1 \\ dL_{g_1}h_2 \end{bmatrix} = \alpha_x^2 \alpha_y \frac{c p_{11}}{c p_{13}^6}$$

$$D6 = \det \begin{bmatrix} dh_2 \\ dL_{g_1}h_1 \\ dL_{g_1}h_2 \end{bmatrix} = \alpha_x \alpha_y^2 \frac{c p_{12}}{c p_{13}^6}$$

$$D7 = \det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dL_{g_1}h_1 \\ dL_{g_1}h_2 \end{bmatrix} = \alpha_x^2 \alpha_y \frac{c p_{11}}{c p_{13}^6}$$

...

Si vede che i minori si annullano per $c p_{11} = 0$ e $c p_{12} = 0$ e non sono definiti per $c p_{13} = 0$. Fisicamente $c p_{12} = 0$ implica che il punto che stiamo osservando giace sulla linea dell'orizzonte della telecamera. Se il veicolo si muove sul

3.8 Studio dell'osservabilità per 1 feature

piano $[X_c, Z_c]$, la coordinata ${}^c p_{12}$ non cambia: il punto rimane sulla linea dell'orizzonte e non abbiamo nessuna informazione dalla misura. ${}^c p_{13} = 0$ implica, invece, che il punto che stiamo osservando appartenga fisicamente al piano immagine: questo è impossibile. Pertanto, il sistema fisico reale è sempre osservabile.

Per capire meglio il risultato ottenuto specializziamo l'analisi e vediamo se il sistema rimane osservabile solo avanzando oppure solo ruotando.

3.8.1 Unico ingresso: velocità lineare

In questo caso il sistema diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{{}^c p}_{11} \\ \dot{{}^c p}_{12} \\ \dot{{}^c p}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_1 \quad (3.8)$$

La codistribuzione di osservabilità che si ottiene è:

$$dO = \text{span} [dh_1, dh_2, dL_{g_1} h_1, dL_{g_1} h_2,]$$

Tutti i minori che si ottengono sono diversi da zero se ${}^c p_{11} \neq 0$ e ${}^c p_{12} \neq 0$ e non sono definiti per ${}^c p_{13} = 0$ (stesse condizioni ottenute in precedenza). Pertanto il sistema rimane osservabile applicando il solo ingresso velocità lineare.

3.8.2 Unico ingresso: velocità angolare

In questo caso il sistema diventa:

$$\begin{bmatrix} \dot{{}^c p}_{11} \\ \dot{{}^c p}_{12} \\ \dot{{}^c p}_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^c p_{13} \\ 0 \\ -{}^c p_{11} \end{bmatrix} u_2 \quad (3.9)$$

La codistribuzione di osservabilità che si ottiene è:

$$dO = \text{span} [dh_1, dh_2, dL_{g_2} h_1, dL_{g_2} h_2,]$$

Tutti i minori che si ottengono sono sempre uguali a zero, cioè se il sistema può solo ruotare perde l'osservabilità. Questo è un noto risultato nel problema della visione[3].

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

3.9 Studio dell'osservabilità per 2 features

In questo caso lo stato contiene le coordinate di 2 features distinte: $x = [{}^c p_{11} \ {}^c p_{12} \ {}^c p_{13} \ {}^c p_{21} \ {}^c p_{22} \ {}^c p_{23}]^T$. Gli ingressi del sistema sono la velocità lineare u_1 e la velocità angolare u_2 impresse al robot.

$$\begin{bmatrix} \dot{{}^c p}_{11} \\ \dot{{}^c p}_{12} \\ \dot{{}^c p}_{13} \\ \dot{{}^c p}_{21} \\ \dot{{}^c p}_{22} \\ \dot{{}^c p}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} {}^c p_{13} \\ 0 \\ -{}^c p_{11} \\ {}^c p_{23} \\ 0 \\ -{}^c p_{21} \end{bmatrix} u_2 \quad (3.10)$$

$$\begin{cases} x_1 = h_1(x) = \alpha_x \frac{{}^c p_{11}}{{}^c p_{13}} \\ y_1 = h_2(x) = \alpha_y \frac{{}^c p_{12}}{{}^c p_{13}} \\ x_2 = h_3(x) = \alpha_x \frac{{}^c p_{21}}{{}^c p_{23}} \\ y_2 = h_4(x) = \alpha_y \frac{{}^c p_{22}}{{}^c p_{23}} \end{cases} \quad (3.11)$$

Le uscite misurate sono le coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) delle features sul piano immagine (relazione prospettica).

