

Capitolo 2

TECNICA DI IDENTIFICAZIONE DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA CON IL METODO FEEDBACK RELAY

Una delle principali applicazioni della tecnica del feedback relay è l'identificazione di processi. Il primo ad utilizzarla fu Writtenmark nel 1984. In questi ultimi 20 anni, sia ingegneri che scienziati hanno svolto svariati test e da questi test si è giunti a due conclusioni:

- è preferibile usare un sistema a ciclo chiuso rispetto ad un sistema ciclo aperto
- un processo lineare stabile con il feedback relay ha come uscita un'oscillazione stazionaria autosostenuta, ossia un ciclo limite.

Inoltre, il vantaggio di questa tecnica è che non necessita a priori di informazioni sul sistema da riconoscere, mentre, ci sono tecniche più tradizionali in cui è necessario conoscere il periodo di campionamento.

Come si sa, suddetta scelta è sempre stata complicata: infatti, se l'intervallo di campionamento è molto largo, la dinamica del processo non potrà essere adeguatamente campionata e di conseguenza il modello non potrà essere ricostruito fedelmente, dato che si avranno pochi campioni. Al contrario, se l'intervallo di campionamento è troppo piccolo, si avrà bisogno di un'apparecchiatura per memorizzare i dati e questo avrebbe come conseguenza un numero eccessivo di dati con informazioni incongruenti. La scelta ottimale è quella di ridurre in un secondo momento il numero dei dati, anche se per la stima di parametri in tempo reale può non essere tollerabile. Evitare queste difficili decisioni ci fa capire come il metodo del feedback relay sia ottimale per l'identificazione dei processi.

Con questa tecnica si possono facilmente avere informazioni sul punto critico del processo, grazie alla conoscenza delle ampiezze e del periodo di oscillazione dell'onda. Il metodo 'Relay-based auto-tuning' è stato introdotto all'interno di controllori commerciali e usato con successo in molte applicazioni di controllo dei processi¹, a differenza del metodo di Ziegler-Nichols usato per settare semplici controllori come i PID (Proportional-Integrative-Derivative). In anni di utilizzo industriale del 'Relay-based autotuning' si sono riscontrati dei problemi dovuti:

- all'uso della funzione descrittiva per approssimare la non linearità, in questo modo la stima del punto critico non è precisa e può essere abbastanza inesatta sotto certe condizioni²;
- al fatto che il singolo punto identificato, sotto certe condizioni, può essere utilizzato solamente per settare un semplice controllore PID, infatti, se siamo in presenza di processi oscillatori o processi con un tempo di assestamento lungo, i risultati sono poco attendibili.

Per ovviare a questi problemi sono state apportate molte modifiche. Ad esempio per identificare due o più punti della risposta in frequenza, sono stati inseriti componenti lineari o isteresi a larghezza variabile. Sono state fatte molte prove, alcune per ottenere migliori oscillazioni in corrispondenza di determinate frequenze modificando il relay standard, altre per creare nuovi algoritmi sfruttando al meglio le informazioni ricavate dalla risposta in frequenza.

2.1 Applicazione del feedback relay

Si supponga che il sistema feedback relay sia stabile e eventualmente produca un ciclo limite. Le informazioni contenute nel ciclo limite possono essere usate per avere una stima della risposta in frequenza.

¹ Hägglund e Aström, 1991; Aström *et al.*, 1993, Aström e Hägglun, 1995.

² Slotine and Li, 1991; Huang and Chen, 1996.

Si consideri un processo con singolo ingresso e singola uscita descritto da:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t - L) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^1$ e $u(t-\tau) \in \mathbb{R}$ sono rispettivamente lo stato, l'uscita ed il controllo in ingresso; A, b, c sono matrici reali o vettori con dimensioni appropriate; $L \geq 0$ indica il ritardo di tempo. La rappresentazione della funzione di trasferimento del processo è:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (2.2)$$

dove

$$G(s) = G_0(s)e^{-Ls}$$

con $G_0(s) = c(sI - A)^{-1}b$.

