A p p e n d i c e   A

TRASFORMATA DI FOURIER

Uno degli aspetti più importanti di tutto il settore dell'ingegneria è sicuramente l'analisi di segnali nel dominio del tempo e della frequenza. I segnali analogici si distinguono in segnali deterministici ed aleatori.

A.1 Segnali analogici, deterministici ed aleatori

I segnali analogici, indicati con s(t), rappresentano l'andamento nel tempo di una grandezza elettrica. Come ad esempio può essere il segnale vocale, in cui un'onda trasversale di pressione-velocità è convertita in una tensione da un microfono.Oppure un segnale immagine, che è bidimensionale, e definito su di un piano anziché nel tempo, rappresentato da una grandezza S(x,y) che ne individua la luminanza, e scandito per linee generando un segnale temporale. Un segnale può anche assumere valori complessi, in questo caso il segnale assume contemporaneamente due diversi valori (parte reale e parte immaginaria, oppure modulo e fase).

Esiste una sostanziale differenza tra segnali deterministici e aleatori. Un esempio di segnale certo può essere una cosinusoide di cui sia nota sia l'ampiezza che la fase, mentre un segnale aleatorio non è noto con esattezza prima che questo venga prodotto (ad esempio il rumore di un ruscello, o le notizie presenti in un telegiornale). L'insieme di tutti i segnali aleatori appartenenti ad una medesima classe viene indicato nel suo complesso processo aleatorio, ed un segnale particolare di questo insieme come una sua realizzazione.

A.1.1 Rappresentazione di segnali analogici

Lo studio delle proprietà dei segnali si articola prendendo in considerazione per gli stessi rappresentazioni alternative, scelte in modo da poter valutare più agevolmente le alterazioni subite dai segnali nel passaggio attraverso sistemi fisici . In particolare, sarà definito lo *sviluppo in serie di Fourier* per la rappresentazione dei segnali periodici, e quindi lo *trasformata di Fourier* che descrive una classe più ampia di segnali.

L'analisi di Fourier consente di definire il concetto di banda occupata da un segnale, non ché di come la sua potenza e/o energia si distribuisce in frequenza; quest'ultimo andamento viene indicato con il termine di *Spettro di Densità di Potenza (*o di *Energia).*

A.1.2 Rappresentazione di processi aleatori

Anche nel caso in cui il segnale non è noto a priori, e dunque è impossibile calcolarne la trasformata di Fourier in forma chiusa, si può ugualmente giungere ad una rappresentazione che caratterizzi le realizzazioni del processo nei termini della distribuzione (statistica) in frequenza della potenza di segnale.

Ciò è possibile considerando la *funzione di autocorrelazione,* che esprime il grado di interdipendenza statistica tra i valori assunti in istanti diversi dalle realizzazione del processo, e che costituisce un elemento unificante ai fini della *stima spettrale* dei segnali. Esistono processi molto correlati che sono caratterizzati da una densità di potenza di tipo colorato, mentre esistono processi scarsamente correlati che sono identificati da una densità di potenza di tipo bianco[5].

[5] I termini colorato e bianco hanno origine da una similitudine con l'energia luminosa, per cui se la luce è bianca indica l'indiscriminata presenza in egual misura di tutte le frequenza; viceversa, come una luce colorata dipende dal prevalere di determinate frequenze nella radiazione elettromagnetica, così uno spettro colorato indica la prevalenza di alcune frequenze su altre.

