Università degli Studi di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea
28 ottobre 2004

Foliazioni semiolomorfe e sottovarietà Levi piatte di una varietà complessa

Candidato
Antonella Perucca

Relatore
Prof. Giuseppe Tomassini

Anno Accademico 2003/2004

Introduzione

Lo scopo di questo lavoro di tesi è presentare e discutere alcuni risultati, esempi e problematiche riguardanti le foliazioni semiolomorfe.
Le *foliazioni semiolomorfe* sono particolari sottoatlanti di una foliazione reale tali che le carte inducano coordinate complesse sulle foglie.
Dette $(y_1, \ldots, y_k)$ la coordinata trasversa e $(x_1, \ldots, x_{2n})$ la coordinata lungo la placca di una carta fogliata, consideriamo le coordinate complesse

$$(z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + ix_{n+1}, \ldots, x_n + ix_{2n}) .$$

Si richiede che i cambiamenti di coordinate siano della forma

$$\begin{cases} z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, y_\beta) \\ y_\alpha = h_{\alpha\beta}(y_\beta) \end{cases}$$

dove la funzione $f_{\alpha\beta}$ è olomorfa rispetto a z_β.
La definizione in questa forma esplicita si trova per la prima volta in [R].
Non sempre esistono foliazioni semiolomorfe e questo problema si collega all'esistenza di strutture complesse su varietà di dimensione pari e orientabili.
È noto che su S^3 e su S^5 (cfr. [MV]) esistono foliazioni semiolomorfe non banali e sarebbe da indagare cosa succede per le altre sfere e per le varietà reali più note.
Il caso più studiato è quello di foliazioni semiolomorfe su una sottovarietà reale M di una varietà complessa N tali che le foglie abbiano la struttura complessa indotta da N: queste foliazioni, nel caso di regolarità $\mathcal{C}^1$, corrispondono alle *foliazioni complesse* su M cioè le foliazioni reali su M in cui le placche sono sottovarietà complesse di N.
Una foliazione complessa di notevole importanza è la foliazione di Levi che, nel caso in cui la sottovarietà M sia Levi piatta, ha come tangente il tangente olomorfo di M.
Lo studio della foliazione di Levi su M, nel caso in cui M sia Levi piatta e compatta, permette di ricavare informazioni su N. I risultati di [MR] che presentiamo mettono in relazione l'esistenza di funzioni olomorfe non costanti su un intorno dell'ipersuperficie e la compattezza delle foglie della foliazione

di Levi.
Rimanendo nell'ambito della teoria delle funzioni, le ipersuperfici Levi piatte di $\mathbb{C}^n$ (o di una varietà di Stein) appaiono come inviluppi di olomorfia di sottovarietà reali compatte. Questo dà luogo al problema dell'esistenza di ipersuperficie Levi piatte di $\mathbb{C}^n$ con bordo assegnato, problema che ha avuto sviluppi interessanti principalmente nel caso di $\mathbb{C}^2$.
Negli ultimi anni si è inoltre accentuato l'interesse per l'esistenza e lo studio delle ipersuperfici Levi piatte compatte contenute in varietà complesse.
Descriviamo il contenuto dei vari capitoli.

1-2. Si richiamano le definizioni e le proprietà principali delle foliazioni reali, rinviando ai testi di riferimento [CC1], [Ta], [CL].
Viene introdotta la nozione fondamentale di olonomia di una foglia e la nozione di componente di Reeb.

3. Si definiscono le foliazioni semiolomorfe e le foliazioni complesse e se ne discutono alcune proprietà generali. Si dimostrano anche le seguenti caratterizzazioni, che riportiamo nel caso regolare.
L'esistenza di una foliazione semiolomorfa di classe $\mathcal{C}^\infty$ corrisponde all'esistenza di una struttura complessa in ogni punto e di campi vettoriali locali di classe $\mathcal{C}^\infty$, tra loro a bracket nullo, tali che in ogni punto costituiscano una base del tangente in cui la struttura complessa è in forma canonica di Jordan.
Una foliazione complessa di classe $\mathcal{C}^\infty$ si ottiene integrando una distribuzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ chiusa rispetto alla struttura complessa della varietà complessa ambiente.
Una foliazione semiolomorfa $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ su una sottovarietà reale di una varietà complessa X induce una restrizione della struttura complessa di X se e solo se $\mathcal{F}$ è contenuta in una foliazione complessa.
Si riportano infine alcuni risultati di Bedford e Kalka ([BeK]).

4. Si forniscono esempi di foliazioni semiolomorfe e di foliazioni complesse.
Il primo esempio è quello di foliazioni olomorfe, in cui anche la coordinata trasversa si descrive tramite coordinate complesse. Tramite esempi si mostra che vi possono essere foliazioni complesse con tangente non contenuto nella distribuzione di Levi e che vi possono essere foliazioni complesse anche se la dimensione dello spazio nullo della forma di Levi non è costante.
L'ultimo esempio spiega come, in una foliazione reale di dimensione 2, esista sempre un sottoatlante semiolomorfo.

5. Si definisce la foliazione di Levi e ne vengono discusse alcune proprietà.
Le sottovarietà Levi piatte corrispondono alle sottovarietà CR di classe

$\mathcal{C}^2$ che ammettono una foliazione complessa di dimensione uguale alla loro dimensione CR.
Si forniscono esempi di foliazioni di Levi, tra cui l'esempio di Grauert. Accenniamo al problema della classificazione di ipersuperfici Levi piatte compatte: in $\mathbb{C}^n$ le uniche sottovarietà Levi piatte compatte sono totalmente reali cioè hanno tangente olomorfo di dimensione zero; negli spazi proiettivi di dimensione almeno 3 si vi è un risultato di Siu (cfr. [Si]) che afferma che non esistono ipersuperfici Levi piatte di una certa regolarità e si congettura che negli spazi proiettivi le sottovarietà Levi piatte siano totalmente reali; nei tori complessi vi sono ipersuperficie Levi piatte non totalmente reali ed è recente la classificazione di Ohsawa per i 2-tori complessi ([O2]) ma rimane aperto il problema della classificazione in dimensione maggiore di 2.

6. Questo capitolo è interamente dedicato al problema dell'esistenza di ipersuperficie Levi piatte di $\mathbb{C}^2$ con bordo assegnato. Dopo averne messo in evidenza le motivazioni in relazione al problema classico dell'esistenza dell'inviluppo d'olomorfia, vengono discussi i risultati di Bedford e Gaveau (cfr. [BeG]), di Shcherbina (cfr. [Sh]) e di Chirka e Shcherbina (cfr. [CS]). I risultati di quest'ultimo lavoro si fondano sulla costruzione di un modello geometrico per un dominio di $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, di cui viene fornita una una descrizione dettagliata. Del modello viene inoltre proposta una generalizzazione valida per gli aperti di una qualunque ipersuperficie Levi piatta di $\mathbb{C}^n$. Lo studio di questo modello potrebbe servire per trovare condizioni sufficienti affinché un dominio limitato di un'ipersuperficie Levi piatta M di $\mathbb{C}^n$ sia intersezione di M e di un aperto limitato e strettamente pseudoconvesso di $\mathbb{C}^n$.
   Si deduce poi il seguente risultato. Sia M un sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$ (di coordinate $(z, w) = (x+iy, u+iv)$) descritto da un'equazione $v = f(z, u)$ e sia f di classe $\mathcal{C}^\infty$ limitata superiormente oppure inferiormente. Se M ammette una foliazione complessa di dimensione 1 allora $f(z, u)$ non dipende da z.
   Infine, dopo aver accennato all'esistenza nel caso di un grafico illimitato, si forniscono vari esempi.

7. Si espone un risultato di estensione per la foliazione di Levi, dovuto a Rea: nel caso di regolarità analitica reale, la foliazioni di Levi su un'ipersuperficie reale Levi piatta si estende ad una foliazione olomorfa definita su un intorno. Questo non è vero nel caso di regolarità $\mathcal{C}^\infty$.
   In questo capitolo si discutono i risultati di Milani e Rea ([MR]) che caratterizzano l'esistenza di funzioni olomorfe non costanti su un in-

torno di un'ipersuperficie reale con la compattezza delle foglie della foliazione di Levi.
Si enuncia un risultato di Barrett per ipersuperfici $\mathcal{C}^\infty$ Levi piatte, compatte e orientabili di una 2-varietà complessa: queste ipersuperfici hanno gruppo fondamentale infinito e, se non sono diffeomorfe ad $S^2 \times S^1$, hanno π_2 banale. Ad esso si premette un risultato sull'olonomia di foglie toroidali.
Nella parte finale del capitolo si studiano le foliazioni semiolomorfe come spazi anellati. Si considerano i fasci delle funzioni che, ristrette alle foglie, siano plurisubarmoniche o q-pseudoconvesse od olomorfe e vengono infine riportati due risultati su omologia e coomologia ([GT]).

Restano molti problemi aperti nel campo delle foliazioni semiolomorfe e delle sottovarietà Levi piatte.
Affrontare il problema di grafici Levi piatti in $\mathbb{C}^n$ o i risultati di tipo topologico in dimensione maggiore di 2 non è banale infatti nelle dimostrazioni vengono utilizzati risultati specifici della dimensione 2.
Per analoghi motivi è difficile generalizzare a sottovarietà Levi piatte il risultato di estensione di Rea oppure il risultato geometrico-funzionale di Milani e Rea che si hanno per le ipersuperfici.
Una prospettiva di ricerca è continuare a studiare le foliazione semiolomorfe anche nel caso non immerso ed indagare l'esistenza di tali foliazioni sulle varietà reali più note.

Ringrazio il mio relatore, il professor Marco Abate, il professor Riccardo Benedetti, il professor Takashi Inaba, il professor Harold Rosenberg ed il dottor Alberto Saracco.
Ringrazio la mia famiglia, TUTTI i miei amici e coloro che mi hanno aiutato in questi anni a Pisa.
Devo anche da anni sentiti ringraziamenti a Chiara, a cui molte volte ho chiesto consigli e che mi ha, con molta pazienza, 'tutorato'.
Un ringraziamento speciale va a Gianluca.

Indice

Parte I

Foliazioni reali

Capitolo 1

Foliazioni reali

1.1 Prime definizioni

Carte fogliate

Sia $(M, \mathcal{V})$ una varietà reale di classe $\mathcal{C}^h$ $(h \geq 0)$, senza bordo e di dimensione n. Sia $\mathcal{V}$ una struttura differenziabile su M di classe $\mathcal{C}^h$, cioè l'atlante $\mathcal{V}$ è di classe $\mathcal{C}^h$ e non è strettamente contenuto in alcun atlante su M di classe $\mathcal{C}^h$.

Definizione 1.1 (carta fogliata) *Si dice carta fogliata su M di dimensione $(n-q)$ e di codimensione q una carta (U, ϕ) di $\mathcal{V}$ per cui ci siano due prodotti di intervalli B_τ e B_σ tali che*

$$B_\tau \subseteq \mathbb{R}^{n-q},\ B_\sigma \subseteq \mathbb{R}^q, \quad \phi(U) = B_\tau \times B_\sigma.$$

Dato che $\phi(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, gli insiemi B_τ e B_σ sono aperti rispettivamente in $\mathbb{R}^{n-q}$ e in $\mathbb{R}^q$ e sono prodotti di intervalli aperti.

Definizione 1.2 (placca) *Si dice placca per la carta fogliata (U, ϕ) un insieme della forma $P_y = \phi^{-1}(B_\tau \times \{y\})$.*

Definizione 1.3 *Si dice insieme trasversale per la carta fogliata (U, ϕ) un insieme della forma $S_x = \phi^{-1}(\{x\} \times B_\sigma)$.*

Definizione 1.4 *Le coordinate di un punto $(x, y) \in B_\tau \times B_\sigma$ si dicono rispettivamente coordinata sulla placca e coordinata trasversa.*

Le placche sono sottoinsiemi di M connessi per archi e sono sottovarietà di M.

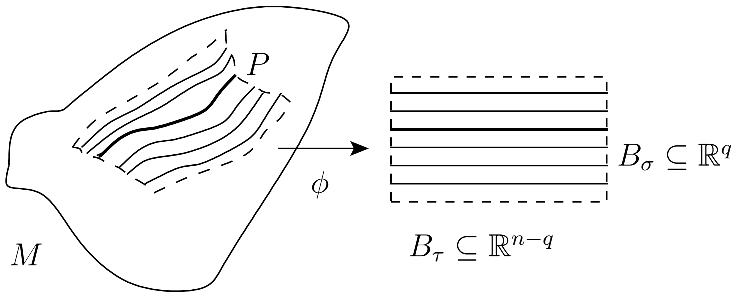


Figura 1.1: Una carta fogliata di codimensione q, in evidenza una placca P.

Atlanti fogliati

Definizione 1.5 (carte coerentemente fogliate) *Due carte fogliate o due loro restrizioni (U_1, ϕ_1), (U_2, ϕ_2) si dicono coerentemente fogliate se per ogni p in $U_1 \cap U_2$ esiste un intorno aperto W tale che il cambio della coordinata trasversa su W è una funzione che non dipende dalla coordinata sulla placca:*

$$\forall(\alpha, \beta) \in \{(1,2),(2,1)\}\ , \quad \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\beta(W)} : (x_\beta, y_\beta) \mapsto (x_\alpha, y_\alpha)$$

$$\begin{cases} x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta, y_\beta) \\ y_\alpha = h_{\alpha\beta}(y_\beta) \end{cases}$$

Due carte fogliate o due loro restrizioni con intersezione dei domini vuota sono coerentemente fogliate.
Nella definizione 1.5 si richiede che il cambio della coordinata trasversa sia localmente indipendente dalla coordinata lungo la placca in entrambi i versi: questo implica che due carte coerentemente fogliate con intersezione dei domini non vuota abbiano la stessa codimensione. Inoltre, con le notazioni della definizione 1.5, l'intersezione con W di una placca per (U_β, ϕ_β) è contenuta in un'unica placca per (U_α, ϕ_α).
La relazione 'essere coerentemente fogliate' è riflessiva, simmetrica e, ristretta a carte con uno stesso dominio, transitiva.
In generale non è vero che il cambio di coordinate assume globalmente la forma richiesta o che l'intersezione con U_α di una placca per (U_β, ϕ_β) sia contenuta in un'unica placca per (U_α, ϕ_α), come si vede nella figura 1.2.

Proposizione 1.6 *Data una carta fogliata (U, ϕ) e fissato un aperto $V \subseteq U$ e un punto $p \in V$, esiste una carta fogliata $(U', \phi|_{U'})$, restrizione di (U, ϕ), con $U' \subseteq V$ e tale che $(U', \phi|_{U'})$ sia centrata in p.*

La proposizione 1.6 segue immediatamente dal fatto che i prodotti di intervalli aperti sono una base per la topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$. Vale anche la seguente proposizione (cfr. [Ta], lemma 4.4).

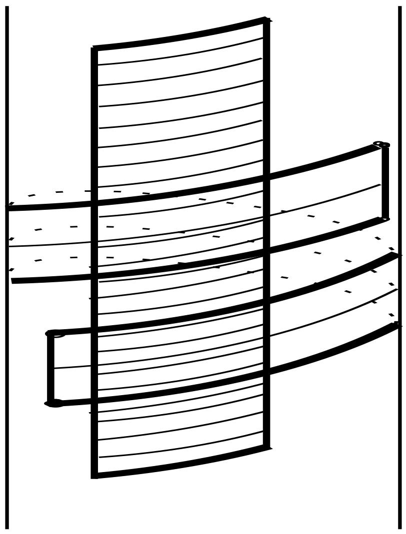


Figura 1.2: Due carte coerentemente fogliate sul cilindro.

Proposizione 1.7 *Date due carte coerentemente fogliate* (U_α, ϕ_α) *e* (U_β, ϕ_β) *con* $U_\alpha \subseteq U_\beta$ *e una placca* P *per* (U_α, ϕ_α)*, esiste una carta fogliata* $(U_{\alpha'}, \phi_{\alpha'})$*, restrizione di* (U_α, ϕ_α)*, per cui* P *è una placca e l'intersezione di una placca per* (U_β, ϕ_β) *con* $U_{\alpha'}$ *è vuota oppure è una placca per* $(U_{\alpha'}, \phi_{\alpha'})$*.*

Definizione 1.8 (atlante fogliato) *Si dice atlante fogliato su* M *un atlante costituito da carte fogliate su* M*, della stessa dimensione e a due a due coerentemente fogliate.*

Definizione 1.9 (atlante fogliato massimale) *Un atlante fogliato le cui carte non siano tutte contenute in un altro atlante fogliato si dice atlante fogliato massimale.*

Diremo placca di un atlante fogliato ogni placca di una sua carta.

Definizione 1.10 (cammino di placche) *Sia* $\mathcal{A}$ *un atlante fogliato su* M*. Si dice cammino di placche rispetto ad* $\mathcal{A}$ *tra due punti* $x \in M$ *e* $y \in M$ *un insieme finito di placche per* $\mathcal{A}$*, che indicheremo con* $\{P_i\}_{i=1}^h$*, tale che*

$$x \in P_0 \quad y \in P_h \qquad \forall i = 0 \dots h-1 \quad P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset\,.$$

Definizione 1.11 (foglia) *Sia* $\mathcal{A}$ *un atlante fogliato su* M*. Si dice foglia di* $\mathcal{A}$ *una classe di equivalenza di punti di* M *per la seguente relazione:* $x \sim y$ *se e solo se tra* x *e* y *esiste un cammino di placche rispetto ad* $\mathcal{A}$*.*

Definizione 1.12 (foliazione reale) *Una foliazione reale su M è un atlante fogliato massimale $\mathcal{F}$ su M.*

Definizione 1.13 *Sia $\mathcal{F}$ un atlante fogliato massimale su M. L'insieme delle foglie di $\mathcal{F}$ si dice la foliazione reale su M associata all'atlante $\mathcal{F}$.*

A pagina 17 dimostreremo l'equivalenza delle definizioni 1.12 e 1.13. Adotteremo la definizione 1.12 e in seguito useremo il termine foliazione per indicare una foliazione reale. Osserviamo che la definizione 1.11 e quindi la definizione 1.13 si possono dare anche per sottoatlanti di atlanti fogliati massimali ma in ogni caso la foliazione è la stessa dell'atlante fogliato massimale perchè è uguale la relazione di equivalenza dei cammini di placche (si procede come nella dimostrazione della prop. 1.23).

Definizione 1.14 *La dimensione e la codimensione di una foliazione $\mathcal{F}$ sono rispettivamente la dimensione e la codimensione delle carte di $\mathcal{F}$.*

Le foliazioni di M di codimensione n oppure 0 sono banali: le foglie sono rispettivamente i punti di M e le componenti connesse di M.

Definizione 1.15 (varietà fogliata) *Una varietà reale M su cui è data una foliazione $\mathcal{F}$ si dice una varietà fogliata e si indica con $(M, \mathcal{F})$.*

Consideriamo una varietà reale M di classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$), senza bordo, di dimensione n ed una foliazione $\mathcal{F}$. Valgono allora le seguenti affermazioni: le foglie sono disgiunte e la loro unione è M; ogni foglia è unione di placche per $\mathcal{F}$ ed è un sottoinsieme di M connesso per archi; ogni foglia interseca il dominio di una carta di $\mathcal{F}$ in un'unione di placche per tale carta.
Osserviamo che potremmo studiare solo foliazioni su varietà connesse poiché dare una foliazione equivale a dare foliazioni della stessa codimensione su ciascuna componente connessa. Non sarebbe restrittivo considerare solo carte fogliate che hanno come immagine uno stesso prodotto di n intervalli aperti poiché da queste si ottengono tutte le altre carte fogliate, componendo con opportuni omeomorfismi.

Definizione 1.16 *Due foliazioni $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ sulla varietà M si dicono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo di M in sé che applica bigettivamente ciascuna foglia di $\mathcal{F}$ su una foglia di $\mathcal{F}'$. Due foliazioni su M $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ si dicono localmente equivalenti sulle rispettive foglie L e L' se esiste un omeomorfismo tra due intorni di esse che manda foglie in foglie e cosí il suo inverso.*

Definizione 1.17 *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M. Si dice restrizione di una foliazione $\mathcal{F}$ a un sottoinsieme X di M la foliazione su X che ha come foglie le componenti connesse dell'intersezione di X con le foglie di $\mathcal{F}$.*

La restrizione di $\mathcal{F}$ esiste per gli aperti ma in generale non esiste per ogni sottoinsieme di M.

Proposizione 1.18 *Se due foliazioni coincidono ristrette agli aperti di un ricoprimento, allora sono uguali.*

La proposizione precedente segue immediatamente dal fatto che le due foliazioni avrebbero un sottoatlante comune.

Foliazioni reali su una varietà con bordo

Si considerano anche foliazioni $\mathcal{F}$ su varietà reali con bordo. Le definizioni sono analoghe, in questo caso però l'immagine di una carta fogliata è del tipo $B_\tau \times B_\sigma$, con B_τ il prodotto di $n-q$ intervalli nel semispazio $\mathbb{H}^{n-q}$ e B_σ il prodotto di q intervalli nel semispazio $\mathbb{H}^q$.
La parte del bordo bM che, tramite le carte, è localmente del tipo $bU = \phi^{-1}(B_\tau \times bB_\sigma)$ si dice bordo tangenziale, la parte di bordo che localmente assume la forma $bU = \phi^{-1}(bB_\tau \times B_\sigma)$ si dice bordo trasverso, inoltre ciascuna componente connessa N di bM è bordo tangenziale oppure è bordo trasversale.
Se una componente connessa N di bM è contenuta nel bordo tangenziale, si dice che $\mathcal{F}$ è tangente ad N. In questo caso vale che, per ogni foglia L, $N \cap L = \emptyset$ oppure $N \cap L = L$ ed in particolare N è unione di foglie di M. La restrizione della foliazione al sottoinsieme N è una foliazione su N di codimensione $q-1$.
Nel caso in cui una componente connessa N di bM sia contenuta nel bordo trasverso, si dice che $\mathcal{F}$ è trasversa ad N. In tal caso vale che l'intersezione di una foglia L con N è contenuta nel bordo bL e la restrizione della foliazione ad N è una foliazione di codimensione q (si veda [CC1], es. 1.2.21). Se M è di classe $\mathcal{C}^1$ (vedi definizione 1.26), per ogni foglia L di $\mathcal{F}$ vale inoltre

$$\forall x \in N \cap L \quad T_x(L) + T_x(N) = T_x(M)\,.$$

Una foglia non può intersecare sia il bordo trasversale che il bordo tangenziale, altrimenti con un cammino finito di placche si troverebbe una carta fogliata in cui compare sia il bordo tangenziale che quello trasversale. Intersecando le foglie con la parte interna di M, si ottiene una foliazione.