L'errore tra l'uscita e l'ingresso è:

$$e(t) = r(t) - y(t). \quad (2.3)$$

Il processo è controllato con feedback relay, quindi:

$$u(t) = \begin{cases} \mu_+ & \text{se } e(t) > h_+ \text{ o se } e(t) \geq h_- \text{ e } u(t_-) = \mu_+ \\ \mu_- & \text{se } e(t) < h_- \text{ o se } e(t) \geq h_+ \text{ e } u(t_-) = \mu_- \end{cases} \quad (2.4)$$

dove $h_+, h_- \in \mathbb{R}$ con $h_- \leq h_+$ che indicano l'isteresi; $\mu_+, \mu_- \in \mathbb{R}$ e $\mu_+ \neq \mu_-$.

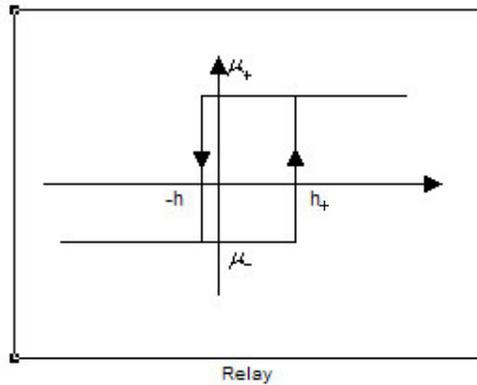


Fig. 2.1 Relay

Nella figura 2.1 è rappresentata la caratteristica del relay con isteresi. Un relay si dice con isteresi se $h_+ \neq 0$ o $h_- \neq 0$, simmetrico se $h_+ = h, h_- = -h$ e $\mu_+ = \mu, \mu_- = -\mu$, altrimenti è chiamato relay con soglia. I relay standard sono simmetrici e con isteresi. La funzione iniziale $u(\bar{t})$ per $\bar{t} \in [-L, 0]$, dove L è il ritardo maggiore o uguale a 0, utilizzata nella pratica è:

$$u(\bar{t}) = \begin{cases} \mu_+ & \text{se } e(0) > h_+, \\ \mu_- & \text{se } e(0) < h_-, \\ u_0 \in \Pi & \text{se } h_- \leq e(0) \leq h_+ \end{cases}$$

dove $\Pi := \{ \mu_-, \mu_+ \}$.

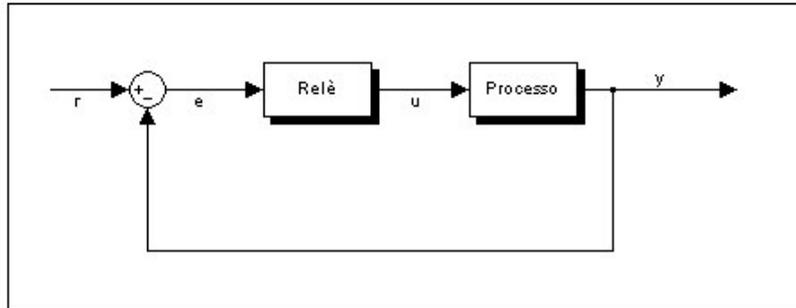


Fig. 2.2 Sistema controllato con Feedback relay

Negli esperimenti con feedback relay orientati all'identificazione e all'analisi dei sistemi, l'ingresso " r " è spesso mantenuto costante, per questo motivo viene posto uguale a 0. Il metodo più semplice per approssimare il relay è la funzione descrittiva.