A.1.3 Caratteristiche dei segnali

Da un punto di vista analitico, un segnale è una funzione del tempo del tipo descritto nei paragrafi precedenti, e per il quale si possono operare le classificazioni;

Segnale di potenza Un segnale analogico può avere un estensione temporale limitata, oppure si può immaginare che si estenda da meno infinito a infinito. Nel secondo caso il segnale si dice di potenza se ne esiste (ed è diversa da zero) la media quadratica

$$0 < P_s = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} |s(t)| dt < \infty$$

Un segnale di potenza è inoltre detto

Segnale periodico di periodo T, nel caso in cui si verifichi che

s(t)=s(t+T)

per qualsiasi valore di t, mentre si dice

Segnale di energia une di durata limitata o illimitata, se esiste il valore

$$0 < \varepsilon_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Perché ciò avvenga, occorre che s(t) tenda a zero (per t che tende ad ∞) più velocemente (od in modo uguale) ad $\frac{1}{\sqrt{t}}$ (e quindi $|s(t)|^2$ tenda a zero come $\frac{1}{t}$).

In particolare, se un segnale ha durata limitata, ovvero è nullo per t al di fuori di un intervallo $[t_1,t_2]$ (vedi figure in basso), allora è anche di energia. In fine, viene detto

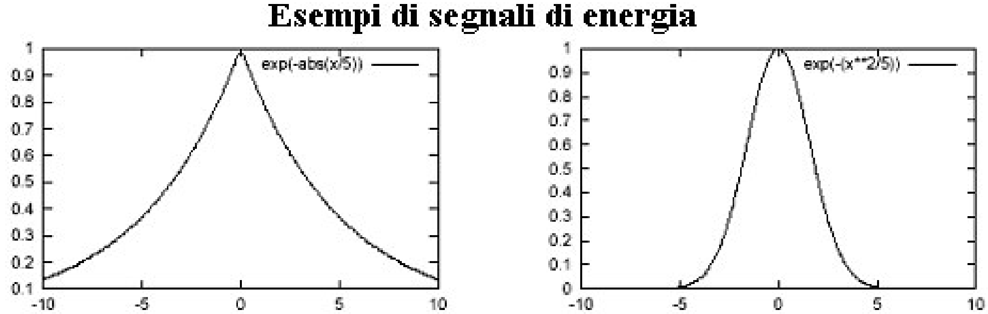
Segnale impulsivo un segnale di energia, che tende a zero come (o più velocemente) $\frac{1}{t}$:

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

E' il caso delle funzioni sommabili, per le quali $|s(t)|^2$ tende a zero come (o più di) $\frac{1}{t^2}$, e dunque di energia.

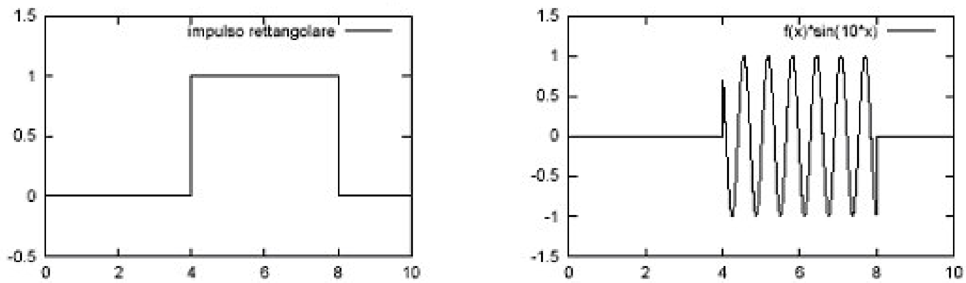
Come si è visto, un segnale impulsivo è di energia, un segnale a durata limitata è impulsivo, e di energia, un segnale periodico non è di energia, ma di potenza.
Ecco alcuni esempi di segnali:

Esempi di segnali di energia



Impulso Esponenziale Bilatero **Impulso Gaussiano**

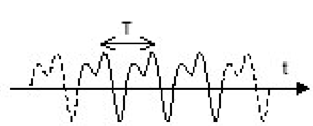
Esempi di segnale a durata



Impulso rettangolare tra 4 e 8 **Sinusoide Troncata**

A.2 Serie di Fourier

In questo paragrafo si definisce lo sviluppo in serie di Fourier come rappresentazione di segnali periodici . Un segnale periodico x(t) è un segnale di potenza, che assume ripetutamente gli stesi valori a distanza multipla di un intervallo temporale T denominato *periodo*, ovvero tale che $x(t)= x(t+T)\ \forall t$. L'inverso di T è detto *frequenza fondamentale* $F=\frac{1}{T}$ o prima armonica di x(t), espressa in Hertz, dimensionalmente pari all'inverso di un tempo [sec^{-1}].