1.2 Proprietà delle foglie

Atlanti regolari

Sarà utile, per descrivere le caratteristiche topologiche di placche e foglie, utilizzare sottoatlanti di un atlante massimale fogliato che abbiano ulteriori proprietà. Introduciamo quindi gli atlanti regolari.

Definizione 1.19 (atlante regolare) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M. Un sottoatlante $\mathcal{B} = \{(U_\beta, \phi_\beta)\}_{\beta \in B}$ di $\mathcal{F}$ si dice regolare se ha le seguenti proprietà:*

(i) per ogni $\beta \in B$, $\overline{U}_\beta$ è un compatto di M e (U_β, ϕ_β) è restrizione di una carta di $\mathcal{F}$ il cui dominio contenga $\overline{U}_\beta$;

(ii) il ricoprimento $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ è localmente finito;

(iii) se (U_γ, ϕ_γ) e (U_β, ϕ_β) sono carte dell'atlante, ogni placca per (U_γ, ϕ_γ) incontra al più una placca per (U_β, ϕ_β);

(iv) ogni placca incontra al più un numero finito di placche.

Proposizione 1.20 *Ogni atlante fogliato ha un raffinamento che è un atlante fogliato regolare composto da una quantità numerabile di carte. In particolare ogni atlante fogliato massimale ha un sottoatlante regolare composto da una quantità numerabile di carte.*

Per la dimostrazione della proposizione 1.20 si rimanda a [CC1], lemma 1.2.17, osservando che un sottoatlante di un atlante regolare è regolare.
La terza proprietà nella definizione 1.19 implica che, per un atlante regolare, il cambio di coordinata per la coordinata trasversa è indipendente dalla coordinata lungo la placca su tutto il dominio del cambio di coordinate, quindi vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.21 *Ogni atlante fogliato ha un raffinamento costituito da carte fogliate per cui, su tutto il dominio di ciascun cambio di carte, il cambio della coordinata trasversa è indipendente dalla coordinata sulla placca.*

Definizione 1.22 *Sia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlante fogliato in cui il cambio della coordinata trasversa è indipendente dalla coordinata lungo la placca su tutto il dominio del cambio di coordinate. L'insieme dei cambi della sola coordinata trasversa $\{\gamma_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ si chiama il cociclo di olonomia dell'atlante.*

Il cociclo di olonomia di un atlante soddisfa le condizioni di cociclo cioè su $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\delta$ si ha

$$\gamma_{\alpha\delta} = \gamma_{\alpha\beta} \circ \gamma_{\beta\delta}; \quad \gamma_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}; \quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}^{-1}.$$

Un atlante regolare ammette sempre un cociclo di olonomia.

La topologia delle foglie

Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M. Descriviamo adesso la topologia delle placche, che è una topologia su una foglia di $\mathcal{F}$ più fine della topologia indotta da M. La topologia delle placche è la topologia su una foglia che ha come base le placche.
Si può inoltre considerare la topologia delle foglie, che è la topologia più fine su M per cui sia continua l' inclusione di ciascuna foglia munita della topologia delle placche.

Proposizione 1.23 *Per ogni foglia esiste un ricoprimento finito o numerabile costituito da placche della foliazione.*

Le placche di un sottoatlante regolare $\mathcal{B}$ sono placche per $\mathcal{F}$ e i cammini di placche di $\mathcal{B}$ che partono da un punto fissato coinvolgono solo una quantità numerabile di placche. Per dimostrare la proposizione sarà sufficiente verificare che due punti di una foglia sono congiunti mediante un cammino di placche per $\mathcal{B}$.

Definizione 1.24 (topologia delle placche) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M. Si chiama topologia delle placche la topologia sulla foglia per cui gli aperti contenuti in una placca per $\mathcal{F}$ sono quelli della topologia indotta da M.*

Definizione 1.25 (topologia delle foglie) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M. Si dice topologia delle foglie la topologia su M in cui le foglie sono aperti e gli aperti contenuti in una foglia coincidono con quelli della topologia delle placche sulla foglia.*

La topologia delle placche è più fine della topologia indotta da M sulla foglia quindi rende la foglia uno spazio topologico di Hausdorff, inoltre è a base numerabile, proprietà che segue dalla proposizione 1.23 e dalla definizione 1.24.
Dal fatto che la topologia delle placche è a base numerabile segue che al più una quantità numerabile di placche per una carta fogliata è contenuta nella stessa foglia.
Valgono inoltre i seguenti fatti: le placche per la foliazione contenute in una foglia sono aperti connessi per archi per la topologia delle placche; una foglia è un connesso per archi anche nella topologia delle placche; ogni punto, nella topologia delle placche, ha un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{n-q}$ munito della topologia euclidea. L'intersezione di una foglia con il dominio di una carta fogliata ha come componenti connesse, nella topologia della placche, le placche di tale carta.

Considerando il dominio di una carta fogliata con la restrizione della topologia delle foglie, la carta fogliata è un omeomorfismo con l'immagine munita della topologia prodotto della topologia euclidea sul primo fattore e della topologia discreta sul secondo fattore.
Le foglie sono le componenti connesse di M per la topologia delle foglie e per un cammino $\gamma : [0,1] \rightarrow M$ contenuto in una foglia è equivalente essere continuo per la topologia di M o per la topologia delle foglie o per la topologia delle placche su tale foglia.

Regolarità di una foliazione, spazio delle foglie

Definiamo in questo paragrafo le foliazioni di classe $\mathcal{C}^s$ (con $s \geq 0$) cioè le foliazioni che hanno un sottoatlante di classe $\mathcal{C}^s$. Le foglie di tali foliazioni sono varietà di classe $\mathcal{C}^s$.
In questo paragrafo discuteremo inoltre alcune proprietà dell'insieme delle foglie, da una parte con l'introduzione dello spazio delle foglie, dall'altra dimostrando che due foliazioni sono uguali se e solo se hanno le stesse foglie.

Definizione 1.26 (foliazione di classe $\mathcal{C}^s$) *Sia M una varietà reale M senza bordo, di dimensione n con struttura differenziabile $\mathcal{V}$ di classe $\mathcal{C}^h$ con $h \geq 0$ e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M. Tale foliazione si dice di classe $\mathcal{C}^s$ se esiste un sottoatlante di $\mathcal{F}$ per cui i cambi di carta sono funzioni di classe $\mathcal{C}^s$.*

Definizione 1.27 *Una foliazione $\mathcal{F}$ si dice analitica oppure analitica reale se esiste un sottoatlante di $\mathcal{F}$ per cui i cambi di carta siano funzioni analitiche.*

Nella definizione 1.26 si ha $s \geq h$ poichè $\mathcal{F}$ è un sottoatlante di $\mathcal{V}$. Se $(M, \mathcal{V})$ è di classe $\mathcal{C}^h$ con $h \geq 1$, esiste un sottoatlante di $\mathcal{V}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ (cfr. [H], teo. 2.2.9) ma a priori potrebbe non esistere un sottoatlante di $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Se esiste un sottoatlante di $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^s$ ($0 \leq h \leq s$) allora le restrizioni delle sue carte alle placche di una foglia costituiscono un atlante di classe $\mathcal{C}^s$ su tale foglia, inoltre la topologia delle placche è a base numerabile e rende la foglia uno spazio di Hausdorff connesso. Ciascuna foglia, munita della topologia delle placche, ha quindi una struttura di varietà reale connessa di classe $\mathcal{C}^s$ e l'inclusione di una foglia in M è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^s$. Se la foliazione $\mathcal{F}$ è di classe $\mathcal{C}^s$ ($s \geq 1$) e K è un compatto contenuto in una foglia L allora esiste un intorno aperto di K in M che si retrae con una retrazione di classe $\mathcal{C}^s$ su un intorno aperto di K in L di modo che le retroimmagini di un punto siano sezioni trasverse (cfr. [CL], lemma 2 p.66).

Per il principio di continuazione analitica e per la prop 1.18 vale la seguente proposizione.

Proposizione 1.28 *Due foliazioni analitiche reali su una varietà connessa le cui restrizioni a un aperto non vuoto di essa siano la stessa foliazione sono uguali.*

Enunciamo adesso un teorema classico che riguarda foliazioni analitiche.

Teorema 1.29 (Haefliger, [CL], p.129) *Una varietà analitica reale compatta con gruppo fondamentale finito non ammette foliazioni analitiche di codimensione* 1.

La varietà S^3 soddisfa le ipotesi del teorema quindi non ammette foliazioni analitiche di codimensione 1.

Definizione 1.30 (spazio delle foglie) *Sia* $(M, \mathcal{F})$ *una varietà fogliata. Il quoziente di* M *rispetto alla relazione di equivalenza della definizione 1.11 dei cammini di placche per* $\mathcal{F}$*, munito della topologia quoziente, si dice spazio delle foglie.*

La proiezione al quoziente, che indicheremo con Π, è una mappa aperta, suriettiva e continua sullo spazio delle foglie. In generale Π non è chiusa (ad esempio nel caso in cui una foglia non è un chiuso di M) e lo spazio delle foglie può non essere di Hausdorff (cfr. [CL], cap.3, par.1). Si veda anche la proposizione 7.12.

Dimostriamo adesso una proposizione che garantisce l'equivalenza delle definizioni 1.12 e 1.13: da questo segue che l'insieme delle foglie determina la foliazione.

Proposizione 1.31 *Un atlante fogliato massimale (def.1.12) definisce un unico insieme di foglie (def.1.13). Viceversa un insieme di foglie (def.1.13) ha un unico atlante fogliato che lo determina (def.1.12).*

Dim. La prima parte segue dalla definizione. Per la seconda parte basta dimostrare che è un atlante fogliato l'unione di due atlanti $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ che abbiano lo stesso insieme delle foglie $\mathcal{F}$. Date (U, ψ) e (V, ψ) carte di $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$, l'unico caso non banale è quello in cui

$$U \cap V \neq \emptyset \quad (U, \phi) \in \mathcal{F} \quad (V, \psi) \in \mathcal{F}' .$$

Sia p un punto in $U \cap V$. Per la proposizione 1.6 esiste un aperto $V' \subseteq U \cap V$ tale che $V' \ni p$ e la carta $(V', \psi|_{V'})$ è fogliata. Le placche per $(V', \psi|_{V'})$ sono connesse e contenute in U quindi ciascuna è contenuta in una componente connessa dell'intersezione della sua foglia con U (una placca per (U, ϕ)): il cambio della coordinata trasversa da (V, ψ) a (U, ϕ) è indipendente su V' dalla coordinata lungo la placca. Restringendo analogamente la carta (U, ϕ) ad un intorno U' di p contenuto in $U \cap V$ si ha che il cambio della coordinata trasversa su U' è indipendente dalla coordinata lungo la placca nell'altro verso. Sull'intersezione $U' \cap V'$, che è un intorno di p, il cambio della coordinata trasversa non dipende dalla coordinata lungo la placca in entrambi i versi quindi, al variare di p in $U \cap V$, le carte risultano coerentemente fogliate. $\square$

1.3 Tangente, sezioni trasverse, classificazione delle foglie

Il tangente di una foliazione

Definizione 1.32 *Sia M una varietà reale n-dimensionale di classe $\mathcal{C}^1$. Un campo di k-piani $\mathbb{D}$ su M di classe $\mathcal{C}^s$ è un sottoinsieme del fibrato tangente TM tale che, per ogni $p \in M$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{D}_p = k$ ed esista U intorno aperto di p, esistano $X_1, \ldots, X_k$ campi vettoriali su U di classe $\mathcal{C}^s$ (che vengono detti una base locale in p) tali che*

$$\forall q \in U \quad \langle X_1(q), \ldots, X_k(q) \rangle = \mathbb{D}_q \,.$$

Un campo di k-piani si dice orientabile se esiste un atlante per cui, sui domini delle carte, sono definite delle basi locali che cambino in ogni punto con una matrice a determinante positivo.

Definizione 1.33 *Un campo di k-piani $\mathbb{D}$ di classe $\mathcal{C}^s$ $(s \geq 1)$ su una varietà M si dice involutivo se, per ogni coppia (X, Y) di campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^1$ che siano in ogni punto contenuti in $\mathbb{D}$, il prodotto di Lie $[X, Y]$ è contenuto in $\mathbb{D}$.*

Definizione 1.34 (tangente) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di classe $\mathcal{C}^1$ e dimensione k sulla varietà M. Il tangente alla foliazione, che indichiamo con $T(\mathcal{F})$, è il campo continuo di k-piani su M costituito dai vettori tangenti ad una placca di $\mathcal{F}$.*

Poiché una placca è un aperto della foglia che la contiene, nella definizione di tangente si poteva sostituire 'placca' con 'foglia' e si poteva definire il tangente alla foliazione come il sottofibrato $T\mathcal{F}$ di TM tale che

$$\forall p \in M \quad T_p\mathcal{F} = i_*(T_pL)\,,$$

dove L è la foglia che contiene p e i è l'inclusione di L in M. Se non esistono campi continui di k-piani su M allora non esistono su M foliazioni di dimensione k. Se $\mathcal{F}$ è una foliazione di dimensione k e di classe $\mathcal{C}^s$ ($s \geq 1$) su una varietà reale M, il tangente $T\mathcal{F}$ è un campo di k-piani su M di classe almeno $\mathcal{C}^{s-1}$. Inoltre esso è un campo di k-piani involutivo dato che, nel dominio di una carta fogliata, coincide con il luogo di zeri di $(n-k)$ 1-forme differenziali.

Definizione 1.35 *Una varietà N si dice varietà integrale per un campo di k-piani $\mathbb{D}$ di classe $\mathcal{C}^s$ ($s \geq 1$) su una varietà M se esiste un'immersione $i : N \to M$ tale che:*

$$\forall p \in N, i_*(T_pN) = \mathbb{D}_{i(p)}.$$

Una varietà N integrale per $\mathbb{D}$ e connessa si dice varietà integrale massimale per $\mathbb{D}$ se per ogni varietà W integrale per $\mathbb{D}$ e connessa esiste un'immersione $i_{W,N} : W \to N$ tale che, dette i_W e i_N le immersioni di W e N in M, si abbia $i_N \circ i_{W,N} = i_W$.

Definizione 1.36 (campo completamente integrabile) *Un campo $\mathbb{D}$ di k-piani di classe $\mathcal{C}^s$ $s \geq 1$ su una varietà si dice completamente integrabile se esiste una foliazione di classe $\mathcal{C}^s$ e di dimensione k tale che*

$$T\mathcal{F} = \mathbb{D}\,.$$

Tale foliazione è unica, ha come foglie le varietà integrali massimali del campo $\mathbb{D}$ e si dice la foliazione tangente a $\mathbb{D}$.

Osserviamo che le foglie sono di classe $\mathcal{C}^{s+1}$ ma la foliazione potrebbe essere solo di classe $\mathcal{C}^s$ (cfr. [CL], p.184).
Vale il seguente risultato classico.

Teorema 1.37 (Frobenius, [CL], teo. 1 p.182) *Un campo di k-piani di classe $\mathcal{C}^s$ $s \geq 1$ su una varietà è involutivo se e solo se è completamente integrabile.*

Le foglie di una foliazione di classe $\mathcal{C}^s$ ($s \geq 2$) sono allora le sottovarietà integrali massimali del campo tangente alla foliazione. Se $V_1, \ldots, V_k$ sono campi vettoriali che generano $T\mathcal{F}$, la foglia che contiene il punto p è composta dai punti che sono connettibili a p mediante un numero finito di curve integrali per tali campi vettoriali (cfr. [Kra], p.273).

Proposizione 1.38 ([CL], teo p.112) *Se M è una varietà non compatta, un campo di piani su M di codimensione 1 è omotopo ad un campo di piani di codimensione 1 tangente a una foliazione. In particolare esistono sempre foliazioni di codimensione 1 su una varietà non compatta.*

Proposizione 1.39 ([CL], teo p.112) *Fissiamo una metrica Riemanniana su una varietà M. Se il fibrato normale a un campo di k-piani ha gruppo strutturale discreto (cfr. p.58) allora è omotopo ad un campo di k-piani tangente a una foliazione su M.*

Foliazione orientabile, trasversalmente orientabile

Definizione 1.40 (orientabile) *Una foliazione $\mathcal{F}$ di dimensione k e classe $\mathcal{C}^1$ si dice orientabile se esiste un sottoatlante di $\mathcal{F}$ per cui il cambio della coordinata sulla placca ha determinante Jacobiano positivo o equivalentemente se il campo di k-piani $T(\mathcal{F})$ è orientabile.*

Se una foliazione è orientabile, segue dalla definizione che le foglie sono varietà orientabili.

Definizione 1.41 (trasversalmente orientabile) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di codimensione q e di classe $\mathcal{C}^1$. Si dice che $\mathcal{F}$ è trasversalmente orientabile se esiste un sottoatlante di $\mathcal{F}$ per cui il cambio della coordinata trasversa ha determinante Jacobiano positivo o equivalentemente se esiste un campo continuo orientabile di q-piani Z che sia complementare a $T\mathcal{F}$, cioè per cui valga*

$$\forall p \in M \quad T_p\mathcal{F} \oplus Z_p = T_pM\,.$$

Definizione 1.42 *Sia N una varietà reale di classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{F}$ una foliazione di classe $\mathcal{C}^1$ su una varietà reale M. Un'applicazione f da N in M di classe $\mathcal{C}^1$ si dice trasversale alla foliazione $\mathcal{F}$ se, detta f_* l'applicazione tangente, si ha*

$$\forall p \in f(N) \quad f_*(TN) + T(\mathcal{F}) = TM\,.$$

Si può fare il pullback di una foliazione tramite un'applicazione trasversale, si veda l'esempio 1.53. Se esiste un campo di q-piani continuo, complementare, orientabile, allora tutti i campi complementari sono orientabili ([CL], prop. 3 p.39).
Se $\mathcal{F}$ non è orientabile, considerando il doppio rivestimento orientabile di $T(\mathcal{F})$, il pullback tramite l'applicazione di rivestimento su M risulta orientabile; se $\mathcal{F}$ non è trasversalmente orientabile, considerando il doppio rivestimento orientabile di $T(\mathcal{F})^{\perp}$, il pullback tramite l'applicazione di rivestimento

su M risulta trasversalmente orientabile (si veda [CL], pp.38-40).
Una varietà che ammette una foliazione orientabile e trasversalmente orientabile deve essere una varietà orientabile; una foliazione su una varietà orientabile è orientabile se e solo se è trasversalmente orientabile ([CL], teo. 5 p.39).
Se M è semplicemente connessa tutti i campi di piani su M sono orientabili e, in particolare, M è orientabile e le foliazioni di classe $\mathcal{C}^1$ su M sono orientabili e trasversalmente orientabili ([CL], corollario del teo. 4 p.38).

Sezioni trasverse

Definizione 1.43 *Sia $(M, \mathcal{F})$ una varietà fogliata. Una sottovarietà di classe $\mathcal{C}^1$ di M si dice trasversa ad $\mathcal{F}$ se l'inclusione in M è una mappa trasversa ad $\mathcal{F}$.*

Definizione 1.44 (sezione trasversa) *Una sottovarietà trasversa a una foliazione (def.1.43) si dice sezione trasversa se ha come dimensione la codimensione della foliazione.*

Gli insiemi trasversali sono sezioni trasverse quindi ogni punto è contenuto in una sezione trasversa.
Le sezioni trasverse sono localmente degli insiemi trasversali.
Se $\mathcal{F}$ è di classe $\mathcal{C}^k$, data una sezione trasversa di classe $\mathcal{C}^k$ e un punto p in essa, per ogni carta fogliata (U, ϕ) tale che $U \ni p$, la sezione trasversa è localmente un grafico di classe $\mathcal{C}^k$ sulla coordinata trasversa.
Consideriamo due aperti di sezioni trasverse per cui la proiezione sulla coordinata trasversa sia iniettiva e l'immagine sia uno stesso aperto: la mappa tra tali aperti che mantiene la coordinata trasversa si chiama proiezione lungo le placche ed è un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$.
Affinchè si abbia una proiezione lungo le placche tra due aperti di due sezioni trasverse è necessario e sufficiente che ci siano due punti (uno in ciascuna sezione) con la stessa coordinata trasversa in una carta fogliata.
Componendo proiezioni lungo le placche, si dimostra il seguente risultato (cfr. [CL], teo. 3 p.49).

Teorema 1.45 (uniformità trasversa) *Se $\mathcal{F}$ è una foliazione di classe $\mathcal{C}^k$ su M, dati p_1, p_2 punti su una stessa foglia L, esistono Σ_1 e Σ_2 sezioni trasverse tali che $p_i \in \Sigma_i \; i = 1, 2$, ed inoltre Σ_1 e Σ_2 sono diffeomorfe tramite un diffeomorfismo g di classe $\mathcal{C}^k$ che applica ciascun punto su un punto della propria foglia.*

Il teorema di uniformità trasversa è decisivo per classificare le foglie infatti esso ci permette di capire il comportamento di una foglia a partire dallo studio di una sezione trasversa.

Foglie proprie, localmente dense, eccezionali, insiemi minimali

Enunciamo una serie di risultati che classificano le foglie, che si trovano dimostrati in [Ta], cap.4, par.18, oppure in [CL], cap.3.

Definizione 1.46 *Una foglia si dice compatta se è un insieme compatto per la topologia delle placche, si dice chiusa se è un chiuso di M, si dice propria se l'inclusione in M è un embedding, si dice localmente densa se la sua chiusura in M ha parte interna non vuota, si dice eccezionale se non è né chiusa né localmente densa.*

Una foglia compatta con la topologia delle placche è una varietà compatta ed è un compatto anche per la topologia indotta da M. Una foglia compatta è propria, una foglia propria è una sottovarietà di M e una foglia localmente densa non è propria. Una foglia è propria se e solo se una sua intersezione non vuota con una sezione trasversa è costituita da punti isolati; una foglia è localmente densa se e solo se una sua intersezione non vuota con una sezione trasversa ha chiusura nella sezione trasversa che contiene un aperto della sezione trasversa.
Sono equivalenti le seguenti condizioni:

(i) una foglia è chiusa;

(ii) ciascuna carta fogliata con dominio a chiusura compatta, restrizione di una carta fogliata il cui dominio contenga tale chiusura, ha un numero finito di placche della foglia;

(iii) l'immersione della foglia in M è un'applicazione propria.

Ne segue che una foglia chiusa è propria.