2.1.1 Metodo della Funzione Descrittiva

Questo metodo approssima il relay con un sistema lineare tempo invariante. Si mette in ingresso una funzione sinusoidale:

$$e(t) = a \cdot \sin(\omega t)$$

e si analizza complessivamente il sistema. Si consideri un caso standard di relay (relay ideale). L'uscita $u(t)$ potrebbe essere un'onda quadra isofrequenziale al segnale di ingresso $e(t)$. Usando lo sviluppo in serie di Fourier, visto nei capitoli precedenti, il segnale periodico $u(t)$ può essere scritto come:

$$u(t) = \frac{4\mu}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1}. \quad (2.5)$$

La funzione descrittiva del relay $N(a)$, è

$$N(a) = \frac{4\mu}{\pi} \quad (2.6)$$

Si può vedere come la funzione descrittiva ignori le armoniche superiori alla fondamentale. Il segnale residuo “ ρ ” che non viene considerato con la funzione descrittiva è:

$$\rho = \frac{4\mu}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\omega t}{2k-1} \quad (2.7)$$

Nell’analisi del sistema feedback relay con il metodo della funzione descrittiva si sostituisce il blocco non lineare del relay con un funzione descrittiva quasi equivalente. Nel sistema di figura 2.2 mettiamo un processo con funzione di trasferimento $G(s)$ e sollecitiamo il sistema di figura 2.2 con un’oscillazione di ampiezza “ a ” e frequenza ω_c .

Le equazioni che caratterizzano il sistema sono:

$$E = -Y,$$

$$U = N(a)E,$$

$$Y = G(j\omega_c)U.$$

Questo implica :

$$G(j\omega_c) = -\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi a}{4\mu}, \quad (2.8)$$

che è una stima della risposta in frequenza dell’uscita alla frequenza di eccitazione.

Riportando i risultati ottenuti con la funzione descrittiva sul piano di Nyquist, si ottiene che la curva di $G(j\omega)$ interseca l'asse reale a $-\frac{1}{N(a)}$ nel punto ω_c del piano complesso, come si può vedere nella figura (2.3).

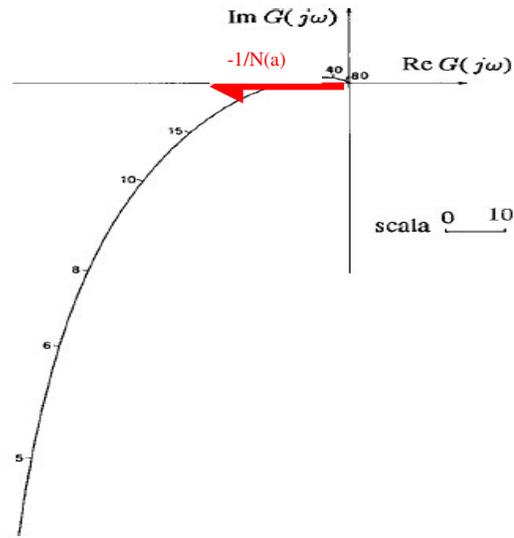


Fig. 2.3 Funzione descrittiva di un relay ideale

Questo punto coincide con il punto critico chiamato anche ultima frequenza del processo, che può essere calcolato come :

$$\arg\{G(j\omega_u)\} = -\pi.$$

L'ultima frequenza e il guadagno k_u possono essere calcolati così:

$$\omega_u = \omega_c,$$

$$k_u = \frac{1}{|G(j\omega_u)|} = \frac{1}{|G(j\omega_c)|} = \frac{4\mu}{\pi a} \quad (2.9)$$

Con questo tipo di relay è possibile regolare solo un parametro, ossia l'ampiezza dell'uscita del relay μ . La larghezza μ causa forti eccitazioni del processo e quindi si

riesce a ottenere una buona identificazione. Tuttavia, un segnale con un'ampiezza molto grande può deviare l'uscita del processo lontano dal suo set-point, che è una conseguenza non voluta.