Per i segnali periodici esiste una forma di rappresentazione basata sulla conoscenza di una serie infinita di coefficienti complessi $\{X_n\}$ denominati *coefficienti di Fourier*, calcolabili a partire da un periodo del segnale come

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi nFt}dt \qquad (A.1)$$

e che permettono la ricostruzione di x(t), sotto forma di combinazione lineare di infinite funzioni esponenziali complesse $e^{j2\pi nFt}$, mediante l'espressione nota come *serie di Fourier :*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt} \qquad (A.2)$$

L'equazione 1.1 è detta eq. di *analisi* e permette di stabilire il contenuto in termini di oscillazione armoniche del segnale (analizzare il segnale). L'equazione 1.2, viceversa, è una equazione di *sintesi* che, note le ampiezze e fasi delle varie armoniche (cioè noti i coefficienti di Fourier) permette di ricostruire, cioè sintetizzare, il segnale dato a partire dalle proprie componenti frequenziali (armoniche). Le equazioni di analisi e di sintesi permettono dunque di stabilire una corrispondenza tra il segnale x(t) e la sequenza X_n costituita dai coefficienti delle serie (coefficienti di Fourier o di Eulero). Questa corrispondenza indicata:

$$x(t) \Leftrightarrow X_n$$

implica che la conoscenza dell'andamento del segnale x(t) in ambito temporale è di fatto equivalente alla conoscenza della successione dei coefficienti di Fourier X_n in ambito frequenziale, nel senso che il passaggio da un dominio all'altro è immediato attraverso le relazioni di analisi (1.1.) e di sintesi (1.2). Le funzioni della base di rappresentazione $e^{j2\pi nFt}$ sono funzioni trigonometriche a frequenza multipla (n-esima) della fondamentale, dette anche armoniche n-esime. I termini $X_n e^{j2\pi nFt}$ sono chiamati componenti armoniche di x(t) a frequenza f=nF. Il coefficiente $X_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt$

rappresenta la componente continua (o valor medio) di x(t). La serie di Fourier dà valori esatti in tutti i punti in cui x(t) è continuo, mentre in corrispondenza di discontinuità di prima specie fornisce un valore pari alla media dei valori agli estremi, cosicché il valore dell'energia di un periodo è preservato. I coefficienti di Fourier X_n possono essere calcolati anche per un segnale di estensione finita T. Antitrasformando il segnale diventa periodico. Se si pone nF=f (con f variabile continua)9, si possono interpretare le componenti armoniche come i valori campionati di una finzione (complessa) della frequenza: $X_n=\overline{X}(nF)$. $\overline{X}(f)$ si chiama *inviluppo dello spettro di ampiezza di x(t)*, che si ottiene estendendo la definizione dei coefficienti di Fourier:

$$\overline{X}(f)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt\ .$$

Dato che i coefficienti X_n sono valori complessi per rappresentarli è conveniente tracciare due grafici che prendono il nome di spettro di ampiezza e spettro di fase. Il primo illustra l'andamento dell'ampiezza (modulo) dei coefficienti X_n, il secondo ne illustra l'andamento della fase, entrambi in funzione dell'ordine n del coefficiente o del valore della n-esima frequenza armonica nF:

$$\begin{cases} M_n = |X_n| & \textit{Spettro di ampiezza} \\ \varphi_n = \arctan\dfrac{\Im\{X_n\}}{\Re\{X_n\}} & \textit{Spettro di fase} \end{cases}$$

essendo $X_n = |X_n|e^{j\varphi_n} = \Re\{X_n\} + j\Im\{X_n\}$

A.2.1 Segnali reali

A.2.1.1 Simmetria Coniugata

I coefficienti della serie di Fourier possono essere calcolati anche per segnali complessi; nel caso particolare di x(t) reale i coefficienti di Fourier risultano godere delle proprietà di *simmetria coniugata,* espressa come