Definizione 1.47 *Un sottoinsieme di M chiuso, non vuoto e che sia unione di foglie si dice minimale se non contiene sottoinsiemi propri chiusi, non vuoti ed unioni di foglie.*

Una foglia chiusa è un insieme minimale, ogni foglia contenuta in un insieme minimale ha tale insieme come chiusura; se M è connessa, un insieme minimale diverso da M ha parte interna vuota; se M è compatta, esiste un

insieme minimale.
L'unione delle foglie che hanno intersezione non vuota con un aperto di M è un aperto di M (non vale l'analoga proprietà con i chiusi) inoltre, dato un sottoinsieme di M che sia unione di foglie, la sua parte interna, la sua frontiera e la sua chiusura sono ciascuno unione di foglie.

Una sezione trasversa omeomorfa ad un disco interseca un insieme minimale che non sia una foglia chiusa in un insieme chiuso che coincide con i suoi punti di accumulazione (cioè un insieme perfetto).

Teorema 1.48 (stabilità globale, [CL], p.72) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione trasversalmente orientabile, di codimensione 1 e classe $\mathcal{C}^r$ $(r \geq 1)$ su una varietà compatta connessa. Se $\mathcal{F}$ ha una foglia compatta con gruppo fondamentale finito allora tutte le foglie sono diffeomorfe ed esiste una submersione di classe $\mathcal{C}^r$ da M su S^1 tali che le foglie di $\mathcal{F}$ ne siano gli insiemi di livello.*

Teorema 1.49 (Novikov, [CL], p.131) *Una foliazione di codimensione 1 e di classe $\mathcal{C}^2$ su una 3-varietà compatta con gruppo fondamentale finito ha una foglia compatta.*

Costruzione di foliazioni

Esponiamo alcuni metodi elementari per ottenere una foliazione a partire da una o più foliazioni.

Esempio 1.50 (Restrizione) Se M ammette una foliazione $\mathcal{F}$, ogni aperto U di M è fogliato dalle componenti connesse dell'intersezione con ciascuna foglia di M. Tale foliazione si dice la *restrizione* di $\mathcal{F}$ ad U.

Esempio 1.51 (Prodotto) Se due varietà reali senza bordo M e M' ammettono foliazioni $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$, esiste una foliazione su $M \times M'$, che diremo la *foliazione prodotto*, ottenuta facendo tutti i prodotti delle carte fogliate di $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ e ordinando le coordinate in arrivo in modo che la nuova coordinata trasversa sia descrivibile con la coppia delle coordinate trasverse. Le foglie sono i prodotti di foglie.

Esempio 1.52 (Intersezione trasversa) Se due foliazioni $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ di classe $\mathcal{C}^r$ su una varietà reale senza bordo M hanno spazi tangenti alle foglie tali che

$$T_p\mathcal{F} + T_p\mathcal{F}' = T_pM \quad \forall\, p \in M\,,$$

allora esiste una foliazione $\mathcal{G}$ di classe $\mathcal{C}^r$, che diremo l'*intersezione trasversa*, che ha come foglie le componenti connesse di $L \cap L'$, per L foglia di $\mathcal{F}$ ed L' foglia di F'. La codimensione di $\mathcal{G}$ è la somma delle codimensioni di $\mathcal{F}$ e di $\mathcal{F}'$.

Esempio 1.53 (Pullback) Date due varietà M ed V ed una foliazione $\mathcal{F}$ su M, consideriamo un'applicazione f da V in M trasversale ad $\mathcal{F}$ (cfr. def. 1.42).
Il *pullback* di $\mathcal{F}$ tramite f è la foliazione su V che ha come foglie le componenti connesse delle retroimmagini mediante f delle foglie di $\mathcal{F}$.
La regolarità del pullback è almeno il minimo tra la regolarità di f e quella di $\mathcal{F}$ inoltre, se $\mathcal{F}$ è trasversalmente orientabile, anche il suo pull-back è trasversalmente orientabile (cfr. [CL] p.34, p.190).

Esempio 1.54 (Omeomorfismi) Date due varietà reali omeomorfe di cui la seconda sia fogliata, esiste una foliazione della stessa regolarità e con foglie le retroimmagini delle foglie.
Data una varietà M e una foliazione $\mathcal{F}$ su M e considerando tutti gli omeomorfismi da M in sé, si ottengono le foliazioni topologicamente equivalenti ad $\mathcal{F}$ (cfr. def. 1.16).

Capitolo 2

Olonomia e componenti di Reeb

2.1 Olonomia

Definizione e risultati classici

Introduciamo il concetto di olonomia, che è uno strumento utile per distinguere le foliazioni.
Per le dimostrazioni, si rimanda a [CL].

Definizione 2.1 *Dato un cammino continuo $\gamma : [0,1] \to M$ contenuto in una foglia, si dice catena subordinata a γ un insieme finito di carte fogliate $\{(U_i, \phi_i), i = 1, .. , n\}$ tale che, se l'intersezione di due domini è non vuota, l'unione è contenuta nel dominio di una carta fogliata ed inoltre esiste una partizione di* $[0,1]$

$$\{t_0, t_1, ..., t_n\} \text{ tale che } \quad \forall i \in \{0, ... , n-1\} \quad \gamma\,[t_i, t_{i+1}] \subseteq U_i\,.$$

Dato un cammino continuo contenuto in una foglia esiste sempre una catena subordinata ad esso (cfr. [CL], cap.4,par.1). Dati un cammino continuo $\gamma : [0,1] \to M$ e una catena $\{(U_i, \phi_i), i = 1, .. , n\}$ subordinata ad esso si ha che $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ sono connessi da un cammino di placche $\{P_i, i = 1, .., n\}$ tale che P_i sia una placca per (U_i, ϕ_i) per ogni $i \in \{1, .. , n\}$. Consideriamo le seguenti sezioni trasverse:

$$\Sigma_0, .. , \Sigma_{n+1} \quad \text{tale che} \quad \gamma(0) \in \Sigma_0 \subseteq U_1,\ \gamma(1) \in \Sigma_{n+1} \subseteq U_n\,,$$

$$\forall i \in \{1, .. , n\} \quad \Sigma_i \subseteq U_i \cap U_{i+1}, \quad \Sigma_i \cap P_i \neq \emptyset\,.$$

Esistono aperti di sezioni trasverse consecutive Σ_i e Σ_{i+1} che intersecano la placca P_i (ponendo $P_0 = P_1$ e $P_{n+1} = P_n$) e sono diffeomorfi tramite un'applicazione che mantiene la coordinata trasversa della carta (U_i, ϕ_i) (cfr.p.21).

Restringendo opportunamente i domini di tali applicazioni è ben definita la composizione ed iterando si ottiene un diffeomorfismo f_γ tra un aperto di Σ_0 e uno di Σ_{n+1} che intersecano rispettivamente P_1 e P_n e contengono rispettivamente $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$. L'applicazione f_γ è di classe $\mathcal{C}^k$ ed ha la proprietà di mandare in sé le foglie.

Definizione 2.2 *Un'applicazione f_γ costruita come sopra si dice una mappa di olonomia associata al cammino continuo γ.*

Fissati Σ_0 e Σ_{n+1}, si ha che f_γ non dipende dalla scelta dei Σ_i con $i = 1, \dots, n$ né dalla scelta della catena subordinata a γ, quindi il germe di una mappa di olonomia dipende solo dal cammino γ. La mappa inversa di f_γ è associata al cammino inverso γ^{-1}. Il germe in Σ_0 di f_γ dipende solo dalla classe di omotopia a estremi fissi dei cammini contenuti nella foglia di $\gamma(0)$. Considerando i cammini chiusi con punto base p_0 contenuti nella foglia L e una sezione trasversa $\Sigma_0 \ni p_0$, si definisce un omomorfismo

$$\Phi : \pi_1(L, p_0) \to G(\Sigma_0, p_0)\,, \quad \Phi([\gamma]) = [f_{\gamma^{-1}}]\,,$$

dove $G(\Sigma_0, p_0)$ è il gruppo dei germi in p_0 di omeomorfismi definiti in un intorno aperto di p_0 in Σ_0 che fissano p_0.

Definizione 2.3 *Il gruppo $\Phi(\pi_1(L, p_0))$ definito sopra si chiama gruppo di olonomia di L e si indica con* $\mathrm{Hol}(L)$.

Il gruppo di olonomia di una foglia è ben definito poiché al variare di p_0 in L i gruppi di olonomia ottenuti sono isomorfi.
Se M è una n-varietà, data una foglia L di una foliazione di codimensione q, i germi di $\mathrm{Hol}(L)$ corrispondono, componendo con l'applicazione che dà la coordinata trasversa di una carta fogliata, a germi di applicazioni tra aperti di $\mathbb{R}^q$.
Osserviamo che, se la foliazione è di classe $\mathcal{C}^s$ $(s = 1, \dots, \infty, \omega)$, possiamo costruire una catena usando solo carte del sottoatlante di classe $\mathcal{C}^s$ e quindi i germi di omeomorfismi del gruppo di olonomia sono germi di diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^s$. Se la foliazione è di classe $\mathcal{C}^s$ $(s \geq 1)$, una curva chiusa su una foglia è omotopa (con un'omotopia ad estremi fissi) ad una curva chiusa di classe $\mathcal{C}^s$ quindi si possono studiare solo le classi di cammini di classe $\mathcal{C}^s$. Se una foliazione di codimensione k è trasversalmente orientabile, il differenziale di ogni germe dell'olonomia mantiene l'orientazione della base di $\mathbb{R}^k$.

Definizione 2.4 *L'olonomia di una foglia L si dice banale se vale*

$$\mathrm{Hol}(L) = \{0\}\,.$$

Definizione 2.5 *Date $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ due foliazioni su M di codimensione q e classe $\mathcal{C}^k$ ed L e L' sono foglie compatte per $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ rispettivamente, si dice che le olonomie di L e L' sono $\mathcal{C}^s$-coniugate ($s \leq k$) se esistono sezioni trasverse*

$$\Sigma_0\,,\ \Sigma_0' \quad \text{con} \quad p_0 \in \Sigma_0 \cap L\,, \quad p_0' \in \Sigma_0' \cap L'$$

ed un omeomorfismo

$$h : \Sigma_0 \cup L \to \Sigma_0' \cup L' \quad \textit{tale che} \quad h(p_0) = p_0'\,,$$

$h|_L$ e $h|_{\Sigma_0}$ sono diffeomorfismi di classe $\mathcal{C}^s$ ed in un intorno di p_0' in Σ_0' si ha $h \circ f_\gamma \circ h^{-1} = f_{h\circ\gamma}$, cioè i germi di olonomia associati ad un cammino ed alla sua immagine tramite h sono coniugati da h.

Proposizione 2.6 ([CL], teo. 2 p.67) *Due foliazioni $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ su M sono localmente equivalenti sulle rispettive foglie compatte L e L' con un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^s$ ($s \leq k$) se e solo se tali foglie compatte hanno olonomie $\mathcal{C}^s$-coniugate.*

Teorema 2.7 (stabilità locale, [CL] teo. 4 p.70) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M di classe $\mathcal{C}^1$ e L una foglia compatta con gruppo di olonomia finito. Allora esiste un intorno U di L (che può essere preso arbitrariamente piccolo) che sia unione di foglie compatte con gruppo di olonomia finito ed esiste una retrazione $\rho : U \to L$ che ristretta ad ogni foglia di U sia un rivestimento di L a fibra finita e per cui la retroimmagine di ciascun punto di L sia una sezione trasversa omeomorfa a un disco.*

Corollario 2.8 *Una foglia compatta L per una foliazione su M di classe $\mathcal{C}^1$ che abbia gruppo fondamentale finito ha un intorno composto da foglie compatte con gruppo fondamentale finito (cfr. [CC1], cor. 2.4.4).*

Teorema 2.9 ([CC1] teo. 2.4.3) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione ed L una foglia compatta di $\mathcal{F}$ con gruppo di olonomia finito. Esiste un intorno U di L, unione di foglie per $\mathcal{F}$, tale che si possa definire una proiezione p che renda l'intorno un fibrato fogliato dalle foglie di $\mathcal{F}$ per cui ciascuna foglia è compatta e la restrizione di p alla foglia sia un rivestimento di L, con un numero di fogli minore o uguale alla cardinalità del gruppo di olonomia di L. Inoltre le foglie dell'intorno hanno gruppo di olonomia di cardinalità non maggiore di quello della foglia base.*
In particolare, se la foglia base ha olonomia banale, le foglie dell'intorno sono omeomorfe ad essa ed hanno olonomia banale.

Olonomia in codimensione 1

Se una foliazione su una varietà M ha codimensione reale 1, le sezioni traverse localmente si possono identificare ad intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e quindi i germi che costituiscono l'olonomia di una foglia si possono identificare con germi di omeomorfismi da $\mathbb{R}$ in sè che fissano l'origine.

Definizione 2.10 *Sia L una foglia di una foliazione di codimensione 1 su M. Si dice che la foglia L ha olonomia infinitesima se, per ogni germe $g \in \mathrm{Hol}(L)$, esiste un'applicazione F con germe f tale che*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N} \quad F(y) = o(y^\alpha); \quad g = \mathrm{id} + f.$$

Se la proprietà vale solo per $\alpha \leq k$, l'olonomia si dice infinitesima di ordine k.

Osserviamo inoltre che la composizione di due germi che siano somma del germe dell'identità e di un germe di una funzione infinitesima è anch'essa somma del germe dell'identità e di un germe di una funzione infinitesima quindi, per verificare che l'olonomia di una foglia è infinitesima, basta controllare le immagini di un sistema di generatori del gruppo fondamentale.

Proposizione 2.11 ([MR],p.704) *Sia ω un germe nell'origine di un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ in sé che fissi l'origine. Sono possibili solo tre casi:*

- *(i) ω è il germe nell'origine di $id_{\mathbb{R}}$;*
- *(ii) ω è il germe nell'origine di $-id_{\mathbb{R}}$;*
- *(iii) ω è il germe nell'origine di una funzione f tale che, per ogni intorno di zero V, esiste un punto ξ nel dominio di f tale che V contiene un'infinità numerabile di punti distinti della forma $f^n(\xi)$ con $n \in \mathbb{Z}$.*

Dalla proposizione segue che se il gruppo di olonomia di una foglia è finito, allora o è l'identità oppure è composto dagli elementi $\{id, -id\}$; se il gruppo di olonomia è finito e la foliazione è trasversalmente orientabile allora l'olonomia è banale.
Enunciamo adesso alcuni risultati classici per l'olonomia in codimensione 1.

Teorema 2.12 ([CL], teo. 5 p.78) *Consideriamo una varietà M connessa e compatta ed una foliazione $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^1$ e di codimensione 1 su M. Se una foglia di $\mathcal{F}$ è compatta e con gruppo fondamentale finito allora tutte le foglie di $\mathcal{F}$ sono compatte e con gruppo fondamentale finito.*

Teorema 2.13 ([CL], oss. 3 p.80) *Se per una foglia compatta L di una foliazione $\mathcal{F}$ di codimensione 1 trasversalmente orientabile di classe $\mathcal{C}^1$ è nullo $H^1(L, \mathbb{R})$ allora l'olonomia di L è banale.*

Teorema 2.14 ([CL], teo. 1 p.115) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di classe $\mathcal{C}^2$ e di codimensione 1 su una varietà M. Supponiamo che esista una sezione trasversa che sia una curva chiusa omotopa a costante. Allora, nel gruppo di olonomia di una foglia che interseca tale sezione, esiste un germe che sia l'identità sui numeri positivi o sui numeri negativi ma che sia diverso dall'identità su ogni intervallo aperto dell'altro semiasse. In particolare deve esistere un elemento di ordine infinito in $\pi_1(M)$.*

Olonomia nel caso con bordo

Definiamo e descriviamo adesso l'olonomia nel caso di una varietà M con bordo. Una foglia non può intersecare sia il bordo trasversale che il bordo tangenziale (si veda il par. 1.1) allora sono possibili solo tre casi. Consideriamo una foglia che non interseca il bordo. In questo caso si ragiona come nel caso, che analizzeremo in dettaglio, di intersezione con il bordo trasversale e si trovano per ogni punto sezioni trasverse che non intersecano bM: se ne deduce che l'olonomia coincide con l'olonomia come foglia della foliazione ristretta alla parte interna di M (descritta nel paragrafo 1.1).
Consideriamo una foglia che interseca il bordo trasversale. Il bordo trasversale non modifica l'olonomia poiché si possono scegliere un cammino sulla foglia e sezioni trasverse su punti di tale cammino che non intersechino il bordo trasversale né il bordo tangenziale. Fissato un punto sul bordo trasversale e una carta fogliata in un intorno di esso esiste un insieme trasversale sul bordo e un insieme trasversale nell'interno di M: questo garantisce che si può considerare l'olonomia di un punto del bordo e che coincide con quella di un punto interno, per cui il gruppo di olonomia è ancora ben definito e coincide con quello della foliazione ristretta alla parte interna di M.
Una foglia che interseca il bordo tangenziale, come visto nel paragrafo 1.1, coincide con una componente connessa di bM e quindi non ha immagine una foglia nella foliazione ristretta alla parte interna di M. In questo caso si parla di olonomia laterale. L'olonomia laterale si definisce, come l'olonomia, tramite un numero finito di proiezioni lungo le placche, che cominciano e terminano sulla stessa sezione trasversa. Si possono utilizzare come sezioni trasverse gli insiemi trasversali, che sono varietà con bordo. Nel caso di codimensione 1, i germi dell'olonomia laterale si possono identificare a germi di diffeomorfismi di un intorno di 0 in $\mathbb{R}$ che fissano 0 e sono l'identità sul semiasse negativo.

2.2 La foliazione di Reeb sul toro solido

Sia D^2 il disco $\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1\}$ e sia f la funzione definita da

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R} \quad f(t) = e^{t^2/(1-t^2)} - 1\,.$$

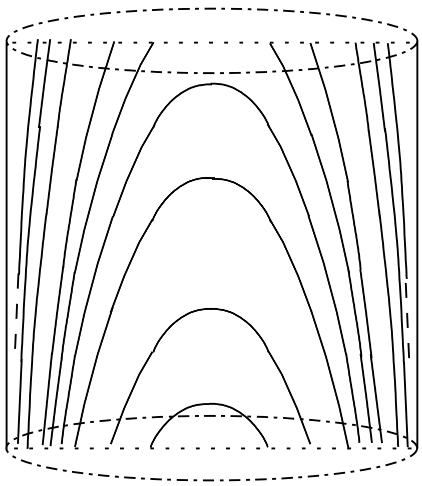
La funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$, strettamente crescente su $[0, 1)$, strettamente convessa su $(\frac{1}{2}, 1)$ ed è tale che

$$\forall k \geq 0 \qquad \lim_{t\to 1} \frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{1}{f'(t)}\right) = 0\,.$$

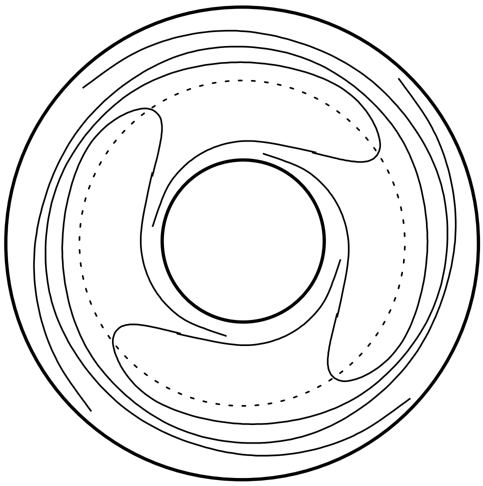
Gli insiemi

$$L_\alpha = \left\{(x, e^{2\pi(\alpha + f(|x|))i})\right\} \quad \alpha \in [0, 1)\,,$$

dove $|x|$ è la distanza di x dall'origine in $\overline{D^2}$, sono, insieme al bordo del toro solido, le foglie per una foliazione di codimensione 1 e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\overline{D^2} \times S^1$, detta la *foliazione di Reeb*.



(a) Le foglie in sezione (quozientando le basi del cilindro).



(b) Avvolgimento delle foglie.

Figura 2.1: La foliazione di Reeb sul toro solido.

Il bordo del toro solido è l'unica foglia compatta, le altre foglie sono sottovarietà diffeomorfe a $\mathbb{R}^2$ e ciascuna ha intersezione non vuota con ogni intorno della foglia compatta (le foglie non compatte si accumulano sulla foglia compatta) inoltre tutte le foglie sono proprie e l'unico insieme minimale

è la foglia compatta (cfr. [Ta], pp.84-86 e [CL], p.26). Una funzione continua su $\overline{D^2} \times S^1$ e costante su ciascuna foglia è allora costante. Il toro solido, prodotto di due varietà orientabili, è orientabile. La foliazione di Reeb è allora orientabile se e solo se è trasversalmente orientabile. Per dimostrare l'orientabilità trasversa si costruisce un campo di versori normali che puntano nel verso in cui f cresce.
Avremmo ottenuto una foliazione con le medesime caratteristiche (anche la prop. 2.16) a partire da una funzione con le proprietà della f che abbiamo specificato.