Il range di valori che può assumere μ quindi è limitato. Questo è un trade-off tra l'identificazione ed un buon controllo. Un problema che è sempre presente nell'identificazione è il rumore nel segnale di uscita. Se è possibile, il livello di uscita del relay può essere settato in modo tale che l'ampiezza dell'oscillazione del processo di uscita sia circa tre volte più larga della banda del suo rumore. Se questo non è realizzabile, allora μ dovrà essere al massimo il 3-10% dei valori che può assumere. Per questi motivi e per irrobustire il sistema di controllo, è preferibile usare un relay simmetrico con isteresi variabile. Questo tipo di relay è meno sensibile al rumore, la funzione descrittiva del relay con isteresi è:

$$N(a) = \frac{4\mu}{\pi(\sqrt{a^2 - h^2} + jh)} \quad (2.10)$$

In questo caso, la risposta in frequenza del processo è l'inversa cambiata di segno della funzione descrittiva del nuovo relay:

$$G(j\omega_c) = -\frac{1}{N(a)} = -\frac{\pi}{4\mu}(\sqrt{a^2 - h^2} + jh) \quad (2.11)$$

In questo caso, la frequenza di oscillazione corrisponde all'intersezione di $-\frac{1}{N(a)}$ con la curva di Nyquist del processo. (Fig. 2.4)

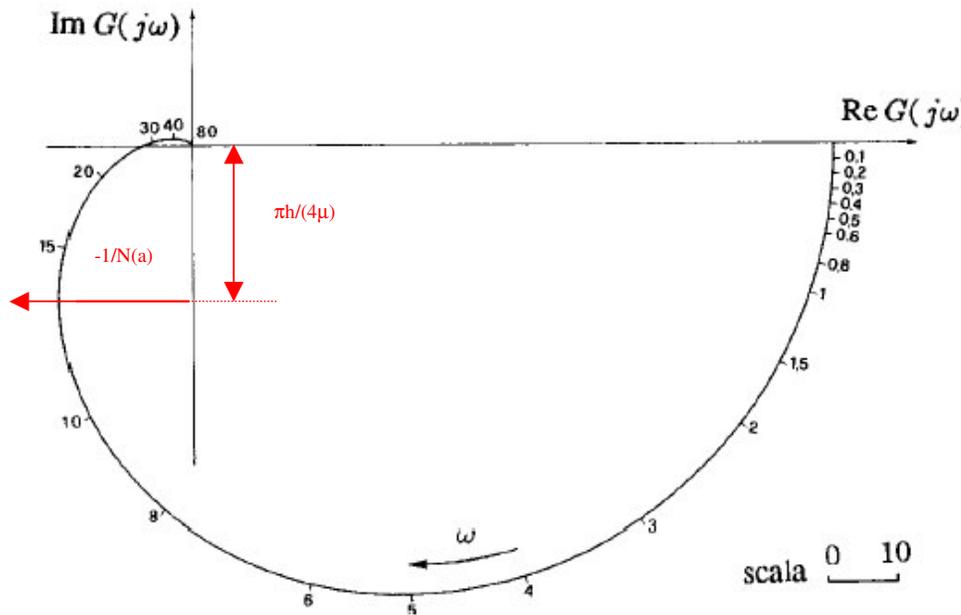


Fig. 2.4 Funzione descrittiva di un relay con isteresi

Il relay con isteresi è un modo semplice per ridurre il rumore sul segnale di uscita, così infatti questo può essere calcolato statisticamente. La larghezza dell'isteresi, h , viene presa di valore più grande della banda del rumore per evitare nell'uscita 'switching' errati, solitamente viene scelta di valore pari al doppio della banda del rumore³: in questo modo si ottiene un'oscillazione stazionaria che si può mantenere ed osservare. Un'altra soluzione per ridurre il rumore è quella di filtrare il segnale di uscita, infatti, mentre il rumore è presente alle alte frequenze, i processi sono di natura passa basso. Quindi, applicando un filtro passa basso al sistema, si ottengono dei dati non affetti da rumore che possono poi essere utilizzati per la stima del modello. La larghezza di banda del filtro è solitamente imposta 3-5 volte più grande della frequenza critica del processo. Un altro accorgimento per evitare il rumore è quello di utilizzare periodi

³ Hang, *et al.*, 1993,b

multipli del ciclo limite invece di un singolo periodo. Un'analisi dettagliata del problema sarà trattata nel paragrafo 3.2.