Per lo studio dell'osservabilità iniziamo con il calcolo dello spazio di osservazione:³

$$\begin{aligned} \dots \\ h_3 &= \alpha_x \frac{{}^c p_{21}}{{}^c p_{23}} \\ h_4 &= \alpha_y \frac{{}^c p_{22}}{{}^c p_{23}} \\ L_{g_1} h_3 &= \alpha_x \frac{{}^c p_{21}}{{}^c p_{23}^2} \\ L_{g_2} h_3 &= \alpha_x \frac{({}^c p_{21})^2 + ({}^c p_{23})^2}{{}^c p_{23}^2} \\ L_{g_1} h_4 &= \alpha_y \frac{{}^c p_{22}}{{}^c p_{23}^2} \\ L_{g_2} h_4 &= \alpha_y \frac{{}^c p_{21} {}^c p_{22}}{{}^c p_{23}^2} \end{aligned}$$

Per la codistribuzione di osservabilità otteniamo:

³Nota che $h_1, h_2, L_{g_1} h_1, L_{g_1} h_2, L_{g_2} h_1, L_{g_2} h_2$ sono uguali al caso precedente

3.9 Studio dell'osservabilità per 2 features

$$\begin{aligned}
 dh_1 &= \left[\frac{\alpha_x}{c p_{13}}, 0, -\alpha_x \frac{c p_{11}}{c p_{13}^2}, 0, 0, 0 \right] \\
 dh_2 &= \left[0, \frac{\alpha_y}{c p_{13}}, -\alpha_y \frac{c p_{12}}{c p_{13}^2}, 0, 0, 0 \right] \\
 dh_3 &= \left[0, 0, 0, \frac{\alpha_y}{c p_{23}}, 0, -\alpha_y \frac{c p_{21}}{c p_{23}^2} \right] \\
 dh_4 &= \left[0, 0, 0, 0, \frac{\alpha_y}{c p_{23}}, -\alpha_y \frac{c p_{22}}{c p_{23}^2} \right] \\
 dL_{g_1} h_1 &= \left[\frac{\alpha_x}{c p_{13}^2}, 0, -2\alpha_x \frac{c p_{11}}{c p_{13}^3}, 0, 0, 0 \right] \\
 dL_{g_2} h_1 &= \left[2\alpha_x \frac{c p_{11}}{c p_{13}^2}, 0, -2\alpha_x \frac{c p_{11}^2}{c p_{13}^3}, 0, 0, 0 \right] \\
 dL_{g_1} h_2 &= \left[0, \frac{\alpha_y}{c p_{13}^2}, -2\alpha_y \frac{c p_{12}}{c p_{13}^3}, 0, 0, 0 \right] \\
 dL_{g_2} h_2 &= \left[\alpha_y \frac{c p_{12}}{c p_{13}^2}, \alpha_y \frac{c p_{11}}{c p_{13}^2}, -2\alpha_y \frac{c p_{11} c p_{12}}{c p_{13}^3}, 0, 0, 0 \right] \\
 dL_{g_1} h_3 &= \left[0, 0, 0, \frac{\alpha_x}{c p_{23}^2}, 0, -2\alpha_x \frac{c p_{21}}{c p_{23}^3} \right] \\
 dL_{g_2} h_3 &= \left[0, 0, 0, 2\alpha_x \frac{c p_{21}}{c p_{23}^2}, 0, -2\alpha_x \frac{c p_{21}^2}{c p_{23}^3} \right] \\
 dL_{g_1} h_4 &= \left[0, 0, 0, 0, \frac{\alpha_y}{c p_{23}^2}, -2\alpha_y \frac{c p_{22}}{c p_{23}^3} \right] \\
 dL_{g_2} h_4 &= \left[0, 0, 0, \alpha_y \frac{c p_{22}}{c p_{23}^2}, \alpha_y \frac{c p_{21}}{c p_{23}^2}, -2\alpha_y \frac{c p_{21} c p_{22}}{c p_{23}^3} \right]
 \end{aligned}$$

Passiamo ora a calcolare il rango delle matrice ottenuta mettendo insieme i covettori appena calcolati.