Proposizione 2.15 ([CL], p.196) *Una foliazione di codimensione* 1 *sul toro solido* $\overline{D^2} \times S^1$*, per cui l'unica foglia compatta sia il bordo, è topologicamente equivalente alla foliazione di Reeb e le foglie non compatte sono diffeomorfe ad* $\mathbb{R}^2$*.*

Proposizione 2.16 *L'olonomia della foliazione di Reeb ha le seguenti proprietà:*
(a) *l'olonomia delle foglie non compatte è banale;*
(b) *il gruppo di olonomia della foglia compatta è* $\mathbb{Z}$*;*
(c) *l'olonomia della foglia compatta è infinitesima.*

Dim. (a) Il gruppo fondamentale delle foglie diffeomorfe a $\mathbb{R}^2$ è banale, di conseguenza anche l'olonomia. □

Dim. (b) La foglia compatta è un toro: come generatori del gruppo fondamentale, scegliamo due cammini semplici chiusi con immagini rispettivamente un meridiano e un parallelo. La classe di omotopia del cammino lungo il meridiano ha immagine nulla nel gruppo di omotopia. Come cammino di placche si può prendere quello ottenuto da carte che siano traslazione di una carta fogliata iniziale lungo il meridiano. Le coordinate trasverse avranno valore nello stesso intervallo di $\mathbb{R}$ e, secondo il cammino di placche, una placca mantiene il valore della coordinata trasversa. Il diffeomorfismo indotto sulla sezione trasversa è quindi l'identità.
Il gruppo di olonomia è allora un sottogruppo di $\mathbb{Z}$: mostriamo che non è finito. Estendendiamo la foliazione a un toro solido aperto 'concentrico', aggiungendo come foglie i tori 'concentrici'. Considerando una sezione trasversa ortogonale alla foglia compatta, si ha che è banale il contributo all'olonomia dato dalle foglie aggiunte quindi il gruppo di olonomia della foglia nella foliazione estesa è isomorfo al gruppo di olonomia della foglia nella foliazione di Reeb. Possiamo applicare alla foliazione senza bordo il teorema di stabilità locale (teorema 2.7) e dedurre un assurdo se il gruppo di olonomia fosse finito, in quanto la foglia compatta non ha un intorno costituito da foglie compatte.
□

Dim. (c) Grazie a quanto osservato a pagina 28, basta mostrare le condizioni della definizione su un generatore. Prendiamo il punto di coordinate $(1,0)$ e consideriamo come sezione trasversa il segmento $\{(t,0) \mid t \in (\frac{1}{2},1]\}$. Come cammino semplice chiuso consideriamo il parallelo in p percorso in senso antiorario e come carte fogliate consideriamo una carta in p e le sue ruotate mediante una rotazione intorno all'asse di simmetria del toro. Si possono scegliere due sezioni trasverse che siano ottenute da un aperto di quella scelta in p mediante una rotazione intorno all'asse del toro: controlliamo il germe di olonomia attravero la variazione di $|x|$ nelle proiezioni lungo le placche. Girando in senso antiorario su un parallelo, su una stessa foglia il valore di f cresce e di conseguenza cresce $|x|$. Le foglie si contraggono sulla foglia compatta, che corrisponde al valore massimo di $|x|$. Pur di scegliere la carta fogliata iniziale con dominio sufficientemente piccolo, per ogni punto della sezione trasversa esiste una curva nel cammino di placche che percorre bigettivamente la coordinata su S^1 in senso antiorario ed è tale che, dopo un giro, $|x|$ è diventato un valore $|x'|$ per cui si ha

$$f(|x'|) - f(|x|) = 1; \quad 0 \le |x'| - |x| \le \frac{1}{f'(|x'|)}\,.$$

Una delle proprietà della f che abbiamo enunciato afferma che il reciproco di f' è una funzione infinitesima quindi $|x'| - |x|$ è infinitesima e il germe di olonomia differisce dall'identità per un germe di una funzione infinitesima. □

2.3 Componenti di Reeb

Consideriamo adesso foliazioni che si ottengono a partire dalla foliazione di Reeb.

Esempio 2.17 Il toro solido $D^2 \times S^1$ si ottiene quozientando il cilindro $D^2 \times [0,1]$, identificando due punti del bordo con la stessa prima coordinata. Esiste unica una foliazione sul cilindro per cui le immagini al quoziente delle foglie sono le foglie della foliazione di Reeb. Identifichiamo il cilindro solido in modo da ottenere da ciascun cilindro 'concentrico' una bottiglia di Klein. Il quoziente è una 3-varietà fogliata non orientabile: la foglia bordo è diffeomorfa a una bottiglia di Klein mentre le altre foglie sono omeomorfe ad $\mathbb{R}^2$ (cfr. [CL], p.26).

Esempio 2.18 Dato che la sfera S^2 è unione di due semisfere che si intersecano nell'equatore, l'insieme $S^2 \times S^1$ è unione di due tori solidi $D^2 \times S^1$ che si intersecano nel loro bordo toroidale $S^1 \times S^1$, in cui i meridiani vengono identificati con meridiani e paralleli con paralleli. Fogliando le immagini dei tori solidi con l'immagine della foliazione di Reeb, si ottiene una foliazione su $S^2 \times S^1$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ e orientabile.

Esempio 2.19 La sfera S^3 è l'unione di due tori solidi quozientati per il bordo in modo da identificare un meridiano di un toro con un parallelo dell'altro e viceversa. La foliazione $\mathcal{C}^\infty$ di codimensione 1 su S^3 che sui tori solidi coincide con la foliazione di Reeb si dice la foliazione di Reeb su S^3. Tutte le foglie sono proprie, il bordo dei tori solidi è l'unica foglia compatta, le altre foglie sono $\mathcal{C}^\infty$-diffeomorfe a $\mathbb{R}^2$ e si accumulano sulla foglia compatta.
Studiamo l'olonomia della foliazione di Reeb su S^3. Le foglie non compatte sono diffeomorfe a $\mathbb{R}^2$, di conseguenza hanno gruppo fondamentale banale e gruppo di olonomia banale. $\square$
Si deduce allora che il gruppo di olonomia della foglia compatta è isomorfo a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. La foglia compatta è un toro e due generatori del gruppo fondamentale sono due cammini semplici chiusi che percorrono rispettivamente un meridiano e un parallelo. Nell'identificazione dei tori solidi un parallelo si identifica con un meridiano quindi deduciamo che con uno dei cammini per un toro solido si ha un contributo banale all'olonomia e per l'altro si ha un elemento che genera un gruppo isomorfo a $\mathbb{Z}$. Di questi due elementi del gruppo di olonomia non esiste nessuna combinazione che dia l'identità perché i germi di diffeomorfismi operano su parti differenti di S^3 e i contributi dovrebbero essere entrambi nulli. $\square$

Supponiamo di avere una foliazione reale $\mathcal{F}$ di dimensione 2, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e trasversalmente orientabile su una 3-varietà M.

Definizione 2.20 (componente di Reeb) *Una componente di Reeb per la foliazione $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme di M omeomorfo ad un toro solido, che sia unione di foglie di $\mathcal{F}$ e su cui la restrizione di $\mathcal{F}$ sia l'immagine della foliazione di Reeb.*

Una foliazione che ammetta componenti di Reeb ha dimensione 2.
Il bordo di una componente di Reeb è l'immagine della foglia toroidale ed è l'unica foglia compatta nella componente di Reeb.
Esistono carte fogliate le placche che ricoprano la foglia compatta tali che le placche con coordinata trasversa negativa appartengano a foglie della componente di Reeb e quelle dell'altro semiasse no.
L'olonomia per la foglia compatta non è banale in quanto non è banale sul semiasse negativo.

Una foglia L non compatta di una componente di Reeb determina tutte le foglie non compatte della sua componente di Reeb: sono le foglie che intersecano un intorno connesso di un punto di L che non intersechi foglie compatte. Una foglia non compatta determina anche la foglia compatta in quanto frontiera dell'insieme delle foglie non compatte.
Quanto osservato implica che le parti interne di due componenti di Reeb sono disgiunte, due componenti di Reeb non possono avere una foglia non compatta in comune. In particolare una componente di Reeb non può contenere un'altra componente di Reeb.
Enunciamo adesso due teoremi sull'esistenza di componenti di Reeb, dovuti a Novikov, che si utilizzano nella dimostrazione del teorema 7.22.

Teorema 2.21 ([CC2], teo. 9.1.4) *Sia M una varietà compatta, orientabile, di dimensione 3 e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M di classe $\mathcal{C}^\infty$, orientabile e trasversalmente orientabile. Ciascuna delle seguenti ipotesi implica l'esistenza di una componente di Reeb per $\mathcal{F}$: (i) esiste una sottovarietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ e di dimensione 1 che sia una curva semplice chiusa, omotopa a costante e trasversa ad $\mathcal{F}$; (ii) il bordo tangenziale di M è vuoto e $\pi_1(M)$ è finito.*

Teorema 2.22 ([CC2], teo. 9.1.7) *Sia M una varietà compatta, orientabile, di dimensione 3, tale che $\pi_2(M)$ sia non nullo e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M, orientabile e trasversalmente orientabile. Allora, se $\mathcal{F}$ è una foliazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M che non ha componenti di Reeb, M è diffeomorfa ad $S^2 \times S^1$ oppure ad $S^2 \times [0,1]$ ed $\mathcal{F}$ ha come foglie gli insiemi di livello della seconda coordinata.*

Cancellazione di componenti di Reeb

Supponiamo di avere una foliazione reale $\mathcal{F}$ di dimensione 2, di classe $\mathcal{C}^\infty$ e trasversalmente orientabile su una 3-varietà M.

Esempio 2.23 ([CL], p.44) Se esiste un toro solido $S^1 \times D^2$ con embedding in M tali che i paralleli abbiano come immagini sezioni trasverse e le immagini di $\{p\} \times D^2$ siano ciascuna contenuta in una foglia, allora si può modificare $\mathcal{F}$ solo sull'immagine del toro solido, per 'turbolizzazione'. Consideriamo un cilindro che quozientato sia il toro solido. La parte del cilindro che ha base il disco di raggio metà si quozienti nella foliazione di Reeb invece, sulla restante parte del cilindro le foglie, parametrizzate con $b \in \mathbb{R}$, siano le immagini per rotazione intorno all'asse del cilindro dei grafici delle funzioni

$$f_b : (\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R} \quad f_b(r) = \alpha(r) + b\,,$$

dove α è una funzione costante in un intorno di 1 e per $r \to \frac{1}{2}$ tende, come tutte le sue derivate a $-\infty$.

La cancellazione di una componente di Reeb è un procedimento che si può visualizzare come l'inverso di una turbolizzazione.

Definizione 2.24 *Si dice che una foglia compatta con gruppo fondamentale abeliano ha ordine di contatto k con l'identità se esiste un germe nel gruppo di olonomia che corrisponda a una funzione infinitesima di ordine k rispetto all'identità, che cioè sia somma dell'identità e di una funzione infinitesima nell'origine di ordine k, cioè siano nulle in 0 tutte le derivate fino all'ordine k incluso e la $k+1$-esima derivata sia non nulla.*

Lemma 2.25 (Kopell, cfr. [Kop], lemma 1 (b)) *Siano f,g .diffeomorfismi locali di $\mathbb{R}$ definiti in un intorno di 0 e tali che $gf = fg$. Se f ha ordine di contatto k con l'identità ed f non ha come germe nell'origine il germe dell'identità allora g ha come germe il germe dell'identità oppure ha ordine di contatto k con l'identità in 0.*

Per il lemma di Kopell, se un elemento ha ordine di contatto esattamente k con l'identità allora gli altri elementi o hanno ordine esattamente k oppure sono l'identità.
Supponiamo allora di avere una foglia omeomorfa ad un toro che sia il bordo di una componente di Reeb R e supponiamo che la foglia bR abbia un elemento con ordine di contatto k (finito) con l'identità.
Consideriamo carte fogliate in cui bR abbia una placca sola e per cui le placche corrispondenti a foglie di R siano quelle con coordinata trasversa negativa.
Sia p un punto di bR, sia α un cammino semplice sull'immagine di un meridiano che contiene p e β un cammino semplice sull'immagine di un parallelo che contiene p.
Il cammino β non dà l'identità nell'olonomia poiché non è l'identità sulle placche di coordinata negativa.
Per il lemma di Kopell, α ha ordine di contatto esattamente k con l'identità oppure è l'identità. Dato che la foliazione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ e il germe associato ad α è l'identità nella componente di Reeb, allora ha ordine di contatto $+\infty$ con l'identità (le derivate nell'origine sono determinate dal comportamento sul semiasse negativo) quindi è l'identità.

Si può 'cancellare' la componente di Reeb cioè alterare la foliazione sull'immagine del toro solido di modo che T non sia più una foglia.
Il germe di olonomia associato ad α è banale quindi esistono cammini chiusi

di placche sulle foglie in un intorno di p.
Esistono cioè carte fogliate che ricoprono il meridiano e sono tali che ogni foglia intersechi l'unione dei domini in un cammino di placche e intersechi ciascuna carta in una placca sola. Inoltre si possono scegliere tali carte di modo che l'intersezione con la foglia toro sia un anello e l'unione dei domini sia un anello solido con frontiera di classe $\mathcal{C}^\infty$, unione di anelli ciascuno su una foglia distinta.
Si può ricoprire bR con un numero finito di anelli solidi del tipo descritto.
Gli anelli solidi possono essere scelti di modo che le intersezioni a tre a tre siano vuote e che la coordinata angolare su S^1 sull'intersezione di un anello con la foglia toro non vari più di $\pi/2$.
Le foglie in un intorno del bordo della componente di Reeb sono allora ciascuna unione di anelli. Con il germe di olonomia di bR determinato dal cammino sul parallelo si descrivono catene di anelli su una foglia che possono richiudersi (la foglia corrispondente è allora un toro) oppure avvolgersi all'infinito verso una foglia toro (questo si deve al fatto che nell'olonomia in codimensione 1 le iterate di un punto convergono verso un punto fisso).
Grazie all'ipotesi sull'olonomia di ordine finito, esiste un intorno U della componente di Reeb diffeomorfo ad un toro solido, con bordo bU trasverso alla foliazione e per cui le foglie, intersecate con tale bordo, siano curve semplici chiuse omotope a costante in U (si intersecano trasversalmente gli anelli contenuti nelle foglie).
Si trova una opportuna famiglia di dischi che abbiano come bordo curve ottenute come sopra e tali che, sostituendo i dischi alla restrizione della foliazione su U, si ottenga una foliazione regolare che coincide con la foliazione di partenza fuori da U. Questo procedimento viene detto *cancellazione di una componente di Reeb* (si veda [RR]).

Parte II

Foliazioni semiolomorfe

Capitolo 3

Foliazioni semiolomorfe, foliazioni complesse

3.1 Richiami

Richiamiamo brevemente alcune nozioni. Si rimanda ai libri [Bo] e [FG] per ulteriori proprietà e dimostrazioni non riportate.

Tangente olomorfo

Sia N una varietà complessa di dimensione n e sia J la struttura complessa su T_pN. Sia M una sottovarietà reale di N di classe $\mathcal{C}^1$ e di codimensione reale k. Se p appartiene ad M, lo spazio tangente T_pM è un sottospazio di T_pN e possiamo considerarvi la restrizione di J.

Definizione 3.1 *Lo spazio tangente olomorfo a M in p è il massimo sottospazio J-chiuso contenuto in T_pM e si indica con HT_pM.*

Il tangente olomorfo ha codimensione reale in T_pN pari e compresa tra $2n-2k$ e $2n-k$. Vale

$$HT_pM = T_pM \cap J(T_pM)$$

e, dette $(z_1, \ldots, z_n)$ coordinate complesse su N, si ha

$$HT_pM = \langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n} \rangle \cap T_pM \, .$$

Siano $\rho_1, \ldots, \rho_k$ funzioni locali in p che definiscono M, allora

$$T_pM = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(d\rho_i) \; ; \quad HT_pM = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(\partial\rho_i) \, .$$

Se M ha tangente reale J-chiuso cioè $HT_pM = T_pM$ per ogni p in M, allora si dimostra facilmente che M è una sottovarietà complessa di N (cfr. [Bo], p.59).

Sottovarietà CR

Sia M una sottovarietà reale di classe $\mathcal{C}^1$ e di codimensione k in una varietà complessa N di dimensione n.

Definizione 3.2 *Il numero $CRdim_pM = dim_{\mathbb{R}}HT_pM$ si dice la dimensione CR di M in un punto p. La sottovarietà M si dice di tipo CR se la dimensione CR è costante.*

Una sottovarietà M di tipo CR si dice *generica* se HTM ha dimensione minima $(2n-2k)$ e si dice *totalmente reale* se HTM ha dimensione zero.
Se M è una sottovarietà CR, si può considerare la distribuzione continua $\mathcal{H}$ dei tangenti olomorfi, $\mathcal{H}_p = HT_pM$ per p in M.
Se M è una sottovarietà CR, una funzione f di classe $\mathcal{C}^1$ da M in $\mathbb{C}$ si dice una *funzione CR* se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\xi}} = 0 \quad \forall p \in M \, , \, \forall \xi \in HT_pM \, .$$

Se M è una sottovarietà CR generica, una funzione f di classe $\mathcal{C}^1$ è di tipo CR se e solo se, presa un'estensione f' di classe $\mathcal{C}^1$ a un intorno di M in N, dette $\rho_1, \ldots, \rho_k$ funzioni che localmente definiscono M, vale

$$\overline{\partial} f' \wedge \overline{\partial} \rho_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} \rho_k \equiv 0$$

nei punti di M. Una ipersuperficie reale è una sottovarietà CR generica. Se una sottovarietà M di codimensione $k \geq n$ è CR-generica allora è totalmente reale. Una sottovarietà contenuta in una sottovarietà totalmente reale è totalmente reale.

Osservazione 3.3 *La nozione di struttura CR si può dare anche per una varietà reale non immersa in una varietà complessa.*
Sia M una varietà di classe $\mathcal{C}^\infty$: si dice che M è una varietà CR se esiste un sottofibrato del complessificato dello spazio tangente che sia involutivo e che abbia intersezione il solo zero con il suo coniugato.

Forma di Levi, sottovarietà Levi piatte

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$ ed ρ una funzione da U in $\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$.

Definizione 3.4 *Si dice forma di Levi di ρ in p la forma hermitiana su $T^{(1,0)}U$ definita da*

$$L_\rho(p)(v,w) = \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial \zeta^j \partial \overline{\zeta}^l} v_j \overline{w}_l \, .$$

La funzione ρ si dice *plurisubarmonica* (risp. *strettamente plurisubarmonica*) se la sua forma di Levi è semidefinita (risp. definita) positiva sui vettori del tangente olomorfo.

Sia N una varietà complessa di dimensione n e sia $M \subset N$ un'ipersuperficie reale di classe $\mathcal{C}^2$. Siano $p \in M$ e sia U un intorno di p in cui le coordinate locali sono $z_1, \dots, z_n$. Sia $\rho \in \mathcal{C}^2(U)$ una funzione di definizione per M e consideriamo la forma hermitiana

$$L_{M,p}(\rho) = L_p(\rho)|_{HT_pM} \, ,$$

cioè la forma di Levi di ρ in p ristretta all'iperpiano complesso HT_pM.

La forma $L_{M,p}(\rho)$ si chiama la *forma di Levi* di M in p (e dipende dalla funzione di definizione. Il suo *spazio nullo* è lo spazio vettoriale

$$Z_p = \{v \in HT_pM \; : \; L_\rho(p)(v,w) = 0 \, \forall \, w \in HT_pM\} \, .$$

Lo spazio nullo della forma di Levi non dipende né dalla scelta della funzione di definizione né dalle coordinate locali (cfr. [F1], p.8).
Lo spazio nullo della forma di Levi è in ogni punto un sottospazio J-chiuso del tangente della varietà complessa dato che $L(Jv,w) = L(v,Jw)$ e dato che HT_pM è J-chiuso.
La dimensione reale dello spazio nullo della forma di Levi è compresa tra 0 e $2n-2$.
Se la dimensione di Z_p non dipende dal punto, gli spazi nulli della forma di Levi costituiscono una distribuzione $\mathcal{L}$ detta la *distribuzione di Levi*. La distribuzione $\mathcal{L}$ è contenuta nella distribuzione $\mathcal{H}$.

Definizione 3.5 *L'ipersuperficie M si dice Levi piatta in un punto p se vale $Z_p = HT_pM$ e si dice Levi piatta se è Levi piatta in ogni punto.*

Si osservi che M è Levi piatta se e solo se la forma hermitiana associata alla forma di Levi di M è identicamente nulla.

Una sottovarietà Levi piatta ed analitica reale è localmente luogo di zeri di parti reali di funzioni olomorfe ed è localmente biolomorfa ad un iperpiano complesso (si veda [F1], cor. 5.2).

Se f è una funzione olomorfa da un aperto di $\mathbb{C}^m$ in $\mathbb{C}^n$ e ρ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, vale la formula

$$L_p(\rho \circ f)(w) = L_{f(p)}(\rho)(df(w)) .$$

In particolare, se $m = 1$ ed f parametrizza una curva complessa contenuta nell'insieme $\{\rho = 0\}$, il primo membro della formula è identicamente nullo quindi la forma di Levi di ρ si annulla sui vettori tangenti alla curva.

Osservazione 3.6 *Se ρ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ da un aperto U di $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{R}$ e strettamente plurisubarmonica, l'insieme $\{\rho = 0\}$ non contiene curve complesse.*

La nozione di Levi piattezza si estende alle sottovarietà CR di una varietà complessa N. Sia $M \subset N$ una sottovarietà di tipo CR, con funzioni di definizione locali $\rho_1, \ldots, \rho_k$. Si definisce

$$Z_p = \bigcap_{j=1}^{k} \left\{ v \in HT_pM \;:\; L_{\rho_j}(p)(v, w) = 0 \; \forall \, w \in HT_pM \right\} .$$

La dimensione di Z_p è compresa tra 0 e la minima dimensione CR di M ed ha un massimo locale in ogni punto (cfr. [A1]).
Se Z_p ha dimensione costante su M, la distribuzione $p \mapsto Z_p$ si dice la distribuzione di Levi. Continueremo a chiamare Z_p lo spazio nullo della forma di Levi. La sottovarietà M si dice Levi piatta se è una sottovarietà CR e vale $Z_p = HT_pM$ per ogni $p \in M$.

Sia ora Ω un aperto di N con frontiera $b\Omega$ di classe $\mathcal{C}^2$. Sia $p \in b\Omega$. Una funzione $\rho \in \mathcal{C}^2(U)$, dove U è un intorno di p in N, si dice funzione di definizione di $b\Omega$ in p se

(i) $d\rho \neq 0$ su U;

(ii) $\Omega \cap U = \{q \in U \;:\; \rho(q) < 0\}$.

L'aperto Ω si dice *debolmente pseudoconvesso* (risp. strettamente pseudoconvesso) in p se la forma di Levi di $b\Omega$ in p è semidefinita (risp. definita) positiva. La definizione è ben posta cioè non dipende né dalla funzione di definizione ρ né dal sistema di coordinate locali. L'aperto Ω si dice debolmente pseudoconvesso (risp. strettamente pseudoconvesso) se è tale in ogni punto p della sua frontiera.
Un dominio di $\mathbb{C}^n$ debolmente pseudoconvesso è un dominio d'olomorfia.

3.2 Foliazioni semiolomorfe

Studiamo adesso foliazioni le cui foglie siano varietà complesse. Si vorrebbe che una foliazione $\mathcal{F}$ determini la struttura complessa delle foglie di modo che dipenda in modo regolare dalla coordinata trasversa. Diamo quindi la definizione di foliazione semiolomorfa di Rea ([R]).