2.1.2 Metodo della serie di Fourier

Il segnale in ingresso al blocco relay non è esattamente un'onda sinusoidale e purtroppo questo introduce un errore nel calcolo dell'uscita con la funzione descrittiva. Questo errore in un processo lineare può essere facilmente rimosso estraendo l'armonica fondamentale sia dell'uscita che dell'ingresso del processo lineare $G(s)$ una volta trasformato in serie di Fourier. La risposta in frequenza del processo calcolata alla frequenza di oscillazione è:

$$G(j\omega_c) = \frac{Y(j\omega_c)}{X(j\omega_c)} = \frac{\int_0^{T_u} y(t)e^{-j\omega_c t} dt}{\int_0^{T_i} x(t)e^{-j\omega_c t} dt} \quad (2.12)$$

dove $y(t)$ e $u(t)$ sono rispettivamente un periodo del segnale di uscita ed un periodo del segnale di ingresso calcolate alla frequenza di auto-oscillazione. Questa formula è valida per qualsiasi relay purché il sistema in esame non sia compromesso da disturbi o dal rumore.

2.1.3 Stima del guadagno statico

Se si usa un relay simmetrico, il risultante ciclo limite sarà simmetrico. In tale oscillazione non ho componente continua, questo consente di stimare un solo punto. Inoltre per stimare il guadagno statico o il guadagno continuo del processo, si introduce una soglia, o come ingresso del relay ($h_+ \neq h_-$), o come uscita del relay ($\mu_+ \neq \mu_-$), o entrambi, in modo da creare nell'uscita del processo un relay asimmetrico e un ciclo limite asimmetrico.

In questo modo il guadagno statico può essere calcolato ancora una volta con la serie di Fourier.

$$G(j\omega_c) = \frac{Y(0)}{X(0)} = \frac{\int_0^{T_u} y(t) dt}{\int_0^{T_i} x(t) dt} \quad (2.13)$$

2.2 Sistemi del primo ordine

Il sistemi, la cui funzione di trasferimento è del primo ordine con ritardo nel tempo (FOPDT- first-order plus dead time) sono spesso utilizzati per analizzare processi e per studiare il controllo perché i test effettuati su questi sono facilmente generalizzabili a sistemi di ordine superiore.

Esaminiamo un processo la cui funzione di trasferimento sia del tipo:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-Ls} \quad (2.14)$$

oppure descritto da:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t - L) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove per un processo non integrale con $\tau \neq \infty$, si ha:

$$a = -\frac{1}{\tau}, \quad cb = \frac{K}{\tau}, \quad (2.16)$$

mentre per un processo integrale con $\tau = \infty$, la (2.14) diventa $G(s) = \frac{k}{s} e^{-Ls}$ e quindi

$$a = 0. \quad cb = K.$$

Si suppone che il processo sia controllato con un feedback relay come nella relazione (4.4). Posto $r(t) = 0$, il relay è descritto da:

$$u(t) = \begin{cases} \mu_- & \text{se } y(t) > -h_- \text{ o se } y(t) \geq -h_+ \text{ e } u(t_-) = \mu_- \\ \mu_+ & \text{se } y(t) < -h_+ \text{ o se } y(t) \leq -h_- \text{ e } u(t_-) = \mu_+ \end{cases} \quad (2.18)$$

e le condizioni iniziali sono:

$$u(t) = \begin{cases} \mu_- & \text{se } y(0) > -h_-, \\ \mu_+ & \text{se } y(0) < -h_+, \\ u_0 \in U & \text{se } -h_+ \leq y(0) < -h_- \end{cases} \quad (2.19)$$

Il sistema feedback relay risultante è molto semplice e facile da analizzare completamente. Lo studio di questo ha messo in evidenza come il comportamento dipenda dal valore assunto da τ . Si esaminano così tre casi per τ positivo, negativo o nullo.