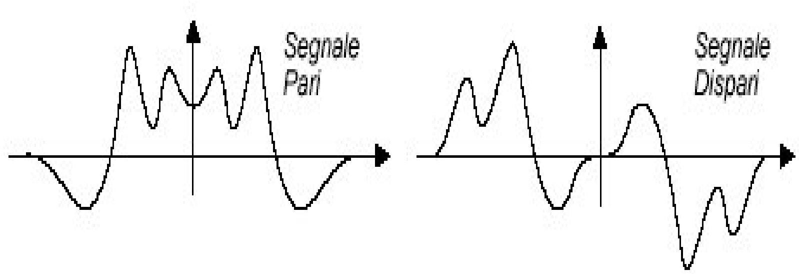
$$X_{-n} = X_n^*$$

e che esprime la circostanza che i coefficienti con indice n negativo possiedono una parte reale uguale a quella dei coefficienti con (uguale) indice positivo, e parte immaginaria cambiata di segno[6]. Ciò comporta una proprietà analoga per il modulo e la fase di { X_n }, e dunque si può scrivere:

$$\text{x(t) Reale} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re\{X_{-n}\} = \Re\{X_n\} \\ \Im\{X_{-n}\} = -\Im\{X_n\} \end{cases}; \begin{cases} |X_{-n}| = |X_n| \\ \arg\{X_{-n}\} = -\arg\{X_n\} \end{cases}$$

Tali relazioni evidenziano che se x(t) è reale i coefficienti X_n risultano avere modulo pari e fase dispari, ovvero parte reale pari e parte immaginari dispari..

[6] La dimostrazione di questa proprietà si basa sul fatto che, componendo l'esponenziale complesso che compare nella formula per il calcolo degli X_n come $e^{-j2\pi nFt} = \cos(2\pi nFt) - j\sin(2\pi Ft)$ ed essendo x(t) reale, l'integrale stesso si suddivide in due, ognuno relativo al calcolo indipendente delle parte reale e quella immaginaria : $X_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(2\pi nFt\,dt) - \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(2\pi nFt\,dt)$. Essendo il coseno una funzione pari, il primo integrale fornisce gli stessi risultati per n cambiato di segno; il secondo integrale invece cambia di segno con n, essendo il seno una funzione dispari.



Un corollario di questo risultato è che [7]se x(t) è reale pari, i coefficienti X_n sono reali (pari), mentre se x(t) è reale dispari, gli X_n sono immaginari (dispari).

A.2.1.2 Serie Trigonometrica

Nel caso in cui gli X_n abbiano simmetria coniugata, la formula di ricostruzione può scriversi

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ X_n e^{j2\pi nFt} + X_{-n} e^{-j2\pi nFt} \right\} = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n 2\cos(2\pi nFt + \varphi_n)$$

---

[7] Con riferimento alla scomposizione del calcolo di X_n alla nota precedente, notiamo che se x(t) è (reale) *pari*, allora $\Im\{X_n\}$=0, in quanto x(t) sin (2πnFt)dt è dispari, ed il suo integrale esteso ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo. Se invece x(t) è (reale) dispari, si ottiene $\Re\{X_n\}$ = 0, per lo stesso motivo applicato al termine x(t)cos(2πnFt)dt.

ovvero in forma di serie di coseni; si noti che X_0 è necessariamente reale, in quanto la fase deve risultare una unzione dispari della frequenza.