Definizione 3.7 (foliazione semiolomorfa) *Sia M una varietà reale di dimensione $2n + k$. Una foliazione semiolomorfa di codimensione k su M è un sottoatlante di una foliazione reale su M di codimensione k tale che, dette $y = (y_1, \ldots, y_k)$ la coordinata trasversa e $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$ la coordinata lungo la placca, detta*

$$z = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + ix_{n+1}, \ldots, x_n + ix_{2n}),$$

i cambiamenti di coordinate siano della forma

$$\begin{cases} z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, y_\beta) \\ y_\alpha = h_{\alpha\beta}(y_\beta) \end{cases}$$

dove la funzione $f_{\alpha\beta}$ è olomorfa rispetto a z_β.

I modelli locali sono gli aperti di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$.
Ogni placca è dotata di una struttura complessa corrispondente alle coordinate complesse della sua carta fogliata.
Una foliazione semiolomorfa di dimensione reale $2n$ determina su ciascuna foglia una struttura di varietà complessa di dimensione n, dato che i cambi della coordinata lungo la placca sono olomorfi nelle coordinate complesse indotte dalle carte.
La coordinata lungo la placca di una carta di una foliazione semiolomorfa è un insieme ordinato di coordinate reali. Con una permutazione si ottengono coordinate tali che in ogni punto p la struttura complessa J_p, indotta dalla foliazione, sia nella forma canonica di Jordan.
Un raffinamento di una foliazione semiolomorfa è ancora una foliazione semiolomorfa.
È equivalente richiedere che i cambiamenti di carta abbiano tale forma localmente o su tutto il loro dominio, è infatti sufficiente considerare un opportuno raffinamento (cfr. prop. 1.20).
Una foliazione semiolomorfa è un sottoatlante di una foliazione reale che ha dimensione pari e che risulta orientabile.
Osserviamo che esistono foliazioni semiolomorfe distinte con le stesse foglie, cioè ci possono essere foliazioni semiolomorfe che sono sottoatlanti della stessa foliazione reale, come si vede nell'esempio 4.3 (un isomorfismo reale può

non essere l'isomorfismo delle coordinate reali indotto da un isomorfismo complesso).

Proposizione 3.8 ([Bo], p.7) *Una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ è olomorfa se e solo se fa commutare le strutture complesse delle coordinate.*

Dalla proposizione segue immediatamente la seguente osservazione.

Osservazione 3.9 *È una foliazione semiolomorfa l'unione di foliazioni semiolomorfe, sottoatlanti di una stessa foliazione reale $\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^1$, che inducano la stessa struttura complessa.*

È noto che esistono varietà orientabili di dimensione pari che non ammettono una struttura complessa.
Si può dimostrare che una foliazione reale di dimensione reale 2, orientabile e trasversalmente orientabile, determina una foliazione semiolomorfa (cfr. es. 4.11).
Una generalizzazione del problema dell'esistenza di strutture complesse è l'esistenza di foliazioni semiolomorfe. Borel e Serre (1953), Wu (1952) e Adler (1969) hanno dimostrato che S^{2n} non ha strutture complesse per $n \neq 1, 3$.
Su S^1 le foliazioni sono banali, su S^3 vi sono le foliazioni semiolomorfe sottoatlanti della foliazione di Reeb (cfr. es. 4.11) inoltre Meersseman e Verjovsky (cfr. [MV]) hanno esibito un esempio di foliazione semiolomorfa su S^5.
Un problema interessante è quindi vedere se una foliazione reale ammette un sottoatlante che sia una foliazione semiolomorfa: si potrebbe vedere se esiste una foliazione semiolomorfa con la stessa regolarità della foliazione reale; si potrebbe indagare se, dal fatto che ciascuna foglia di una foliazione reale abbia una struttura complessa, segua l'esistenza di un sottoatlante che sia una foliazione semiolomorfa; si potrebbe vedere quando è sufficiente comporre le carte della foliazione reale con opportuni diffeomorfismi per ottenere un sottoatlante semiolomorfo.

Proposizione 3.10 *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di dimensione $2s$ e di classe $\mathcal{C}^1$ su una varietà M e sia $T\mathcal{F}$ di classe $\mathcal{C}^1$. Sono allora condizioni equivalenti:*

(i) la foliazione $\mathcal{F}$ ha un sottoatlante che è una foliazione semiolomorfa;

(ii) per ogni p in M è definito un endomorfismo lineare J_p di $T_p\mathcal{F}$ tale che ${J_p}^2 = -id$ ed esiste un intorno U di p su cui $T\mathcal{F}$ è generato da $2s$ campi vettoriali $X_1, \ldots, X_{2s}$ di classe $\mathcal{C}^1$ tali che $[X_n, X_m](q) = 0$ e $X_{s+n}(q) = J_q(X_n(q))$ per ogni $n, m \in 1, \ldots, 2s$, per ogni q in U.

Osserviamo che i coefficienti che esprimono J_p in coordinate locali di $T\mathcal{F}$ sono di classe $\mathcal{C}^1$.
Dim. Se esiste un sottoatlante di $\mathcal{F}$ che sia una foliazione semiolomorfa, localmente si possono portare avanti le derivazioni rispetto alle coordinate reali delle carte e si ottengono i campi voluti. Infatti esse costituiscono campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^1$ tra cui i prodotti di Lie sono nulli e come applicazione J è sufficiente considerare in ogni punto la struttura complessa delle foglie.
Viceversa, in ogni punto, grazie all'ipotesi sull'indipendenza e sull'annullamento dei prodotti di Lie, i campi come nell'ipotesi generano in un intorno U un'azione locale[1] di $\mathbb{R}^{2s}$([CL], prop. 3 p. 180). Di conseguenza esiste una foliazione per cui le derivazioni delle coordinate siano i pullback dei campi vettoriali (come nella dimostrazione del teorema di Frobenius, [CL], cor. 2 p.181).
Ordinando opportunatamente le coordinate lungo la placca, si hanno coordinate complesse sul dominio della carta tali che la struttura complessa sia J_p. Osserviamo che tale struttura complessa non dipende dalla carta. Il cambiamento di carte, ristretto a una placca, è un'applicazione di classe $\mathcal{C}^1$ che commuta con le strutture complesse delle coordinate quindi è un' applicazione olomorfa nelle coordinate complesse (cfr. prop. 3.8). Abbiamo quindi costruito un atlante di carte fogliate di classe $\mathcal{C}^1$ che è una foliazione semiolomorfa.
La foliazione reale che contiene la foliazione semiolomorfa ottenuta è $\mathcal{F}$ per l'unicità delle foliazioni con tangente di classe $\mathcal{C}^1$ assegnato. $\square$

Definizione 3.11 *Una foliazione semiolomorfa su una varietà M con bordo è un sottoatlante di una foliazione di una varietà reale con bordo per cui le proprietà richieste sul cambio di coordinate valgano sulla parte interna di M.*

Sia M una sottovarietà reale di una varietà complessa N. Sia $\mathcal{F}$ una foliazione semiolomorfa k-dimensionale e di classe $\mathcal{C}^s$ su M. Una *struttura semiolomorfa* di dimensione k e di classe $\mathcal{C}^s$ $(s = 0, \ldots \omega)$ su M è un campo Ω di sottospazi complessi di dimensione k in $T^{*\mathbb{C}}M$ di classe $\mathcal{C}^s$ tale che, per il coniugio canonico di $T^{*\mathbb{C}}M$, valga

$$\forall p \in M \, , \; \Omega_p + \overline{\Omega}_p = T_p^{*\mathbb{C}} M \, .$$

Il numero $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_p \cap \overline{\Omega_p})$ si dice la codimensione in p.

[1]Un'azione locale di $\mathbb{R}^{2s}$ su U è un' applicazione ϕ da un aperto di $\mathbb{R}^{2s} \times U$ che contenga $\{0\} \times U$ in U tale che $\phi(0, p) = p$ e $\phi(a \cdot b, p) = \phi(a, \phi(b, p))$ $\forall p \in U$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^{2s}$. Tale azione si dice generata dai campi vettoriali $X_h(p) = \frac{d}{dx^h}(tx^h, p)|_{t=0}$ per $h = 1, \ldots, 2s$.

La foliazione $\mathcal{F}$ determina una struttura semiolomorfa di codimensione costante k e classe $\mathcal{C}^s$. Infatti in ogni punto del dominio di una carta fogliata definiamo

$$\Omega = \mathbb{C}(dz_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}(dz_n) \oplus \mathbb{C}(dt_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}(dt_k)\,.$$

Le definizioni locali si rincollano dato che il cambio della coordinata lungo la placca è olomorfo nelle z. In ogni punto vale

$$\forall i \in 1, \ldots, n \quad \overline{dz_i} = d\overline{z}_i;$$

$$\Omega_p \oplus \overline{\Omega_p} \supseteq \mathbb{C}(dz_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}(dz_n) \oplus \mathbb{C}(\overline{dz}_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}(\overline{dz}_n) = T_p^{*\mathbb{C}}Y\,,$$

quindi Ω è una struttura semiolomorfa. La codimensione di Ω in ogni punto è k perché vale

$$\Omega \cap \overline{\Omega} = \mathbb{C}(dt_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}(dt_k)\,.$$

Nel caso di classe $\mathcal{C}^\infty$, sia $\mathcal{I}\Omega$ l'ideale generato da Ω nel complessificato dello spazio delle forme. Per la struttura semiolomorfa determinata da una foliazione semiolomorfa valgono le cosiddette condizioni di integrabilità:

$$d\Omega \subseteq \mathcal{I}\Omega \tag{3.1}$$

$$d(\Omega \cap \overline{\Omega}) \subseteq \mathcal{I}(\Omega \cap \overline{\Omega}) \tag{3.2}$$

Se una struttura semiolomorfa Ω di classe $\mathcal{C}^\infty$ soddisfa le condizioni di integrabilità (3.1) e (3.2), allora esiste un'unica foliazione semiolomorfa di codimensione k che la induce (si veda [R], oss. 3.3).

3.3 Foliazioni complesse

Sia M una sottovarietà reale di una varietà complessa N e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M.
Se $\mathcal{F}$ è una foliazione semiolomorfa, le foglie sono varietà complesse con la restrizione delle carte fogliate di $\mathcal{F}$ ma non è detto che le placche siano sottovarietà complesse di N. Questo infatti vorrebbe dire che la struttura complessa indotta dalla foliazione semiolomorfa su una foglia è la restrizione della struttura complessa di N. Si veda a questo proposito l'esempio 4.4.
Nel caso di sottovarietà reali di una varietà complessa si richiede allora che la struttura complessa indotta dalla foliazione sia quella indotta dalla varietà complessa ambiente. Per questo diamo la seguente definizione, che si attiene a quella data da Freeman ([F1]) e da Abe ([A1]).

Definizione 3.12 *Sia M una sottovarietà reale di una varietà complessa N. Una foliazione complessa su M è una foliazione reale su M tale che le placche siano sottovarietà complesse di N.*

Osserviamo che sono equivalenti il fatto che le placche siano sottovarietà complesse e il fatto che le foglie siano varietà complesse immerse in N con un'immersione olomorfa.
Gli spazi tangenti alle foglie sono tangenti di sottovarietà complesse quindi sono contenuti nel tangente olomorfo di M.
Le funzioni CR per una sottovarietà M di tipo CR di una varietà complessa N sono funzioni olomorfe se ristrette ad una foglia di una foliazione complessa.
Sia M una sottovarietà reale di una varietà complessa N e sia $\mathcal{F}$ una foliazione complessa su M di classe $\mathcal{C}^1$ e dimensione diversa da zero. Osserviamo che lo spazio $T\mathcal{F}$ è costituito da vettori tangenti a curve complesse contenute in M e quindi tali vettori annullano la forma quadratica associata alla forma di Levi.

Proposizione 3.13 *Sia M una sottovarietà reale della varietà complessa N. Tutte e sole le foliazioni complesse su M di classe $\mathcal{C}^2$ si ottengono integrando un campo di piani $\mathbb{D}$ su M di classe $\mathcal{C}^1$ che sia involutivo e chiuso rispetto alla struttura complessa J di N.*

Dim. È chiaro che una foliazione di classe $\mathcal{C}^2$ per cui le placche sono sottovarietà complesse ha tangente involutivo e J-chiuso. Viceversa: l'essere involutivo garantisce l'esistenza di una foliazione tangente a $\mathbb{D}$ (cfr. par. 1.3). Lo spazio tangente a una placca è J-chiuso per ipotesi quindi le placche sono sottovarietà complesse (cfr. [Bo], p.59). □
Osserviamo che una foliazione che si ottiene integrando un campo di classe $\mathcal{C}^1$ che sia involutivo e chiuso rispetto alla struttura complessa J di N ha in generale classe $\mathcal{C}^1$ ([CL] p.184) quindi la proposizione si estende nel seguente modo: una foliazione di classe $\mathcal{C}^1$ con tangente di classe $\mathcal{C}^1$ ha placche che sono sottovarietà complesse di N se e solo se il tangente è chiuso rispetto alla struttura complessa J di N.

Proposizione 3.14 *Sia M una sottovarietà reale in una varietà complessa N. Sia $\mathcal{F}$ una foliazione semiolomorfa su M tale che le placche siano sottovarietà di M di classe $\mathcal{C}^1$ e la struttura complessa indotta da $\mathcal{F}$ sulle foglie sia la restrizione di quella di N. Allora $\mathcal{F}$ è contenuta in una foliazione complessa.*

Dim. Le placche di $\mathcal{F}$ sono sottovarietà di classe $\mathcal{C}^1$ di N e il tangente a una foglia è un sottospazio chiuso rispetto alla struttura complessa di N. Questo implica che le placche siano sottovarietà complesse di N (cfr. [Bo], p.59). Allora anche la foliazione reale che contiene $\mathcal{F}$ ha placche che sono sottovarietà complesse e quindi risulta una foliazione complessa. $\square$

Proposizione 3.15 *Sia M una sottovarietà reale di una varietà complessa N e sia $\mathcal{F}$ una foliazione complessa su M di classe $\mathcal{C}^1$. Allora la foliazione $\mathcal{F}$ ha un sottoatlante massimale che sia una foliazione semiolomorfa e che induca sulle foglie la struttura complessa di N.*

Dim. Scegliamo delle carte che costituiscano una foliazione semiolomorfa.
Per ogni punto p in M si consideri una carta fogliata ϕ con dominio U che contenga p. Si può supporre che, in un intorno di p che sia contenuto in U, le placche siano grafici rispetto alle coordinate $(z_1, \ldots, z_k)$ in una carta complessa su N di coordinate $(z_1, \ldots, z_k, w_1, \ldots, w_h)$.
Come coordinata lungo la placca utilizziamo un prodotto di intervalli nelle coordinate $(\Re z_1, \ldots, \Re z_k, \Im z_1, \ldots, \Im z_k)$ e come coordinata trasversa utilizziamo un prodotto di intervalli della coordinata trasversa di ϕ.
Al variare di p si ottengono carte fogliate, che sono coerentemente fogliate dato che la coordinata trasversa è quella di carte di $\mathcal{F}$.
I cambi di coordinate lungo la placca dipendono in modo olomorfo dalla coordinata lungo la placca dato che abbiamo considerato coordinate complesse di N. L'atlante costruito è allora una foliazione semiolomorfa.
L'atlante ottenuto è contenuto in $\mathcal{F}$ infatti le placche sono ciascuna un aperto di una placca di $\mathcal{F}$.
La struttura complessa indotta dalla foliazione semiolomorfa coincide con la restrizione della struttura complessa di N, dato che le coordinate complesse sono coordinate di N.
L'unione di foliazioni semiolomorfe sottoatlanti di $\mathcal{F}$ e che inducano la stessa struttura complessa di N è ancora una foliazione semiolomorfa del medesimo tipo, grazie all'osservazione 3.9, quindi si ha una foliazione semiolomorfa del tipo voluto che sia massimale. $\square$

Una funzione su una varietà fogliata si dice pluriarmonica, olomorfa o costante *lungo le foglie* se sono tali le sue restrizioni alle foglie.
Enunciamo alcuni risultati di Bedford e Kalka ([BeK] teo 2.4, lemma 3.1, teo. 3.2, teo. 6.6), riportando le dimostrazioni meno tecniche.

Teorema 3.16 *Sia D un dominio di $\mathbb{C}^n$ e sia f una funzione su D a valori complessi, di classe $\mathcal{C}^3$ e tale che $(dd^c f)^{p+1} = 0$ e $(dd^c f)^p \neq 0$, dove*

$d^c = i(\overline{\partial} - \partial) = Jd$ *e* $dd^c = 2i\partial\overline{\partial}$.
Se $\Im f$ *è plurisubarmonica allora* D *ammette una foliazione complessa di codimensione complessa* p.
Inoltre $\Re f$ *e* $\Im f$ *sono pluriarmoniche lungo le foglie e* $\frac{\partial \Im f}{\partial z_j}$ *e* $\frac{\partial \Re f}{\partial z_j}$ *sono olomorfe lungo le foglie per ogni* $j = 1, \ldots, n$.

Un esempio in [BeK] mostra che la tesi del teorema precedente non rimane vera se si elimina l'ipotesi che $\Im f$ sia plurisubarmonica.

Proposizione 3.17 *Sia* D *un dominio di* $\mathbb{C}^n$ *e sia* $\mathcal{F}$ *una foliazione su* D *di codimensione reale* $2p$*. Localmente esiste una* $2p$*-forma chiusa tale che* $\mathrm{Ann}(\Omega) = T\mathcal{F}$*. Se* Ω' *è una* $2p$*-forma chiusa tale che* $\mathrm{Ann}(\Omega') = T\mathcal{F}$ *allora esiste una funzione* λ*, costante lungo le foglie di* $\mathcal{F}$*, tale che* $\Omega' = \lambda\Omega$*. La foliazione* $\mathcal{F}$ *è complessa se e solo se* Ω *è una forma di tipo* (p, p).

Dim. Si può scegliere come Ω il pullback della $2p$-forma chiusa $d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_{2p}$, dove $(\xi_1, \ldots, \xi_{2p})$ è la coordinata trasversa.
Dal fatto che $\mathrm{Ann}(\Omega') = T\mathcal{F}$ si ottiene $\Omega' = \lambda d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_{2p}$ quindi dalla condizione di chiusura si ottiene

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_i} = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, 2p\,.$$

Si conclude osservando che una forma di rango 1 è di tipo (p, p) se e solo se ha annullatore J-chiuso. $\square$

Proposizione 3.18 *Sia* D *un dominio di* $\mathbb{C}^n$ *e sia* $\mathcal{F}$ *una foliazione su* D *di codimensione reale* $2p$ *e di classe* $\mathcal{C}^1$*. Localmente esiste una* $(p-1, p-1)$ *forma* ω *tale che* $\mathrm{Ann}(dd^c\omega) = T\mathcal{F}$*. In particolare, se* f *ha codimensione* 1*, come* 0*-forma si può scegliere una funzione plurisubarmonica.*

Proposizione 3.19 *Sia* $\mathcal{F}$ *una foliazione complessa su* M *e sia* f *una funzione su* M *di classe* $\mathcal{C}^2$ *che sia olomorfa lungo le foglie di* $\mathcal{F}$*. Allora la parte interna dell'insieme dove* $\overline{\partial f} = 0$ *è unione di foglie.*

Proposizione 3.20 *Sia* $\mathcal{F}$ *una foliazione complessa di dimensione maggiore di zero su un dominio* D *di* $\mathbb{C}^n$*. Le foglie di* $\mathcal{F}$ *non sono relativamente compatte in* D.

Dim. Per assurdo, sia L una foglia di $\mathcal{F}$ tale che $\overline{L}$ sia compatto. La funzione $\rho(z) = |z|^2$ assume massimo R su $\overline{L}$ in un punto z_0. Sia L' la foglia passante per z_0. La funzione $\rho|_{L'}$ assume massimo su un punto interno ed è

plurisubarmonica. Ne segue che ρ è costante su una placca di L' quindi tale placca è contenuta sulla sfera bD^n_R, che ha raggio R.
Ma, dato che la sfera bD^n_R borda un dominio strettamente pseudoconvesso, non può contenere curve complesse (cfr. oss. 3.6) e quindi si ottiene un assurdo. $\square$

Capitolo 4

Esempi di foliazioni semiolomorfe

4.1 Esempi vari

Esempio 4.1 (Foliazioni olomorfe) Sia $\mathcal{F}$ una foliazione reale di dimensione reale $2n$ su una $(2n+2k)$-varietà reale M. Siano $(x_1, \ldots, x_{2n})$ e $(y_1, \ldots, y_{2k})$ rispettivamente la coordinata lungo la placca e la coordinata trasversa di una carta fogliata. Consideriamo le coordinate complesse

$$(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n) = (x_1 + ix_{n+1}, \ldots, x_n + ix_{2n}, y_1 + iy_{k+1}, \ldots, y_k + iy_{2k}).$$

Un sottoatlante di $\mathcal{F}$ si dice una *foliazione olomorfa* di codimensione complessa k se i cambiamenti di coordinate sono della forma

$$\begin{cases} z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta, w_\beta) \\ w_\alpha = h_{\alpha\beta}(w_\beta) \end{cases}$$

con $f_{\alpha\beta}$ ed $h_{\alpha\beta}$ olomorfe (si veda [R]).
Una foliazione olomorfa è una foliazione semiolomorfa analitica reale, è orientabile e trasversalmente orientabile e le placche risultano sottovarietà complesse di M in quanto su M si considera la struttura di varietà complessa indotta dalla foliazione.
Due foliazioni olomorfe su una varietà connessa che coincidono su un aperto non vuoto sono uguali (cfr. prop. 1.28).
Per le foliazioni olomorfe su una varietà complessa M vi è l'analogo del teorema di Frobenius delle foliazioni reali ([Bo], p.58).

Proposizione 4.2 *Sia M una varietà complessa e sia $\mathbb{D}$ una distribuzione in*

$T^{(1,0)}M$, involutiva ed olomorfa[1]*. Allora esiste un'unica foliazione olomorfa su M che abbia come tangente $\mathbb{D}$.*

L'unicità si deve al fatto che si considerano carte dell'atlante di M, altrimenti sarebbe stato in generale possibile completare in modi differenti le coordinate complesse di $\mathbb{D}$.