Presi due piani:

$$\begin{aligned} S_+ &= \{\xi \in \mathfrak{R} : c\xi = -h_-\} \\ S_- &= \{\xi \in \mathfrak{R} : c\xi = -h_+\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.2.1 Caso τ positivo

Prendiamo il caso un cui $a < 0$ e $\tau > 0$ nella relazione (2.15), usando il feedback relay nel processo (2.16) si ha:

- Esiste un'unica soluzione per qualsiasi condizione iniziale se solo se si verifica una di queste condizioni:

a) $L > 0$,

b) $L = 0$ e $-h_+ > \max\{K\mu_-, K\mu_+\}$,

c) $L = 0$ e $-h_- < \min\{K\mu_-, K\mu_+\}$,

d) $L = 0$ e $K\mu_+ \leq -h_-$ e $K\mu_- \geq -h_+$.

- Esiste un ciclo limite se e solo se $L > 0$ e $K\mu_+ > -h_- \geq -h_+ > K\mu_-$, se siamo in questo caso il ciclo limite è unico con due 'switchings' per periodo.
- Se esiste un ciclo limite allora questo è globalmente stabile, inoltre per un dato processo, il ciclo limite è la traiettoria comune dopo il primo switch indipendentemente dalle condizioni iniziali.

2.2.2 Caso τ negativo

Prendiamo il caso un cui $a > 0$ e $\tau < 0$ nella relazione (4.15), usando il feedback relay nel processo (4.16) si ha:

- Esiste un'unica soluzione per qualsiasi condizione iniziale se solo se si verifica una di queste condizioni:

a) $L > 0$,

b) $L=0$ e $-h_+ < \min\{K\mu_-, K\mu_+\}$,

c) $L=0$ e $-h_- > \max\{K\mu_-, K\mu_+\}$,

d) $L=0$ e $K\mu_+ \geq -h_- \geq -h_+ \geq K\mu_-$.

- Esiste un ciclo limite se e solo se $L>0$ e $K\mu_+ < -h_+ \leq -h_- < K\mu_-$ e

$$0 < L < \min\left\{-\tau \ln \frac{K(\mu_+ - \mu_-)}{-h_+ - K\mu_-}, -\tau \ln \frac{K(\mu_- - \mu_+)}{-h_- - K\mu_+}\right\}.$$

se siamo in questo caso il ciclo limite è unico con due 'switchings' per periodo.

- Se esiste un ciclo limite allora questo è localmente stabile, ed è stabile per $K\mu_+ < cx(0) \leq K\mu_-$. Inoltre per un dato processo, dopo il ciclo limite è la traiettoria comune dopo il primo switch indipendentemente dalle condizioni iniziali nell'intervallo di stabilità.

2.2.3 Caso τ nullo

Si prende il caso in cui la funzione di trasferimento con $t=0$ è nella forma

$$G(s) = \frac{k}{s} e^{-Ls}$$

- Esiste un'unica soluzione per qualsiasi condizione iniziale se solo se si verifica una di queste condizioni:

a) $L>0$,

b) $L=0$ e $0 > \max\{k\mu_-, k\mu_+\}$,

c) $L=0$ e $0 < \min\{k\mu_-, k\mu_+\}$,

d) $L=0$ e $k\mu_- \geq 0 \geq k\mu_+$.

- Esiste un ciclo limite se e solo se $L > 0$ e $k\mu_+ > 0 > k\mu_-$ e $0 < L < \min\left\{-\tau \ln \frac{K(\mu_+ - \mu_-)}{-h_+ - K\mu_-}, -\tau \ln \frac{K(\mu_- - \mu_+)}{-h_- - K\mu_+}\right\}$.

se siamo in questo caso il ciclo limite è unico con due ‘switchings’ per periodo.

- Se esiste un ciclo limite allora questo globalmente stabile, inoltre per un dato processo, il ciclo limite è la traiettoria comune dopo il primo switch indipendentemente dalle condizioni iniziali.⁴

2.3 RELAY AD ISTERESI VARIABILE

La tecnica del feedback a isteresi variabile permette di identificare più punti della risposta armonica con una sola simulazione. Questa tecnica viene realizzata utilizzando più di un relay con isteresi per diversi cicli. La ricostruzione della risposta armonica si basa sull'approssimazione del segnale in uscita al blocco relay come somma infinita di segnali sinusoidali. Identificando le frequenze fondamentali che danno vita al segnale, lo si può ricostruire con buona approssimazione.