In modo simile, le proprietà relative alle parti reale e immaginaria permettono di scrivere:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (R_n + jI_n) e^{j2\pi nFt} + (R_n - jI_n) e^{-j2\pi nFt} \right\} = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2R_n \cos(2\pi nFt) - 2I_n \sin(2\pi nFt) \}$$

in cui

$$R_0 = M_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} R_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(2\pi nFt)dt \\ I_n = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\sin(2\pi nFt)dt \end{cases}$$

Pertanto, nel caso in cui x(t) sia un segnale reale, la serie di Fourier si riduce ad uno sviluppo in termini di funzioni trigonometriche, ed in particolare ad una serie di soli coseni nel caso in cui x(t) sia pari, oppure una serie di soli seni , nel caso in cui sia dispari.

A.3 Teorema di Parseval

Stabilisce l'equivalenza di due rappresentazioni del segnale dal punto di vista energetico. La potenza, infatti, è calcolabile in modo simile in entrambi i domini del tempo e ella frequenza, risultando

$$P_x = \lim_{\Delta T \to \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} | X_n |^2$$

Dimostrazione:

$$P_x = \lim_{\Delta T \to \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\frac{\Delta T}{2}}^{\frac{\Delta T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x^*(t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_n X_n e^{j2\pi nFt} \right] \left[\sum_m X_m^* e^{-j2\pi mFt} \right] dt = \sum_n \sum_m X_n X_m^* \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n^2 + I_n^2)$$

A.3.1 Densità spettrale di potenza per segnali periodici

Per un segnale si definisce la quantità energia come:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x^2(t) \right| dt \qquad \text{(A.3.1)}$$

In accordo a tale definizione, qualunque segnale periodico ha energia infinita.
Si definisce inoltre la quantità potenza media come:

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| x^2(t) \right| dt \qquad \text{(A.3.2)}$$

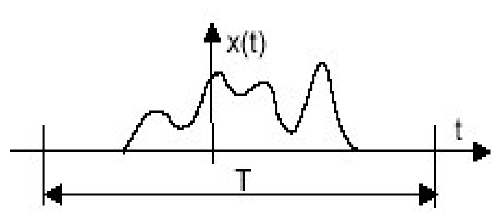
Nel caso di un segnale periodico, la (1.3.2) viene riscritta come:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| x^2(t) \right| dt \qquad \text{(A.3.3)}$$

dove T è ancora il periodo del segnale.

A.4 Trasformata di Fourier per segnali aperiodici tempo continuo

Nei paragrafi precedenti si è visto che lo sviluppo in serie di Fourier può essere applicato ad un segnale limitato nel tempo, e che l'uso della formula di ricostruzione rende periodico il segnale originario.



Se però facciamo tendere all'infinto il periodo "fittizio" T su cui sono calcolati i coefficienti X_n, le armoniche della serie di Fourier tendono ad infittirsi, fino ad arrivare ad una distanza infinitesima; allo stesso tempo, la periodicizzazione del segnale ricostruito tende via via a scomparire.

La trasformata di Fourier serve a rappresentare quei segnali per i quali non sussiste una struttura periodica, ed è un operatore funzionale che, applicato ad un segnale definito nel dominio del tempo, ne individua un altro nel dominio della variabile *continua* frequenza (a differenza della serie *discreta* di Fourier, idonea nel caso in cui siano presenti solo armoniche della fondamentale). L'operazione di trasformazione è spesso indicata con la simbologia X(f)= F\{x(t)\}. La sua definizione dal punto di vista analitico è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

la cui esistenza è garantita per segnali x(t) impulsivi (ovvero per i quali $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$), cioè assolutamente sommabili).Un segnale impulsivo è anche di energia, mentre non è sempre vero il viceversa. Spesso però, X(f) esiste anche per segnali di energia e può essere definita anche per segnali di potenza periodici.

L'antitrasformata di Fourier F^{-1} {} è l'operatore analitico che svolge l'associazione inversa.