Esempio 4.3 La carta fogliata su $\mathbb{R}^n$ data dall'isomorfismo canonico con $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ definisce una foliazione $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^n$ di codimensione q, analitica reale e con foglie diffeomorfe a $\mathbb{R}^{n-q}$.
Se $(n-q)$ è è pari, $\mathcal{F}$ ha un sottoatlante che sia una foliazione semiolomorfa.
Un semplice esempio di foliazione reale che ammette due sottoatlanti che siano foliazioni semiolomorfe ma la cui unione non sia una foliazione semiolomorfa è il seguente.
Sia $\mathcal{F}$ la foliazione di codimensione 1 in $\mathbb{R}^3$ con foglie i piani della forma $\{x_3 = \text{costante}\}$. Come coordinata complessa su una foglia si può prendere $x_1 + ix_2$ oppure $x_2 + ix_1$ e tali coordinate non cambiano in modo olomorfo.
Le carte

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_3) \qquad (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, x_3)$$

sono allora foliazioni semiolomorfe distinte sottoatlanti della stessa foliazione reale.
Ogni foliazione reale su una n-varietà che ammetta un sottoatlante semiolomorfo ne ammette infiniti tali che l'unione di due non sia una foliazione semiolomorfa. Infatti basta comporre carte fogliate a valori in $\mathbb{R}^n$ con uno stesso diffeomorfismo che alteri solo la coordinata lungo la placca e si ottengono infinite strutture complesse distinte.

Esempio 4.4 Consideriamo la varietà complessa $\mathbb{C}^3$ e consideriamo un iperpiano reale di dimensione reale 3 che abbia dimensione CR nulla cioè un iperpiano totalmente reale, ad esempio

$$\{y_1 = y_2 = y_3 = 0\} \ .$$

La carta di coordinate (x_1, x_2, x_3), dove x_3 è la coordinata trasversa, è una foliazione semiolomorfa ma nessun sottospazio non nullo del tangente dell'iperpiano è J-invariante quindi le placche non sono sottovarietà complesse di $\mathbb{C}^3$ e la foliazione reale che contiene tale foliazione semiolomorfa non è complessa.

[1] Una distribuzione su una varietà complessa M si dice olomorfa se localmente è generata da campi vettoriali che hanno componenti olomorfe in un sistema di coordinate di TM.

Esempio 4.5 Consideriamo $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$ con la topologia prodotto. Siano placche gli insiemi $\mathbb{C}^n \times \{x\}$ con $x \in \mathbb{R}^k$ e le coordinate complesse siano quelle di $\mathbb{C}^n$. Si ha allora una foliazione semiolomorfa di dimensione reale $2n$. Analogamente, se le placche sono i traslati di una sottovarietà complessa di $\mathbb{C}^n$, si ottiene una foliazione semiolomorfa.

Esempio 4.6 Sia N una varietà complessa e M una sottovarietà reale di N. Se un intorno di M in N ammette una foliazione olomorfa per cui M sia unione di foglie, allora le foglie contenute in M costituiscono una foliazione semiolomorfa e complessa su M.
Sono di questo tipo le foliazioni su un iperpiano reale di $\mathbb{C}^n$ che hanno come foglie i traslati di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^n$.

Esempio 4.7 Sia M una sottovarietà reale di una varietà complessa N. Consideriamo in un aperto U di N una base locale di TN del tipo

$$\{v_1(p), Jv_1(p), \ldots, v_n(p), Jv_n(p)\}_{p \in U} \ .$$

Sono totalmente reali le sottovarietà di U con tangente contenuto in

$$\mathcal{V} = \{\alpha_i(p)v_i(p) + \beta_i(p)Jv_i(p)\}_{i=1}^n \ ,$$

con $\alpha_i(p) \neq -\beta_i(p)$, per p in U. In particolare, se TM è contenuto in $\mathcal{V}$, non esistono foliazioni complesse su M di dimensione maggiore di zero.

Esempio 4.8 ([A2]) Sia f una funzione olomorfa da $\mathbb{C}$ in sè tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ ed f non sia identicamente nulla. Consideriamo l'ipersuperficie reale M in $\mathbb{C}^3$ di equazione

$$\rho(z_1, z_2, z_3) = \Re z_1 + |f(z_2)|^2 = 0 \, .$$

L'equazione non dipende da z_3 quindi l'ipersuperficie è unione di rette complesse nella direzione z_3 che sono le foglie di una foliazione complessa su M. La dimensione dello spazio nullo della forma di Levi (cfr. def. 3.1) non è costante: ha dimensione reale 2 sulla retta complessa di equazioni $\{\Re z_1 = 0, z_2 = 0\}$ e vale 1 altrimenti.

Esempio 4.9 Riportiamo un controesempio al fatto che il tangente di una foliazione complessa sia contenuto nella distribuzione di Levi, come accade nel caso di sottovarietà Levi piatte in cui lo spazio nullo è il tangente olomorfo. Il tangente di una foliazione complessa è costituito in ogni punto da vettori che annullano la forma quadratica della forma di Levi ma non è detto che

tali vettori appartengano allo spazio nullo di Levi.
Si consideri l'ipersuperficie in $\mathbb{C}^3$

$$\{\rho(z_1, z_2, z_3) = z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - z_3\overline{z}_3 - 1 = 0\} \ .$$

Lo spazio nullo della forma di Levi di ρ ha dimensione costantemente zero. L'intersezione dell'ipersuperficie con $\mathbb{C}_{z_3} = 0$ sono punti del tipo $(\alpha, \beta, 0)$ tali che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Per ognuno di questi punti passa una retta complessa, contenuta nell'ipersuperficie, della forma

$$\begin{cases} z_1 = \alpha + \overline{\beta} z_3 \\ z_2 = \beta - \overline{\alpha} z_3 \ . \end{cases}$$

Sommer ([So], p.407) dimostra che, per ogni punto dell'ipersuperficie, passa una e una sola retta di tale famiglia. Esiste quindi una foliazione complessa di dimensione complessa 1 le cui foglie sono quelle rette.

Esempio 4.10 Quozientiamo lo spazio $\mathbb{C}_{(x,y)} \times \mathbb{R}_z$ mediante le seguenti identificazioni:

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} \quad (x, y, z) \equiv (x, y + m, z);$$

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\,,\, \forall\, x \notin \mathbb{N} \quad (x, y, z) \equiv (x + n, y, z);$$

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}\,,\, \forall x \in \mathbb{N} \quad (x, y, z) \equiv (x + n, y, z(-1)^n)\,.$$

L'insieme descritto è una varietà reale fogliata con tori complessi 1-dimensionali, quozienti degli insiemi $\{z = \text{costante}\}$.
Analogamente, considerando $\mathbb{C}^n$ al posto di $\mathbb{C}$, si ottengono foliazioni semiolomorfe le cui foglie sono n-tori complessi.

Esempio 4.11 ([MS], p.287) Sia M una varietà di dimensione k e sia $\mathcal{F}$ una foliazione su M di dimensione 2, orientabile e di classe $\mathcal{C}^\infty$. Fissiamo un'orientazione di $T\mathcal{F}$. Una metrica Riemanniana su $T\mathcal{F}$ determina una struttura complessa sulla foglia che varia in modo $\mathcal{C}^\infty$ lungo la coordinata trasversa.
Infatti esistono carte fogliate di M con coordinate $(\xi, \eta, y_1, \ldots, y_{k-2})$, dove (ξ, η) sono la coordinata lungo la placca, per cui la metrica su ciascuna foglia si possa scrivere come $\lambda(\xi, \eta)(d\xi \otimes d\xi + d\eta \otimes d\eta)$ con λ una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ (ξ, η si dicono coordinate isoterme).
Posto $z = \xi + i\eta$ si ottengono coordinate complesse sulle foglie che cambiano in modo olomorfo e dipendono differenziabilmente da $y_1, \ldots, y_{k-2}$ quindi esiste un sottoatlante di $\mathcal{F}$ che è una foliazione semiolomorfa.

Le coordinate ξ, η si trovano risolvendo l'equazione di Beltrami con parametri $y_1, \ldots, y_{k-2}$. Se la metrica sulle foglie si scrive come

$$Edx_1 \otimes dx_2 + 2Fdx_1 \otimes dx_2 + Gdx_2 \otimes dx_2\,,$$

con (x_1, x_2) coordinate lungo la placca ed E,F,G funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$, l'equazione di Beltrami è (cfr. [Mo])

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{x}} = \mu(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}\,,$$

dove $x = x_1 + ix_2$ e

$$\mu(x,y) = \frac{\sqrt{EG - F^2} - G + iF}{\sqrt{EG - F^2} + G - iF}\,.$$

Ad esempio le foliazioni di Reeb sul toro solido e su S^3 hanno dimensione reale 2 quindi ammettono un sottoatlante semiolomorfo.

4.2 Costruzione di foliazioni

Riprendiamo i metodi esposti a pagina 23: restrizione, prodotto, intersezione trasversa, pullback, omeomorfismi.
Indaghiamo adesso se si possano ottenere foliazioni dello stesso tipo a partire da foliazioni complesse o semiolomorfe.

Esempio 4.12 Se $\mathcal{F}$ è semiolomorfa o complessa, tale è ogni sua restrizione ad un aperto.

Esempio 4.13 Se $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ sono foliazioni semiolomorfe, anche il loro prodotto è una foliazione semiolomorfa.
Se M e M' sono sottovarietà reali di due varietà complesse N ed N' ed $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}'$ sono foliazioni complesse rispettivamente su M ed M' allora il prodotto è una foliazione complessa su $M \times M'$ (sottovarietà reale di $N \times N'$).

Esempio 4.14 Dato che la dimensione dell'intersezione delle foglie potrebbe avere dimensione dispari non è detto in generale che, mediante l'intersezione trasversa, si ottenga una foliazione con foglie che sono varietà complesse.
Supponiamo allora che la dimensione di G sia pari. Il tangente potrebbe non essere chiuso rispetto alle strutture complesse indotte da $T\mathcal{F}$ e $T\mathcal{F}'$.
Per quanto riguarda invece il caso immerso e foliazioni complesse, data la condizione imposta sui tangenti, l'intersezione delle placche è ancora una sottovarietà complessa e quindi l'intersezione trasversa risulta una foliazione complessa.

Esempio 4.15 Mediante il pullback di foliazioni si possono portare indietro le strutture complesse e quindi si mantiene la proprietà che una foliazione sia semiolomorfa.

Esempio 4.16 Mediante un omeomorfismo si mantiene la proprietà di essere una foliazione semiolomorfa.
In generale, se le due varietà considerate sono sottovarietà di due varietà complesse, non è detto che venga mantenuta la condizione di foliazione complessa. Ad esempio in $\mathbb{C}^5$ un isomorfismo delle coordinate reali può mandare un 2-piano complesso in sè e una sua foliazione in rette complesse in una foliazione in 2-piani totalmente reali.

4.3 Esempi dalle foliazioni reali

Descriviamo adesso esempi di foliazioni reali orientabili di dimensione pari. Esse potrebbero ammettere un sottoatlante che sia una foliazione semiolomorfa. Nel caso in cui la varietà reale sia una sottovarietà di una varietà complessa, indaghiamo se la foliazione è complessa.

Esempio 4.17 Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su una varietà reale senza bordo M. Consideriamo, nel dominio di una carta fogliata, la funzione che associa ad un punto la sua coordinata trasversa: tale applicazione è una submersione.
La restrizione di una foliazione a una carta locale è allora definita da una submersione cioè le foglie sono gli insiemi di livello di una submersione.
In generale una foliazione non è definita globalmente da una submersione (ad es. la foliazione di Reeb su $D^2 \times S^1$).
Ogni submersione definisce una foliazione. Sia f una submersione da V in M di classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) e sia M una q-varietà reale senza bordo. Le componenti connesse degli insiemi di livello non vuoti di f sono le foglie di una foliazione su V di codimensione q e di classe $\mathcal{C}^k$. Il modello locale di una submersione è infatti una proiezione.
Se M è orientabile, la foliazione su V è trasversalmente orientabile.
Fissato p in V, esiste un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^k$ tra una sezione trasversa in p ed un intorno di $f(p)$ in M e l'olonomia è banale.
Siano V ed M varietà complesse ed f una funzione olomorfa da V in M che abbia differenziale in ogni punto suriettivo. La funzione f è una submersione e gli insiemi di livello definiscono una foliazione complessa.
Consideriamo il seguente esempio: sia f una funzione

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R}) \quad k \geq 1$$

e siano

$$f_c : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad f_c(x) = f(x) + c \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

I grafici delle funzioni f_c sono dei traslati del grafico Γ di f e costituiscono una foliazione $\mathcal{F}$ di $M \times \mathbb{R}$ di codimensione 1 e di classe $\mathcal{C}^k$. La mappa

$$M \times \mathbb{R} \ni (p, y) \mapsto y - f(p) \in \mathbb{R}$$

è una submersione. Se Γ è una varietà complessa con un atlante composto da restrizioni di carte fogliate allora anche le altre foglie di $\mathcal{F}$ lo sono e si può fare in modo che la traslazione lungo la coordinata y sia un biolomorfismo. Quindi $\mathcal{F}$ ammette un sottotlante che è una foliazione semiolomorfa.
Se M è una sottovarietà reale di una varietà complessa N tale che Γ sia una varietà complessa immersa in N con un'immersione olomorfa, allora $\mathcal{F}$ è una foliazione complessa.

Esempio 4.18 Sia M una varietà di dimensione n e di classe $\mathcal{C}^r$ $(r \geq 1)$ e sia ω una 1-forma chiusa di classe $\mathcal{C}^r$. La forma ω induce una foliazione di codimensione 1 e di classe $\mathcal{C}^r$ sul complementare del suo insieme degli zeri. Su aperti connessi dove ω è esatta, la primitiva è una submersione e determina quindi una foliazione locale inoltre, perché le primitive differiscono per una costante, le foliazioni locali si incollano.
Sul complementare degli zeri di ω, il nucleo di ω è un campo di $(n-1)$-piani involutivo e quindi è il tangente di una foliazione di codimensione 1.
Si possono considerare h 1-forme chiuse, di classe $\mathcal{C}^r$ $(r \geq 1)$ e linearmente indipendenti in ogni punto. Se il nucleo di tali forme è un campo di dimensione $n - h$ involutivo allora è il tangente di una foliazione su M. Tale foliazione è di classe $\mathcal{C}^r$, è trasversalmente orientabile e l'olonomia di ciascuna foglia è banale (cfr. [CL] p.193).

Esempio 4.19 Un'azione di un gruppo di Lie G su una varietà M è un'applicazione ϕ tale che

$$\phi : G \times M \to M\,; \quad \forall\, x \in M\; \forall\, s, t \in G \quad \phi(e, x) = x;\; \phi(st, x) = \phi(s, \phi(t, x))\,.$$

L'orbita di un punto x è $\phi(G \times \{x\})$, il gruppo di isotropia di un punto x è il sottogruppo di G definito come

$$\{g \in G :\; \phi(g, x) = x\}\;.$$

Il quoziente di G rispetto al gruppo di isotropia di x ha una struttura differenziabile e si immerge nell'orbita di x inoltre le orbite sono varietà immerse in M. Se lo spazio tangente alle orbite ha dimensione costante, le componenti

connesse delle orbite costituiscono le foglie di una foliazione su M (cfr. [CL], prop. 1 p.29).
Se il gruppo di Lie è $\mathbb{C}$, la varietà è complessa e l'azione è olomorfa, il campo vettoriale indotto è olomorfo quindi, se tale campo è non nullo, definisce una foliazione olomorfa di dimensione complessa 1.
Consideriamo la seguente azione di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}^n$, data una matrice quadrata A di dimensione n e non singolare:

$$\Phi(t, z) = e^{t\,A}(z) \quad \forall\, t \in \mathbb{C} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^n\,.$$

Il campo indotto in un punto z di $\mathbb{C}^n$ è $A\,z$ e (dato che A è non singolare) Φ definisce una foliazione olomorfa di dimensione complessa 1 su $\mathbb{C}^n - \{0\}$. Se la matrice A è diagonale e i suoi autovalori hanno argomenti distinti, gli autospazi sono foglie della forma $\mathbb{C} - \{0\}$. Se la matrice è diagonale e 0 non appartiene all'inviluppo convesso degli autovalori, esiste un numero complesso non nullo r_0 tale che

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t\,r_0, z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}^n$$

ed esiste quindi la sfera S^{2n-1} è trasversa alle orbite dell'azione ristretta a $(\mathbb{R}r_0) \times \mathbb{C}^n$. Su tale sfera viene indotta una foliazione reale di dimensione reale 1. L'intersezione degli autospazi con S^{2n-1} è una curva chiusa mentre le altre foglie sono omeomorfe ad $\mathbb{R}$ (cfr. [CL], pp. 43-44). Se la matrice A è l'identità viene indotta su S^{2n-1} la fibrazione di Hopf, cioè la foliazione che deriva dall'azione

$$\phi : S^1 \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}\,\text{tale che} \quad \phi(\theta, z_1, \ldots, z_n) = (e^{i\theta} z_1, \ldots, e^{i\theta} z_n).$$

Le foglie della fibrazione di Hopf sono omeomorfe ad S^1, il gruppo di isotropia è l'identità e lo spazio delle orbite è una varietà complessa omeomorfa a $\mathbb{CP}^{n-1}$ (si veda [CL], cap.2, nota 2).

Esempio 4.20 Sia $\mathcal{F}$ una foliazione su un fibrato M di classe $\mathcal{C}^r$ con base B, proiezione π e fibra F. Sia π di classe $\mathcal{C}^k$ e siano n, q, $n-q$ le rispettive dimensioni di M,B,F. In generale la proiezione di una foglia di $\mathcal{F}$ sulla base non è suriettiva ([CC1] es. p. 50).
Sia M un fibrato con gruppo strutturale discreto, cioè un fibrato in cui vi sono banalizzazioni locali per cui il cambio della coordinata sulla fibra localmente non dipende dalla coordinata sulla base.
In questo case si ottiene un atlante fogliato da restrizioni delle banalizzazioni locali composte con il prodotto di carte di B e di carte di F (le placche corrispondono ad un punto di F).

La foliazione ottenuta su M è di classe $\mathcal{C}^k$ e dimensione q, inoltre la foliazione è trasversa alle fibre cioè la proiezione ristretta a ciascuna foglia è un rivestimento su B e le fibre $\pi^{-1}(x)$ sono sezioni trasverse che incontrano ogni foglia.
Nel caso di una foliazione trasversa alle fibre si può dare una rappresentazione del π_1 della base nei diffeomorfismi della fibra. Si solleva un cammino chiuso ad un cammino in una foglia: fissato un punto base $p_0 \in B$, la mappa che associa ad un cammino chiuso il valore nella fibra del punto finale del suo sollevamento è un diffeomorfismo della fibra ed è la composizione di mappe di cociclo. L'insieme di tali diffeomorfismi della fibra si dice *gruppo totale di olonomia*.
Osserviamo che l'olonomia di una foglia si può studiare tramite i gruppi totali di olonomia di opportuni fibrati.
Il fibrato banale $B \times F$ ha gruppo strutturale discreto e una foliazione trasversa alle fibre ha foglie $B \times \{p\}$ tale che $p \in F$.
Le fibre sono sezioni trasverse, le foglie sono diffeomorfe alla base tramite la restrizione di π e l'olonomia è banale.

Capitolo 5

La foliazione di Levi

5.1 La foliazione di Levi

Sia M una sottovarietà reale di classe $\mathcal{C}^2$ in una varietà complessa N.

Definizione 5.1 *Una foliazione reale su M che abbia come spazi tangenti alle foglie la distribuzione di Levi viene detta la foliazione di Levi.*

Nel caso di sottovarietà Levi piatte, il tangente olomorfo è involutivo quindi, per il teorema di Frobenius, si ha l'esistenza ella foliazione di Levi.
Barrett e Fornaess dimostrano in [BaF] che la foliazione di Levi di un'ipersuperficie Levi piatta di classe $\mathcal{C}^k$ è una foliazione di classe $\mathcal{C}^k$: dal teorema di Frobenius si otterrebbe solo che la foliazione è di classe $\mathcal{C}^{k-1}$, dato che $\mathcal{H}$ è di classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
Se lo spazio nullo della forma di Levi di M ha dimensione costante e la distribuzione di Levi è di classe $\mathcal{C}^1$ e involutiva, per il teorema di Frobenius, esiste unica la foliazione di Levi.
Vale il seguente risultato, di cui si trovano dimostrazioni in [F1] (teo. 6.1), in [BeK] (teo 4.1) e in [F2].

Teorema 5.2 *Sia M una sottovarietà CR di classe $\mathcal{C}^2$ in una varietà complessa N e sia tale che lo spazio nullo della forma di Levi abbia dimensione costante. Allora la distribuzione di Levi è involutiva.*

La foliazione di Levi è una foliazione complessa, dato che il suo tangente è in ogni punto un sottospazio chiuso rispetto alla struttura complessa di N.
Non è vero che lo spazio tangente a una foliazione complessa sia contenuto in ogni punto nello spazio nullo di Levi (si veda es. 4.9) ma ciò accade nel caso di sottovarietà Levi piatte.

Proposizione 5.3 *Sia M una sottovarietà CR di classe $\mathcal{C}^2$ di una varietà complessa N. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) la sottovarietà M è Levi piatta;

(ii) la distribuzione di Levi ha dimensione costante $\dim_{\mathbb{C}} HTM$*;*

(iii) esiste su M una foliazione con tangente HTM;

(iv) esiste su M una foliazione complessa di classe $\mathcal{C}^1$, con tangente di classe $\mathcal{C}^1$ e di dimensione complessa $\dim_{\mathbb{C}} HTM$*;*

(v) la distribuzione $\mathcal{H}$ è involutiva.

Dim.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Se M è Levi piatta, lo spazio nullo della forma di Levi coincide con il tangente olomorfo e quindi la distribuzione di Levi ha dimensione $\dim_{\mathbb{C}} HTM$.
(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Per il teorema 5.2 la distribuzione di Levi è involutiva e la foliazione complessa ottenuta ha tangente contenuto nel tangente olomorfo di M e della stessa dimensione.
(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* La distribuzione $\mathcal{H}$ ha classe $\mathcal{C}^1$ dato che M ha classe $\mathcal{C}^2$ quindi è il tangente di una foliazione di classe $\mathcal{C}^1$.
(iv) $\Rightarrow$ *(v)* Una foliazione complessa di classe $\mathcal{C}^1$, con tangente di classe $\mathcal{C}^1$ e della stessa dimensione del tangente olomorfo ha come tangente il tangente olomorfo, in particolare $\mathcal{H}$ è involutiva.
(v) $\Rightarrow$ *(i)* La distribuzione $\mathcal{H}$ ha classe $\mathcal{C}^1$, dato che M ha classe $\mathcal{C}^2$. Se la distribuzione del tangente olomorfo è involutiva, esiste una foliazione complessa con tangente $\mathcal{H}$. Allora tutti i vettori del tangente olomorfo annullano la forma quadratica della forma di Levi quindi è nulla la forma di Levi sul tangente olomorfo e la sottovarietà è Levi piatta. □

Grazie alla proposizione 5.3, possiamo estendere la nozione di Levi piattezza alle sottovarietà di classe $\mathcal{C}^1$. Una sottovarietà M di tipo CR e di classe $\mathcal{C}^1$ di una varietà complessa N è Levi piatta se e solo se ammette una foliazione complessa di dimensione pari alla sua dimensione CR.