- Scegliendo $[dh_1, dh_2, dh_3, dh_4, dL_{g_1} h_1, dL_{g_1} h_2]$ il minore 6x6 utile è uguale a zero sempre. Questo vuol dire che le funzioni non sono tutte indipendenti.

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman

- Scegliendo $[dh_1, dh_2, dh_3, dh_4, dL_{g_1}h_1, dL_{g_1}h_3]$ otteniamo

$$\det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \\ dh_4 \\ dL_{g_1}h_1 \\ dL_{g_1}h_3 \end{bmatrix} = \alpha_x^4 \alpha_y^2 \frac{{}^c p_{11} {}^c p_{21}}{{}^c p_{13}^5 {}^c p_{23}^5}$$

- Scegliendo $[dh_1, dh_2, dh_3, dh_4, dL_{g_1}h_1, dL_{g_1}h_4]$ otteniamo

$$\det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \\ dh_4 \\ dL_{g_1}h_1 \\ dL_{g_1}h_4 \end{bmatrix} = \alpha_x^3 \alpha_y^3 \frac{{}^c p_{11} {}^c p_{22}}{{}^c p_{13}^5 {}^c p_{23}^5}$$

- Scegliendo $[dh_1, dh_2, dh_3, dh_4, dL_{g_1}h_2, dL_{g_1}h_3]$ otteniamo

$$\det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \\ dh_4 \\ dL_{g_1}h_2 \\ dL_{g_1}h_3 \end{bmatrix} = \alpha_x^3 \alpha_y^3 \frac{{}^c p_{12} {}^c p_{21}}{{}^c p_{13}^5 {}^c p_{23}^5}$$

- Scegliendo $[dh_1, dh_2, dh_3, dh_4, dL_{g_1}h_2, dL_{g_1}h_4]$ otteniamo

$$\det \begin{bmatrix} dh_1 \\ dh_2 \\ dh_3 \\ dh_4 \\ dL_{g_1}h_2 \\ dL_{g_1}h_4 \end{bmatrix} = \alpha_x^2 \alpha_y^4 \frac{{}^c p_{12} {}^c p_{22}}{{}^c p_{13}^5 {}^c p_{23}^5}$$

Si vede che i minori si annullano per ${}^c p_{11} = 0$ e ${}^c p_{12} = 0$ e ${}^c p_{21} = 0$ e ${}^c p_{22} = 0$ e non sono definiti per ${}^c p_{13} = 0$ e ${}^c p_{23} = 0$. Si hanno le stesse condizioni viste in precedenza considerando le 2 feature indipendentemente, quindi il sistema è osservabile nelle situazioni di interesse.

3.9 Studio dell'osservabilità per 2 features

Oss. 3.4 *Dall'analisi dei determinanti si deduce che l'osservabilità per una feature è indipendente dall'osservabilità per le altre. Nel filtro di Kalman ciò si ripercuote sulla particolare forma a blocchi delle matrici utilizzate (vedi par.3.2). Ciò implica che per stimare le coordinate di n feature in terna solidale al robot non è necessario costruire un EKF con un vettore di stato di $3n$ coordinate e matrici di dimensione $3n \times 3n$ per lo stato e $2n \times 3n$ per le misure, ma è possibile implementare n EKF separati aventi il vettore di stato di dimensione 3, matrici 3×3 per lo stato e 2×3 per le misure. Questo comporta un notevole miglioramento dei tempi di calcolo, vista anche la presenza di inversioni di matrici nell'algoritmo di filtraggio.*

3. Stima delle coordinate delle feature in terna solidale al robot con filtro di Kalman