L'operazione di antitrasformazione è definita come

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

e vale ovunque x(t) sia continuo, mentre nelle discontinuità di prima specie fornisce il valor medio di x(t). Il risultato della trasformata $X(f) = M(f)e^{j\varphi(f)}$ è anche detto *spettro di ampiezza* complessa, mentre M(f) ed φ(f) sono detti spettri di *modulo* e *fase*.

La formula di ricostruzione se messa a confronto con la serie di Fourier, può essere pensata come una somma integrale di *infinite* componenti $X(f)e^{j2\pi ft}df$ di ampiezza (complessa) infinitesima, evidenziando come ora siano presenti tutte le frequenze e non solo le armoniche. Una seconda analogia con al serie di Fourier deriva dal considerare un segnale x(t) di durata limitata T, e calcolare X(f)= F\{x(t)\}. per $f = \frac{n}{T} = nF$. In tal caso, è facile verificare che risulta X($f = nF) = T \cdot X_n$ con X_n pari all'n-esimo coefficiente di Fourier calcolato per x(t) su quello stesso periodo.

A.4.1 Densità di energia

Similmente al caso dei segnali periodici, esiste una relazione tra l'*energia* di un segnale, e la *distribuzione* della stessa nel dominio della frequenza. Si definisce prodotto scalare tra i segnali di energia x(t) e y(t) (detto anche *energia incrociata*) il valore

$$\varepsilon_{xy} = (\overline{x}, \overline{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

che, nel caso in cui x(t)=y(t), coincide con l'energia ε_x di x(t). Se entrambi x(t) e y(t) possiedono trasformata di Fourier possiamo scrivere :

$$\varepsilon_{xy} = \int y^*(t)\left[\int X(f) e^{j2\pi ft} df\right] dt = \int X(f)\left[\int y^*(t) e^{j2\pi ft} dt\right] df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df$$

Il risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\,dt \quad = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,Y^*(f)\,df$$

costituisce il *teorema di Parseval* per segnali di energia, ed implica che le trasformate di segnali ortogonali, sono anch'esse ortogonali. Ponendo ora x(t)=y(t), si ottiene :

$$\varepsilon_x = (\overline{x}, \overline{x}) = \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\, x(t)\,|^2 \; dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\, X(f)\,|^2 \; df$$

quindi $\varepsilon_x(f) = |\, X(f)\,|^2$

è lo *spettro di densità di energia* di x(t). Infatti, l'integrale $\int_{f1}^{f2} |\, X(f)\,|^2 \; df$ rappresenta il contributo di energia totale ε_x di x(t), limitatamente alla benda di frequenze comprese tra $f_1 ed\ f_2$.

A.5 Trasformata di Fourier per segnali periodici tempo discreto

Nella teoria dei sistemi a tempo discreto occorre elaborare segnali che sono rappresentati da sequenze. Una sequenza di numeri x, in cui l'n-esimo numero della sequenza è indicato con x(n), è scritta formalmente come

x={x(n)}, $-\infty < n < \infty$ (A.5.1) anche se le sequenze non sempre provengono dal campionamento di forme d'onda analogiche, si definirà x(n) il campione n-esimo della sequenza. I segnali a tempo discreto (sequenze) sono spesso rappresentati graficamente come in figura 1.5.1.