Se M è una sottovarietà reale di classe $\mathcal{C}^2$ e CR generica, vale la seguente corrispondenza: M è Levi piatta di codimensione reale k se e solo se esiste su M una foliazione complessa con foglie di codimensione complessa k.

Se una sottovarietà di classe $\mathcal{C}^2$ è Levi piatta, le funzioni CR su M sono tutte e sole le funzioni su M olomorfe lungo le foglie della foliazione di Levi.

Sia M una sottovarietà reale di una varietà complessa N e sia J la sua struttura complessa.

Proposizione 5.4 (cfr. [BeK], teo.4.2) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione complessa su M tale che il fibrato complesso normale*[1] $N^*M^{1,0}$ *di M sia olomorfo lungo le foglie. Allora il tangente di $\mathcal{F}$ è contenuto nella distribuzione di Levi. Il fibrato complesso normale ad M, ristretto a una foglia della foliazione di Levi di M, è olomorfo.*

Proposizione 5.5 ([Ba1], prop. 1) *Sia M un'ipersuperficie Levi piatta in una varietà complessa N. Esiste una funzione pluriarmonica in un intorno di M tale che $d^c r$ abbia come annullatore il tangente olomorfo di M se e solo se esiste una 1-forma chiusa analitica reale che abbia come annullatore il tangente olomorfo di M.*

Dim. Sia r una funzione pluriarmonica in un intorno di M. La funzione r è costante sulle foglie della foliazione di Levi, dato che l'espressione $\partial\overline{\partial}r = 0$ su un sottospazio J-chiuso di TM (qui HTM) è equivalente all'annullarsi della forma di Levi di r su tale sottospazio. La 1-forma $d^c r$ è analitica reale, ha come annullatore HTM ed inoltre è chiusa dato che $\partial\overline{\partial}r = 0$.
Viceversa sia η una 1-forma chiusa che abbia HTM come annullatore. Localmente esistono primitive. Le primitive sono funzioni di tipo CR analitiche reali e con differenziale non nullo su M quindi si estendono su aperti di N a funzioni olomorfe con differenziale η sui punti di M (cfr. [Bo], p.141). Queste funzioni olomorfe, per il pincipio di indentità, differiscono per una costante reale. Le parti immaginarie delle funzioni olomorfe definiscono una funzione pluriarmonica v su M tale che $d^c v$, ristretta ad M, abbia come annullatore il tangente olomorfo di M. □

5.2 Esempi

Esempio 5.6 Una sottovarietà totalmente reale è banalmente Levi piatta e ogni sottovarietà contenuta in una sottovarietà totalmente reale è anch'essa totalmente reale.
Le sottovarietà reali di dimensione 1, essendo totalmente reali, sono Levi piatte.

Esempio 5.7 Sia N una varietà complessa. Le sottovarietà complesse di N sono Levi piatte. La foliazione di Levi ha codimensione 0 in quanto il tangente reale ed il tangente olomorfo coincidono. Le foglie della foliazione di Levi sono le componenti connesse della sottovarietà complessa.

[1] L'intersezione del complessificato di TM con $T^{1,0}N$.

Esempio 5.8 Un iperpiano reale in $\mathbb{C}^n$ di codimensione 1 è una sottovarietà CR analitica reale. Inoltre è unione di iperpiani complessi di codimensione complessa 1.
L'iperpiano reale è dunque Levi piatto e la foliazione di Levi è costituita dagli iperpiani complessi di codimensione 1 contenuti nell'iperpiano reale ed è analitica reale.
Le ipersuperficie analitiche Levi piatte di una varietà complessa sono localmente biolomorfe ad iperpiani reali.

Esempio 5.9 Sia u una funzione pluriarmonica in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n;\mathbb{R})$ tale che $du \neq 0$. Una tale funzione è la parte reale di una funzione olomorfa, unica a meno di una costante immaginaria. L'insieme $M = \{u = 0\}$ è un'ipersuperficie reale Levi piatta. Infatti se $u = \Re f$ e $df \neq 0$ per una funzione f olomorfa su $\mathbb{C}^n$, gli insiemi del tipo

$$\{f = ic \,:\, c \in \mathbb{R}\}$$

sono ipersuperficie complesse di $\mathbb{C}^n$ contenute in M. Esse costituiscono le foglie della foliazione di Levi di M.
Analogamente, se una sottovarietà reale di $\mathbb{C}^n$ è luogo di zeri delle parti reali di k ($k < n$) funzioni olomorfe con differenziali linearmente indipendenti in ogni punto, allora ha una foliazione con foglie l'intersezione degli insiemi di livello corrispondenti a valori immaginari puri. Tali foglie sono varietà complesse immerse in $\mathbb{C}^n$ con un'immersione olomorfa e costituiscono una foliazione di classe $\mathcal{C}^\infty$ che ha come tangente il tangente olomorfo (le dimensioni sono uguali e la foliazione è complessa). La sottovarietà è quindi Levi piatta (cfr. prop. 5.3) e la foliazione descritta è la foliazione di Levi.

Esempio 5.10 ([BaI], p.491) Esibiamo una ipersuperficie Levi piatta in $\mathbb{C}^2$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ per cui la foliazione di Levi ha una foglia con olonomia infinitesima ma non banale.
Questo esempio va confontato con il teorema 7.21, che afferma invece che l'olonomia è banale sotto due ulteriori ipotesi: la compattezza (l'ipersuperficie dell'esempio non è limitata in $\mathbb{C}^2$) e la foglia diffeomorfa a un toro (quella dell'esempio è un disco meno un punto).
Consideriamo l'immagine della varietà

$$V = \left\{(\zeta, t) \in \mathbb{C}^2 \mid t \in \mathbb{R},\ \Re\zeta < 0\right\}$$

mediante l'applicazione

$$\Psi(\zeta, t) = \begin{cases} (e^\zeta,\ [\log(e^{\frac{1}{t}} + i\zeta)]^{-1}) & \text{per } t > 0 \\ (e^\zeta,\ t) & \text{per } t \leq 0 \end{cases} .$$

L'insieme V è un'ipersuperficie reale di $\mathbb{C}^2$ Levi piatta, di classe $\mathcal{C}^\infty$, diffeomorfa ad un aperto di $\mathbb{R}^3$, le foglie della sua foliazione di Levi sono gli insiemi di livello di t, inoltre si ha

$$\Psi(V) \subseteq B = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid 0 < \ |z| \ < 1\right\}.$$

L'applicazione Ψ è un diffeomorfismo locale di classe $\mathcal{C}^\infty$.
I punti di V che hanno la stessa immagine di un punto fissato (ζ, t) tramite Ψ sono esattamente i punti $(\zeta - 2k\pi i, \psi^k(t))$, dove $k \in \mathbb{Z}$ e ψ è definita come

$$\psi(t) = \begin{cases} \left[\log(e^{\frac{1}{t}} - 2\pi)\right]^{-1} & \text{per } t > 0 \\ t & \text{per } t \leq 0 \end{cases} .$$

Le immagini delle foglie della foliazione di Levi si V costituiscono una foliazione complessa $\mathcal{F}$ di codimensione 1 sulla ipersuperficie reale $\Psi(V)$ della varietà complessa B ed in particolare $\Psi(V)$ è Levi piatta. Vengono identificate tutte e sole le foglie di V con parametri positivi che si ottengono uno dall'altro applicando ψ un numero finito di volte. Segue che i germi dell' olonomia sono del tipo

$$\left\{\psi^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Per la foglia $\{t = 0\}$ il gruppo di olonomia è non banale.
La funzione ψ ha germe in zero somma del germe dell'identità e del germe di un'applicazione infinitesima quindi ciò vale anche per ψ^k $(k \in \mathbb{Z})$ e l'olonomia è infinitesima.
Infine osserviamo che, l'olonomia delle foglie con parametro negativo e non nullo è banale: questa proprietà non passa 'al limite'.

Esempio 5.11 (Tori CR) Sia Γ un reticolo generato da $2n$ vettori di $\mathbb{C}^n$ indipendenti su $\mathbb{R}$. Allora si dice un toro complesso n-dimensionale la varietà complessa

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{C}^n / \Gamma .$$

Un toro complesso è, in particolare, un toro reale di dimensione $2n$.
Sia Γ un reticolo di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$ generato da $2n + k$ vettori indipendenti su $\mathbb{R}$. Lo spazio quoziente

$$\mathbb{T}^{(n,k)} = (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k)/\Gamma$$

si dice un toro CR ed è una varietà CR di dimensione $CR\dim \mathbb{T}^{(n,k)} = n$.
Si ottiene una foliazione semiolomorfa con foglie le immagini al quoziente degli insiemi $\mathbb{C}^n \times \{p\}$ con p in $\mathbb{R}^k$.
Se il reticolo Γ si immerge in un reticolo Γ' in $\mathbb{C}^{n+k}$ di rango $2n + 2k$, il toro $\mathbb{T}^{(n,k)}$ si immerge nel toro complesso $\mathbb{T}^{n+k} = \mathbb{C}^{n+k}/\Gamma'$ come sottovarietà

Levi piatta di codimensione reale k e di CR-dimensione n. La foliazione semiolomorfa descritta diventa, con l'immersione, una foliazione complessa di dimensione complessa n.

L'esempio di Grauert

L'esempio di Grauert (cfr. [MR] p.696) mostra un aperto di una varietà complessa, a chiusura compatta, con frontiera differenziabile e debolmente pseudoconvessa, per cui le uniche funzioni olomorfe sull'aperto sono le costanti.
Questo dimostra che, contrariamente a quanto avviene per $\mathbb{C}^n$ o per una varietà di Stein, la condizione di debole pseudoconvessità sulla frontiera non è sufficiente a garantire che l'aperto sia una varietà di Stein.
Consideriamo il toro reale $2n$-dimensionale

$$\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$$

e l'aperto

$$\Omega = \left\{(x_1, \ldots, x_{2n}) \,:\, |x_1 - \frac{1}{2}| > \frac{1}{8}\right\} / \,\mathbb{Z}^{2n} \;\subseteq \mathbb{T}^{2n}.$$

L'insieme

$$T = \left\{(x_1, \ldots, x_{2n}) \,:\, x_1 = \frac{1}{4}\right\} / \,\mathbb{Z}^{2n} \simeq \;\mathbb{R}^{2n-1}/\mathbb{Z}^{2n-1}$$

è un toro $2n-1$-dimensionale contenuto in Ω.
L'insieme T contiene sottoinsiemi densi della forma

$$E_r = \;\left\{(x_1, \ldots, x_{2n}) : \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{j=2}^{2n} a_j x_j = r, \quad r \in \mathbb{R}\right\} / \,\mathbb{Z}^{2n-1}\,.$$

Basta che sia denso l'insieme E_0, dato che gli altri insiemi sono suoi traslati in T. Scegliendo come coefficienti a_j numeri irrazionali per cui il rapporto tra ogni coppia di essi sia irrazionale si ottiene che

$$\left\{\sum_{h=1}^{2n-1} a_j y_h = 0\right\} /\mathbb{Z}^{2n-1}$$

è denso in $\mathbb{R}^{2n-1}/\mathbb{Z}^{2n-1}$ e quindi che E_0 è denso in T. Definiamo le coordinate

$$z_1 = x_1 + i \sum_{j=2}^{2n} a_j x_j\,; \quad \forall\, h = 2, \ldots, n \quad z_h = x_h + i x_{n+h}$$

e consideriamo lo spazio vettoriale complesso generato da $z_1, \ldots, z_n$.
La moltiplicazione per i in questo spazio vettoriale complesso è una struttura complessa che passa al quoziente $\mathbb{T}^{2n}$, rendendolo un toro complesso n-dimensionale.
La frontiera $b\Omega$ è differenziabile ed inoltre è Levi piatta (in particolare debolmente pseudoconvessa) in quanto è composta da due componenti connesse le cui parti interne, in una carta, corrispondono ciascuna ad un aperto di un iperpiano.
Gli insiemi E_r sono connessi (la proiezione è continua e sono quozienti di insiemi connessi) e sono sottovarietà complesse senza bordo, essendo della forma

$$E_r = \left\{ z_1 = \frac{1}{4} + ir \right\} / \mathbb{Z}^{2n-1}.$$

Dimostriamo che le uniche funzioni olomorfe su Ω sono le costanti. Sia f una funzione olomorfa su Ω. Il suo modulo $|f|$ assume massimo sul compatto T. Sia $p \in T$ un punto di massimo per f: esiste un $r_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p \in E_{r_0}$ poichè gli insiemi E_r ricoprono T.
La restrizione di f ad E_{r_0} è una funzione olomorfa sulla sottovarietà complessa connessa E_{r_0} il cui modulo ha massimo ed è dunque costante per il principio del massimo.
Poiché E_{r_0} è denso in T allora f è costante su T, che ha dimensione reale $2n-1$, quindi f è costante su Ω.
L'ipersuperficie reale T è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ed è Levi piatta in quanto fogliata nelle ipersuperficie complesse E_r (cfr. prop. 5.3).

5.3 Sottovarietà Levi piatte compatte

Un problema attualmente studiato è l'esistenza e la classificazione delle sottovarietà Levi piatte compatte, non totalmente reali, delle varietà complesse.

Proposizione 5.12 *Una foliazione complessa su una sottovarietà compatta di $\mathbb{C}^n$ ha dimensione zero. In particolare, le sottovarietà Levi piatte compatte di $\mathbb{C}^n$ sono totalmente reali.*

Dim. Sia M una sottovarietà Levi piatta compatta di $\mathbb{C}^n$ ed $\mathcal{F}$ una foliazione complessa.
Basta dimostrare che una foglia $\mathcal{F}$ ha dimensione zero.
Consideriamo la funzione distanza dall'origine $|z|^2$, che assume massimo R su M. La funzione $\rho = |z|^2 - R^2$ è strettamente plurisubarmonica e su M ammette massimo 0 in un punto p. Consideriamo la foglia F_p passante per

p, che è una sottovarietà di $\mathbb{C}^n$.
Componiamo con un biolomorfismo locale ϕ di $\mathbb{C}^n$ per cui F_p corrisponda all'iperpiano complesso $\{z_1 = 0\}$. La funzione $\phi \cdot \rho$ è strettamente plurisubarmonica e la sua restrizione all' iperpiano complesso è strettamente plurisubarmonica. Tale funzione ha un massimo locale in $\phi^{-1}(p)$ allora è costante. Ne segue che ρ è costante su una placca di F_p e che tale placca è contenuta sulla sfera di raggio R.
Dato che la sfera borda un dominio strettamente pseudoconvesso, non può contenere curve complesse (cfr. oss. 3.6) e quindi F_p deve essere un punto. $\square$

Un risultato di carattere generale per il problema posto è il seguente:

Proposizione 5.13 ([L], p.1371) *Sia M una varietà complessa compatta di dimensione $n \geq 3$ e con gruppo fondamentale finito. Allora M non contiene ipersuperficie Levi piatte analitiche V tali che le componenti connesse di $M \backslash V$ siano varietà di Stein.*

Spazi proiettivi

Consideriamo gli spazi proiettivi complessi $\mathbb{CP}^n$. Riportiamo un risultato di Y.T. Siu (si veda [Si]).

Teorema 5.14 *Sia $n \geq 3$ ed $m \geq \frac{3n}{2} + 7$. Allora non esistono ipersuperficie Levi piatte di classe $\mathcal{C}^m$ in $\mathbb{CP}^n$.*

Per lo spazio proiettivo $\mathbb{CP}^2$ vi è il seguente risultato di Ohsawa (si veda [O1]).

Teorema 5.15 *Non esistono ipersuperficie analitiche reali Levi piatte in $\mathbb{CP}^2$.*

Si possono costruire facilmente esempi di sottovarietà Levi piatte compatte e non totalmente reali di codimensione maggiore di 1 negli spazi proiettivi $\mathbb{CP}^n$ per $n = (a+1)(b+1) - 1$. Si consideri infatti una curva reale compatta in $\mathbb{CP}^a$, ad esempio

$$S^1 \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{CP} \hookrightarrow \mathbb{CP}^a.$$

Si consideri l'embedding del prodotto $S^1 \times \mathbb{CP}^b$ nello spazio $\mathbb{CP}^a \times \mathbb{CP}^b$, che a sua volta ha un embedding come sottovarietà di $\mathbb{CP}^n$ mediante l'applicazione di Segre ([Sm])

$$\mathbb{CP}^a \times \mathbb{CP}^b \hookrightarrow \mathbb{CP}^n$$

$$[x_1 : \ldots : x_{a+1}] \times [y_1 : \ldots : y_{b+1}] \mapsto [w_1 : \ldots : w_{(a+1)(b+1)}]$$
$$\forall h = 1, \ldots, (a+1)(b+1) \quad h = \alpha(a+1) + \beta \Rightarrow w_h = x_\alpha y_\beta \, .$$

La varietà compatta $S^1 \times \mathbb{CP}^b$ ammette una foliazione di codimensione reale 1 le cui foglie sono varietà complesse (gli insiemi di livello della prima coordinata sono ipersuperficie biolomorfe alla varietà complessa $\mathbb{CP}^b$). L'immagine di $S^1 \times \mathbb{CP}^b$ tramite l'embedding descritto è una sottovarietà compatta Levi piatta di $\mathbb{CP}^n$ ed è fogliata con l'immagine delle foglie di $S^1 \times \mathbb{CP}^b$.

I tori complessi

Il toro complesso $\mathbb{T}^n$ ammette sottovarietà di classe $\mathcal{C}^\infty$ Levi piatte compatte anche di codimensione reale 1.
Esistono embedding in $\mathbb{T}^n$ di tori CR del tipo $\mathbb{T}^{(h,k)}$ ($h < n; 2h+k < 2n$), che sono sottovarietà Levi piatte compatte di dimensione reale $2h+k$ (cfr.esempio 5.11).
Un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ la cui dimensione CR sia h e che contenga $2h+k$ vettori del reticolo Γ ha immagine, nel quoziente mediante Γ, un toro CR del tipo $\mathbb{T}^{(h,k)}$. Infatti gli altri vettori che generano il reticolo Γ, essendo indipendenti da una base di tale sottospazio, non danno ulteriori identificazioni. Un tale toro CR, se $h > 0$, è una sottovarietà compatta Levi piatta di $\mathbb{T}^n$ non totalmente reale. Scegliendo almeno $n+1$ vettori nella base di Γ, il sottospazio da essi generato ha dimensione CR almeno 1 (cfr. p.39) e quindi si ottiene un toro CR di dimensione CR maggiore di zero. Scegliendo $2n-1$ vettori nella base di Γ, il sottospazio di $\mathbb{C}^n$ ha dimensione CR pari a $n-1$ e lo stesso vale per il toro CR quoziente quindi si è ottenuta un'ipersuperficie Levi piatta compatta.
Nei tori complessi di dimensione complessa maggiore o uguale di 2, sono ipersuperficie Levi piatte non totalmente reali anche i tori reali dell'esempio di Grauert (cfr. p.65).
Un problema naturale è la classificazione delle sottovarietà Levi piatte compatte dei tori complessi. Il problema è stato recentemente risolto da Ohsawa ([O2]) per i 2-tori complessi ed è aperto in dimensione più alta.

Capitolo 6

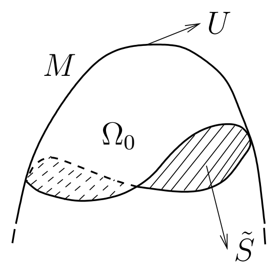
Grafici Levi piatti

6.1 Inviluppi, Levi piattezza e problema di Dirichlet per l'equazione di Levi

Sia $K \subset \mathbb{C}^n$ un compatto e sia $\mathcal{O}(K)$ l'algebra delle funzioni olomorfe su un intorno di K.
Ricordiamo che l'inviluppo di olomorfia di K è lo spettro $\mathcal{S}(K)$ della chiusura di $\mathcal{O}(K)$ nell'algebra $\mathcal{C}^0(K)$ delle funzioni continue su K.
L'insieme $\mathcal{S}(K)$ è uno spazio topologico di Hausdorff compatto. In generale la sua struttura è molto complicata e la sua descrizione è uno dei problemi più importanti dell'Analisi Complessa.
Se esiste un compatto $K' \supset K$ per cui ogni $f \in \mathcal{O}(K)$ si estende olomorficamente a un intorno di K', allora $K' \subseteq \mathcal{S}(K)$. Pertanto è naturale porsi il seguente problema: costruire un compatto $\hat{K} \subset \mathbb{C}^n$ (possibilmente massimale) tale che $K \subseteq \hat{K}$ ed ogni $f \in \mathcal{O}(K)$ si estenda ad una funzione in $\mathcal{O}(\hat{K})$. Se il problema ha risposta affermativa possiamo definire $\hat{K}$ come l'*inviluppo olomorfo* di K in $\mathbb{C}^n$.
Un buon candidato per $\hat{K}$ è l'unione di tutti i dischi analitici[1] che hanno bordo contenuto in K.
Infatti vale il seguente risultato: ogni $f \in \mathcal{O}(K)$ si estende olomorficamente su un intorno dell'unione di tutti i dischi analitici con bordo in K.
L'esistenza di famiglie 'sufficientemente ricche' di dischi analitici non è semplice da trattare in $\mathbb{C}^n$ per $n > 2$. La situazione è più chiara per $n = 2$ almeno per i compatti contenuti in una ipersuperficie M strettamente pseudoconvessa.
Sia M un'ipersuperficie reale di $\mathbb{C}^2$ contenuta nel bordo di un dominio Ω_0 e

[1] Un disco analitico in $\mathbb{C}^n$ è l'immagine di un'applicazione olomorfa $h : D \to \mathbb{C}^n$ dal disco unitario di $\mathbb{C}$ che ammetta un'estensione continua su $\overline{D}$.

supponiamo che $b\Omega_0$ sia strettamente pseudoconvesso nei punti di M. Supponiamo che U sia un aperto limitato in M e che bU bordi un'ipersuperficie relativamente compatta $\tilde{S}$, la cui parte interna sia Levi piatta e sia contenuta in Ω_0.
Allora ogni funzione su $\overline{U}$ si estende olomorficamente sul dominio Ω che ha come bordo $\overline{U} \cup \tilde{S}$. In particolare, $\overline{\Omega} \subseteq \mathcal{S}(\overline{U})$.
Ci si interessa quindi al seguente problema: data una superficie S regolare e compatta in $\mathbb{C}^2_{(z,w)}$ $(z = x + iy, w = u + iv)$, trovare un'ipersuperficie Levi piatta $\tilde{S}$ relativamente compatta il cui bordo sia S. Diciamo una tale ipersuperficie un'*estensione* Levi piatta di S.