Il sistema con feedback relay a isteresi variabile è quello rappresentato in figura 2.5.

⁴ La dimostrazione di questi teoremi è reperibile in [1]

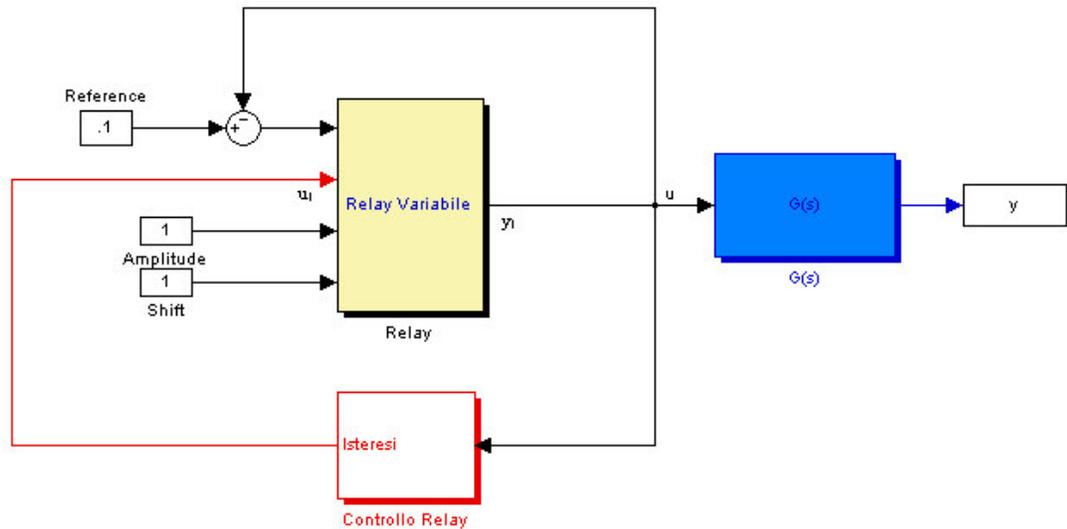


Figura 2.5 Sistema con feedback relay ad isteresi variabile

Il relay può avere un comportamento attivo o passivo, le uscite nei rispettivi casi sono espresse dalle relazioni che seguono:

- caso passivo
$$y_1(k) = \begin{cases} -A & \text{se } u_1 < -\text{hyst} \\ y_1(k-1) & \text{se } -\text{hyst} < u_1 < \text{hyst} \\ A & \text{se } u_1 > \text{hyst} \end{cases} \quad (2.21)$$

- caso attivo
$$y_1(k) = \begin{cases} -A & \text{se } u_1 < -\text{hyst} \\ +A & \text{se } -\text{hyst} < u_1 < \text{hyst} \text{ e } u_1(k-1) < -\text{hyst} \\ -A & \text{se } -\text{hyst} < u_1 < \text{hyst} \text{ e } u_1(k-1) > \text{hyst} \\ y_1(k-1) & \text{se } -\text{hyst} < u_1 < \text{hyst} \\ A & \text{se } u_1 > \text{hyst} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$B_{ik} = -\frac{A_i}{\pi k} [-\cos(k\Omega t_i) + \cos(k\Omega t_{i-1})] \quad (2.25)$$

$$\text{con } A_i = \begin{cases} A & \text{se } i \text{ è dispari,} \\ -A & \text{se } i \text{ è pari} \end{cases} \quad (2.26)$$

A è l'ampiezza del segnale u(t), t_i sono gli istanti di tempo in cui il segnale si annulla,

$$\Omega = \frac{2\pi}{T},$$

T periodo del segnale.