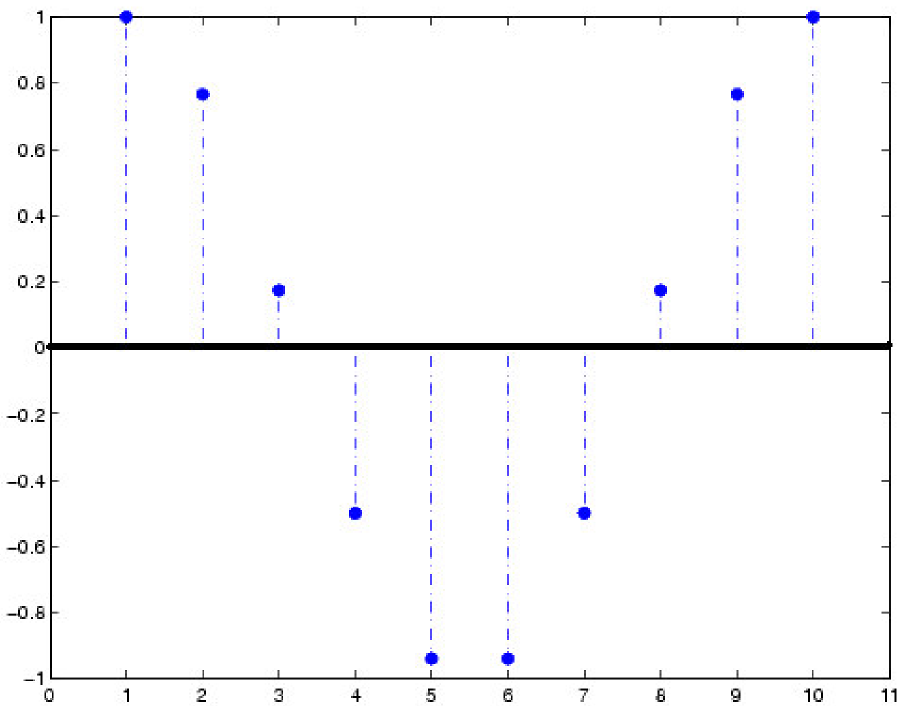


Figura 1.5.1 Rappresentazione grafica di un segnale a tempo discreto

La sequenza x(n) è definita solo per valori interi di n. Supponiamo di avere una sequenza periodica di periodo N, ossia $x(n) = x(n+N)$ per ogni n.

La rappresentazione in serie di Fourier per x(n) è

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}_k e^{j2\pi kn/N} \qquad \text{(A.5.2)}$$

dove i coefficienti $\overline{X}_k$ sono calcolati come

$$\overline{X}_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad \text{(A.5.3)}$$

L'espressione (1.5.2) viene conosciuta come *equazione di sintesi*, la (A.5.3) come *equazione di analisi* (ovviamente stavolta nel caso di segnali periodici tempo discreto).

La differenza sostanziale tra un segnale tempo continuo ed uno tempo discreto sta nelle componenti in frequenza: mentre il primo può avere un intervallo illimitato di frequenze, il secondo possiede al massimo *N* componenti frequenziali, con *N* periodo del segnale.

Come per l'analogo tempo continuo, anche per un segnale tempo discreto è possibile definirne la potenza:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \qquad \text{(A.5.4)}$$

E come nel caso continuo, la potenza può essere messa direttamente in relazione con i coefficienti di Fourier:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\left|\overline{X}_k\right|^2 \qquad \text{(A.5.5)}$$

A.6 La trasformata di Fourier per segnali aperiodici tempo discreto

Come per il caso dei segnali aperiodici tempo continuo, anche nel caso dei segnali aperiodici tempo discreto l'analisi frequenziale passa dalla trasformata del segnale nel dominio del tempo.

Per un segnale tempo discreto ad energia finita la trasformata di Fourier è definita come

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad \text{(A.6.1)}$$

Fisicamente $X(\omega)$ rappresenta la decomposizione del segnale di partenza *x[n]* nelle sue componenti frequenziali. Anche in questo caso l'equazione che definisce la trasformata del segnale temporale viene chiamata *equazione di analisi*.

L'*equazione di sintesi*, derivata dalla (A.6.1), è:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n} \qquad \text{(A.6.2)}$$

Successivamente vedremo come l'introduzione della trasformata di Fourier per segnali tempo discreto risulti indispensabile per formulare alcuni algoritmi di analisi frequenziale, noti come FFT (Fast Fourier Transform).