Quindi riscrivendo la relazione (2.3) come:

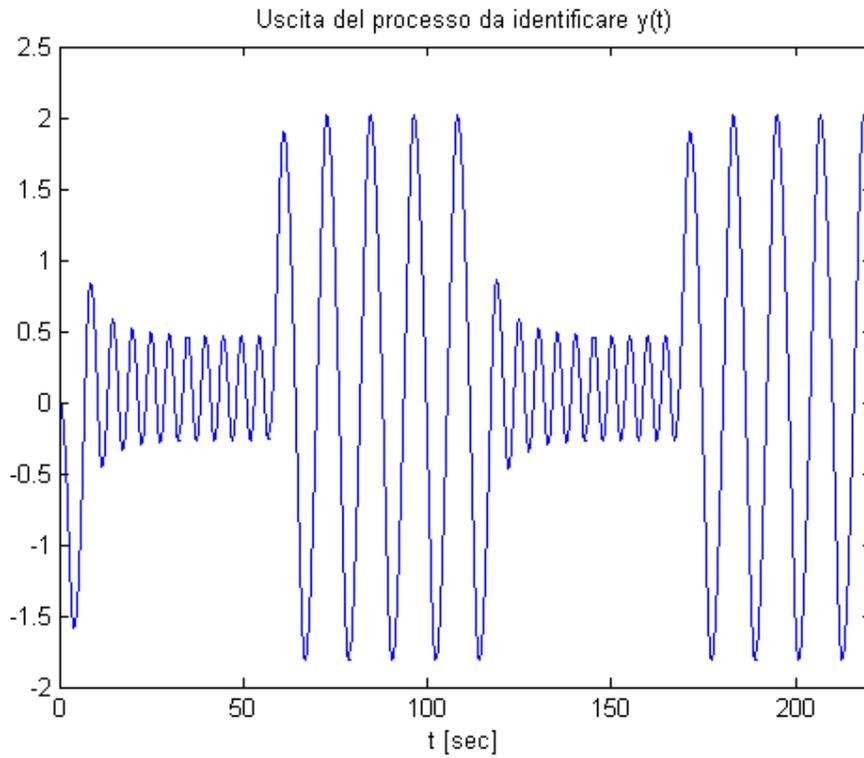
$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_k \cos(k\Omega t) + g_k \sin(k\Omega t)] + \frac{A}{T} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) - \frac{A}{T} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \quad (2.27)$$

si può facilmente ricavare il valore medio, la parte reale e immaginaria del segnale come:

$$U(0) = \frac{A}{T} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) - \frac{A}{T} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} R_k = \frac{f_k}{2} \\ I_k = \frac{-g_k}{2} \end{cases} \quad (2.29)$$

Il segnale in uscita al processo $G(s)$, visibile in figura 6, viene calcolato utilizzando la Fast Fourier Transform.



$$Y(j\omega_n) = FFT(y_k) \quad (2.30)$$

In questo modo il sistema da identificare è sollecitato a frequenze multiple della frequenza fondamentale, quindi il modulo della funzione di trasferimento del sistema da identificare può essere calcolato come:

$$|G(j\omega_i)| = \frac{|Y(j\omega_i)|}{|U(j\omega_i)|} \quad \text{per } i=1,2,\dots \quad (2.31)$$

$$\text{dove } \omega_i = \frac{2\pi}{T} \cdot i \quad \text{per } i=1,2,\dots \quad (2.32)$$

Prendendo dalla FFT del segnale di uscita del processo $Y(j\omega_n)$ solo le componenti frequenziali che ci interessano ω_i , la funzione di trasferimento diviene:

$$|G(j\omega_i)| = \frac{|Y(j\omega_i)|}{|R_k + jI_k|} \quad \text{per } i=1,2,\dots \quad (2.33)$$

E' quindi possibile identificare più punti della risposta in frequenza in modo preciso grazie ad un solo test con un carico computazionale modesto (la FFT viene utilizzata una sola volta) e non si deve utilizzare la funzione descrittiva.