Il primo risultato fondamentale a proposito di estensioni Levi piatte risale al 1983 e si deve a Bedford e Gaveau ([BeG]), che utilizzano le seguenti ipotesi:

(i) la superficie S sia il grafico Γ_g di una funzione g definita sul bordo di un aperto D, connesso e limitato, di $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$;

(ii) l'aperto D sia della forma $\{r(z, u) < 0\}$, dove r è una funzione di classe $\mathcal{C}^{m+5}$ $(m > 0)$ su un intorno di $\overline{D}$, $dr \neq 0$ su bD ed r è strettamente plurisubarmonica;

(iii) la funzione g è di classe $\mathcal{C}^{m+5}$, il grafico Γ_g è omeomorfo alla sfera S^2 ed ha esattamente due punti p_1, p_2 a tangenza complessa[2] ed ellittici[3].

In queste ipotesi vale il seguente:

Teorema 6.1 *Siano q_1 e q_2 le rispettive proiezioni su $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ dei due punti ellittici p_1 e p_2. Esiste allora un'unica funzione $G : \overline{D} \to \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^{m,\alpha}(\overline{D} - \{q_1, q_2\})$ per ogni $\alpha < 1$ (si intende che la derivata m-esima sia α-hölderiana per ogni $\alpha < 1$), lipschitziana su $\overline{D}$ e tale che, detto Γ_G il suo grafico, si abbia*

[2] Un punto p di una sottovarietà reale M di $\mathbb{C}^2$ per cui T_pM sia un sottospazio J-chiuso in $T_p^{(1,0)}\mathbb{C}^2$ si dice a tangenza complessa.

[3] Nell'intorno di un punto p a tangenza complessa di una sottovarietà reale M di $\mathbb{C}^2$ esistono coordinate locali (z_1, z_2) per cui M ha equazione $\{z_2 = |z_1|^2 + 2\gamma\Re(z_1^2) + O(|z_1|^3)\}$, dove γ è una costante positiva che non dipende dal sistema di coordinate. Il punto p si dice ellittico se $\gamma < \frac{1}{2}$, parabolico se $\gamma = \frac{1}{2}$, iperbolico se $\gamma > \frac{1}{2}$.

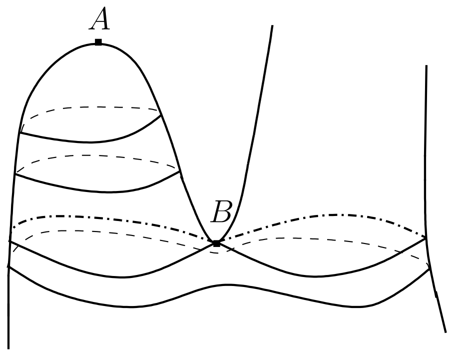


Figura 6.1: Il punto A è ellittico, il punto B è iperbolico.

(i) $b\Gamma_G = \Gamma_g$*;*

(ii) $\Gamma_G - \Gamma_g$ *è Levi piatta;*

(iii) $\Gamma_G - \{p_1, p_2\}$ *è unione di dischi analitici con bordo in* $\Gamma_g - \{p_1, p_2\}$*;*

(iv) Γ_G *è l'inviluppo d'olomorfia di* S*.*

La dimostrazione di questo teorema si fonda su un risultato di Bishop in $\mathbb{C}^2$ che garantisce la possibilità di riempire un intorno in S di un punto ellittico a tangenza complessa con una famiglia ad un parametro di bordi di dischi analitici (si veda [Bi]).
Bedford e Gaveau mostrano appunto che le famiglie di dischi del risultato di Bishop relative ai due punti ellittici a tangenza complessa p_1 e p_2 si propagano per formare un'ipersuperficie Levi piatta soluzione del problema.

Il problema dell'esistenza di un grafico Γ_G di una funzione $G = G(z, u)$ può essere affrontato anche con la teoria degli operatori differenziali. Posto $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = u$, la condizione affinchè il grafico di una funzione $f(x_1, x_2, x_3)$ sia Levi piatto è che f sia soluzione dell'equazione

$$\mathcal{L}(f)(1 + f_3^2)(f_{11} + f_{22}) + (f_1^2 + f_2^2)f_{33} + 2(f_1 f_2 f_3)f_{13} - 2(f_1 + f_2 f_3)f_{23} = 0\,.$$

Tale equazione viene detta *equazione di Levi.* Il problema di Dirichlet per l'equazione di Levi è stato affrontato in [SlT] e sviluppato successivamente in [CM].

Il problema generale in $\mathbb{C}^2$, quando S è una 2-sfera regolare contenuta nel bordo di un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, limitato e strettamente pseudoconvesso, è stato studiato da E. Bedford e W. Klingenberg ([BeKl]), M. Gromov ([Gro]), Y. Eliashberg ([E]), N.G. Kružilin ([Kru]). L'ipotesi è che S abbia un numero finito di punti a tangenza complessa ellittici o iperbolici. La soluzione è ancora unica. Se si toglie l'ipotesi sui punti a tangenza complessa, l'esistenza è ancora garantita (cfr. [ShT]) ma non l'unicità (il problema è aperto anche se Ω è una palla). Se S è una 2-sfera topologica è aperto anche il problema dell'esistenza.

Osservazione 6.2 *In dimensione $n \geq 3$ la situazione è completamente diversa. Una generica $(2n-2)$-sfera regolare non è nemmeno localmente bordo di una ipersuperficie Levi piatta. Essa deve infatti soddisfare condizioni di compatibilità (si veda [DTZ]).*

È stato studiato anche il caso continuo, in cui il termine Levi piatto per una ipersuperficie reale di $\mathbb{C}^2$ verrà utilizzato, con abuso di linguaggio, intendendo che esiste una foliazione complessa di dimensione 1.
Il caso di un grafico continuo Γ_g di $\mathbb{C}^2$ è stato studiato e risolto da N.V. Shcherbina ([Sh]) nel caso in cui il dominio $D \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ sia *strettamente convesso*, cioè tale che per ogni punto $p \in bD$ esista un iperpiano T tale che $\{p\} = T \cap bD$.
Definiamo l'*inviluppo polinomiale* $K_{\mathcal{P}}$ di un compatto K di $\mathbb{C}^2$ come

$$K_{\mathcal{P}} = \left\{ p \in \mathbb{C}^2 \ : \forall f \in \mathcal{P} \quad |f(p)| \leq \max_K |f| \right\} ,$$

dove $\mathcal{P}$ è l'algebra dei polinomi in $\mathbb{C}^2$.

Teorema 6.3 ([Sh], p.477) *Sia D strettamente convesso. L'inviluppo polinomiale di Γ_g ha come bordo Γ_g ed è il grafico di una funzione continua su $\overline{D}$. Inoltre la sua parte interna è fogliata con dischi analitici. Tali dischi analitici hanno bordo contenuto in Γ_g e sono grafici di funzioni olomorfe definite su domini semplicemente connessi di $\mathbb{C}_z$ e continue fin sul bordo.*

6.2 Modelli dei domini D di $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ e pseudoconvessità dei cilindri

Nei risultati che abbiamo citato, una delle condizioni necessarie per l'esistenza di un'estensione Levi piatta di una superficie compatta S di $\mathbb{C}^2$ è che questa sia contenuta nel bordo di un dominio su cui sono date ipotesi di convessità. In particolare, se S è un grafico, nel teorema di Bedford e Gaveau e nel risultato di Shcherbina, si richiede che il cilindro $bD \times \mathbb{R}_v$ sia strettamente pseudoconvesso.
Viene quindi naturale volere caratterizzare i domini $D \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ per i quali il cilindro $bD \times \mathbb{R}_v$ sia strettamente pseudoconvesso o, più in generale, debolmente pseudoconvesso. La questione è stata studiata e risolta in [CS]. Esponiamo il punto principale della dimostrazione, dopo potremo enunciare il teorema di caratterizzazione.

Costruzione del modello

Sia D un dominio limitato di $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u \subset \mathbb{C}^2$.
Introduciamo la seguente relazione di equivalenza su D

$$(z,u) \cong (z',u') \quad \Leftrightarrow \quad z = z' \quad \text{e} \quad \{(z, \lambda u + (1-\lambda)u')\} \subseteq D\,.$$

Indichiamo con Π la proiezione sulla prima coordinata: ciascuna componente connessa in una retroimmagine è un intervallo aperto non vuoto. Con la relazione di equivalenza introdotta si quozienta D sulla prima coordiata mantenendo però l'informazione di quante sono le componenti connesse della retroimmagine (e quindi tenendo conto degli 'avvolgimenti' di D rispetto alla coordinata u).
Indichiamo con $\mathcal{D}$ lo spazio quoziente (munito della topologia quoziente), con ρ la proiezione al quoziente, con Π' la proiezione

$$\Pi' : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \Pi' \circ \rho = \Pi\,.$$

La proiezione al quoziente ρ, considerando la topologia quoziente su $\mathcal{D}$, è un'applicazione continua e aperta. Questo garantisce che $\mathcal{D}$ sia connesso. In generale però $\mathcal{D}$ potrebbe non essere nemmeno di Hausdorff, come esemplificato in figura 6.2.

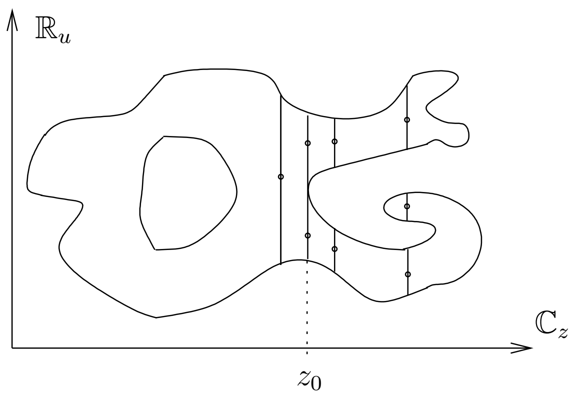


Figura 6.2: Un esempio in cui $\mathcal{D}$ non è di Hausdorff (i due punti in $\Pi'^{-1}(z_0)$ non hanno intorni disgiunti).

La retroimmagine tramite ρ di un punto ζ di $\mathcal{D}$ corrisponde ad un segmento $\{(z,u) \mid u \in (a,b)\} \subseteq D$.
Indicando $(z,a) = h^-(\zeta)$ e $(z,b) = h^+(\zeta)$, allora h^+ e h^- sono due funzioni da $\mathcal{D}$ nella retta reale estesa e vale $h^+ > h^-$ poiché queste funzioni rappresentano gli estremi superiore e inferiore di un intervallo aperto non vuoto.

Indichiamo $bD^+ = h^+(\mathcal{D})$ e $bD^- = h^-(\mathcal{D})$ ed osserviamo che

$$bD \supset bD^+ \cup bD^- .$$

La differenza $bD - (bD^+ \cup bD^-)$ è costituita da punti isolati e segmenti verticali chiusi, in cui (se bD è regolare) il vettore $\frac{\partial}{\partial u}$ appartiene al tangente $T(bD)$.

Supponiamo che Π' sia un omeomorfismo locale: questo ci permette di dare a $\mathcal{D}$ la struttura di varietà complessa per cui Π' è un'applicazione olomorfa. In tal caso $\mathcal{D}$ è di Hausdorff con la topologia quoziente quindi $\mathcal{D}$ è un dominio[4] su $\mathbb{C}$.

Se Π' è un omemorfismo locale allora si osserva facilmente che h^+ e h^- sono funzioni rispettivamente semicontinua inferiormente e semicontinua superiormente.

Non è detto, nemmeno in casi regolari, che se Π' è un omeomorfismo locale allora è anche un omeomorfismo, come si vede facilmente considerando un tubo che si avvolge a spirale lungo la direzione u ed alle estremità ha due semisfere.

Quello che viene impedito dalla condizione di omeomorfismo locale (o meglio dal fatto che $\mathcal{D}$ è di Hausdorff) è che una componente connessa di bD interna a $\overline{D}$ sia un punto oppure una curva aperta. Inoltre in caso di regolarità di D e di bD e $\mathcal{D}$ di Hausdorff, D non può avere 'buchi', intendendo l'interno e il bordo di una componente connessa di bD che sconnetta $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, che sia contenuta insieme al suo interno in ${}^cD$ e tale che la restante parte di un suo intorno in $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ sia contenuta in D. Infatti sezionando opportunamente tale buco si otterrebbe un buco in $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_u$ con bordo una curva chiusa che, in un punto di massimo della coordinata t, negherebbe la condizione di Hausdorff per $\mathcal{D}$. Ma vi sono altre situazioni da escludere: in figura 6.2 il problema segnalato non rientra infatti nei casi già descritti.

La pseudoconvessità del cilindro $D \times \mathbb{R}_u$

Una volta introdotto il modello $\mathcal{D}$, la pseudoconvessità del cilindro viene caratterizzata nel seguente modo.

Teorema 6.4 *Sia D un dominio di $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ (o di $X \times \mathbb{R}_u$, dove X è una varietà di Stein). Il cilindro $D \times \mathbb{R}_u$ è pseudoconvesso se e solo se:*

(i) $\mathcal{D}$ è un dominio su $\mathbb{C}$ (risp. su X) pseudoconvesso;

(ii) le funzioni h^+ ed h^- sono rispettivamente plurisuperarmonica e plurisubarmonica su $\mathcal{D}$.

[4]Spazio topologico connesso dotato di una proiezione su $\mathbb{C}$ che sia un omeomorfismo locale.

6.3 Generalizzazioni

I teoremi di Bedford e Gaveau e di Shcherbina si possono generalizzare. Premettiamo la nozione di regolarità utilizzata in [CS].

Definizione 6.5 *Un aperto connesso D relativamente compatto in $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ si dice* regolare *se:*

(i) il suo modello $\mathcal{D}$ è un dominio su $\mathbb{C}_z$, relativamente compatto e con frontiera localmente di Jordan[5] *in un dominio $\mathcal{D}'$ su $\mathbb{C}_z$;*

(ii) esiste una costante $\epsilon > 0$ tale che, per ogni punto $z \in \Pi(D)$, la distanza tra due componenti connesse di $\Pi^{-1}(z) \cap D$ sia almeno ϵ.

Teorema 6.6 ([CS], teo. 2) *Sia D un aperto connesso limitato e regolare di $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, le funzioni $-h^+$ ed h^- si estendano in modo continuo su $\overline{\mathcal{D}}$ (che è la chiusura di $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$) e siano hölderiane e strettamente subarmoniche. Sia $g : bD \to \mathbb{R}_v$ continua e sia Γ_g il suo grafico. Allora valgono i seguenti:*

(i) l'inviluppo $\hat{\Gamma}_g$ di Γ_g rispetto all'algebra

$$\mathcal{A}(D \times \mathbb{R}_v) = \mathcal{O}(D \times \mathbb{R}_v) \cap \mathcal{C}^0(\overline{D} \times \mathbb{R}_v)$$

delle funzioni olomorfe su $D \times \mathbb{R}_v$ e continue fin sul bordo è il grafico Γ_G di una funzione G continua su $\overline{D}$.

(ii) $\hat{\Gamma}_g \backslash \Gamma_g$ è fogliata con curve complesse.

Se D è omeomorfa alla palla di $\mathbb{R}^3$ allora

(iii) $\hat{\Gamma}_g \backslash \Gamma_g$ è unione disgiunta di dischi analitici Δ_α $(\alpha \in J)$ e per ogni α in J esiste un dominio $\Omega_\alpha \subset \mathcal{D}$ semplicemente connesso ed esiste una funzione $f_\alpha : \Omega_\alpha \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che Δ_α sia il grafico di f_α su Ω_α.

Se vale anche $h^- = h^+$ su bD allora

(iv) le funzioni f_α si estendono a funzioni continue $\tilde{f}_\alpha$ su $\overline{\Omega}_\alpha$ tali che valga $\tilde{f}_\alpha(b\Omega_\alpha) = b\Delta_\alpha \subset \Gamma_g$.

Osservazione 6.7 *La dimostrazione dell'unicità per il problema di Dirichlet si può dedurre dal principio del massimo per l'equazione di Levi ([SlT]).*

Dal teorema precedente si deduce un interessante corollario.

[5] Localmente è l'immagine omeomorfa di un intervallo aperto.

Corollario 6.8 *Sia M un sottoinsieme di $\mathbb{C}^2$ che sia un grafico descritto dall'equazione*

$$\{v = f(z, u)\} \ ,$$

dove le coordinate di $\mathbb{C}^2$ sono $(z, w) = (x + iy, u + iv)$ ed f è una funzione regolare di classe $\mathcal{C}^\infty$. Supponiamo inoltre che tale grafico ammetta una foliazione complessa di dimensione complessa 1 e che esista $k \in \mathbb{R}$ tale che $M \subset \{v \leq k\}$ oppure $M \subset \{v \geq k\}$. Allora M è unione di rette complesse del tipo $\{w = \text{costante}\}$ o equivalentemente $f = f(u)$.

Dim. L'ipersuperficie M è contenuta in $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, il cui modello è $\mathbb{C}_z$.
Consideriamo una palla B in $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, che ha come modello un disco D_0 di $\mathbb{C}_z$ ed è tale che la proiezione sia bigettiva. Ne segue che B è regolare nel senso della definizione 6.5.
Osserviamo che le funzioni $-h^+$ e h^- sono strettamente plurisubarmoniche, si possono estendere alla chiusura di D_0 in $\mathbb{C}_z$ e coincidono sul bordo. Consideriamo il problema di Dirichlet su B rispetto alla funzione $f|_{bB}$. Per quanto detto valgono interamente i risultati del teorema 6.6 e l'unicità. Abbiamo allora ottenuto che $M \cap B \times \mathbb{R}_v$ è fogliato in dischi.
Prendendo una successione crescente di palle, grazie all'unicità, le foliazioni si incollano e i dischi sono immagini di funzioni olomorfe una estensione dell'altra (dato che i dischi sono uno contenuto nell'altro). Le foglie sono allora grafici di funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ e limitate superiormente o inferiormente grazie all'ipotesi fatta su M quindi, per il principio del massimo, le foglie sono grafici di funzioni costanti e segue la tesi.

Il caso D non limitato

La problematica dei paragrafi precedenti è stata affrontata anche per gli aperti connessi illimitati ([ShT]).
Si costruisce in maniera analoga il modello $\mathcal{D}$ e, dopo aver esteso la nozione di regolarità (cfr. p.81), si dimostra il seguente teorema.

Teorema 6.9 *Sia D un dominio illimitato regolare in $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$. Per ogni funzione continua g da bD in $\mathbb{R}_v$ esistono due funzioni Φ^- e Φ^+, continue su $\overline{D}$, che estendono g e sono tali che*

(i) i loro grafici siano fogliati da curve olomorfe che hanno estremi in Γ_g;

(ii) $\Phi^- \leq \Phi^+$ e $\Phi^- \leq \Phi \leq \Phi^+$ per ogni funzione Φ continua su $\overline{D}$ che abbia grafico Levi piatto ed estenda g;

(iii) *ogni punto (z_0, u_0) tale che $z_0 \in D$ e $\Phi^-(z_0) \leq u_0 \leq \Phi^+(z_0)$ appartenga ad una curva olomorfa $\gamma(z)$ con bordo in Γ_g e tale che*

$$\Phi^-(z) \leq \gamma(z) \leq \Phi^+(z)\,.$$

Osservazione 6.10 *È importante notare che non vale l'unicità per il problema di Dirichlet nel caso di aperti illimitati, come mostra l'esempio 6.23.*

Generalizzazione della costruzione del modello

La costruzione del modello, per come è stata descritta, si attua per aperti D contenuti in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}_u$ o per aperti di $X \times \mathbb{R}_u$, dove X è una varietà di Stein. Osserviamo che in entrambi i casi gli aperti sono fogliati (in modo banale) dalle componenti connesse degli insiemi di livello della seconda coordinata e che tale foliazione è una foliazione complessa che ha dimensione 1 nel caso di X e dimensione n nel caso di $\mathbb{C}^n$.
Può essere interessante generalizzare la costruzione a domini di una ipersuperficie orentabile M di $\mathbb{C}^n$ che abbiano una foliazione complessa di dimensione complessa $n-1$.
Sia M di classe $\mathcal{C}^\infty$ e sia $\vec{\nu}$ un campo di versori ortogonali su M di classe $\mathcal{C}^\infty$. Supponiamo inoltre che lo spazio nullo della forma di Levi abbia dimensione complessa $n-1$, in particolare la foliazione di Levi sarà una foliazione complessa di dimensione complessa $n-1$.
Per ogni p in M, sia X il campo di versori $J\vec{\nu}$. Osserviamo che $J\vec{\nu}$ è ortogonale a $\vec{\nu}$ ed a HTM.
La distribuzione $p \to J\vec{\nu}(p)$ è in particolare un campo X su M trasverso alla foliazione di Levi e definisce una foliazione $\mathcal{F}$ su M trasversa alla foliazione di Levi.
Sia D un dominio relativamente compatto di M. Diciamo il modello $\mathcal{D}$ lo spazio delle foglie della foliazione $\mathcal{F}|_D$, che è la restrizione di $\mathcal{F}$ a D.
Dato p in D, sia $\mathcal{F}_p$ la foglia di $\mathcal{F}|_D$ passante per p e sia $[p]$ la classe di equivalenza di p nello spazio delle foglie $\mathcal{F}|_D/\sim$.
La foglia $\mathcal{F}_p$ è una curva integrale per il campo X, di classe $\mathcal{C}^\infty$. Parametrizziamo tale curva con $t \mapsto p(t)$ di modo che $p(0) = p$ e di modo che il vettore velocità in ogni punto t sia $X(p(t))$.
L'intervallo di definizione di tale curva sarà un intervallo aperto, eventualmente illimitato, del tipo (a, b). Possiamo considerare a e b come funzioni di $[p]$.
L'analogo delle funzioni h^+ e h^- sono allora le due funzioni, definite sullo spazio delle foglie $\mathcal{F}|_D/\sim$, della forma $h^-([p]) = a([p])$, $h^+([p]) = b([p])$. Le condizioni di regolarità su D che assicurino una qualche regolarità su $\mathcal{D}$ sono

tutte da scoprire.
La struttura di $\mathcal{D}$ dovrebbe dare informazioni su quali domini D sono intersezioni di M con domini pseudoconvessi di $\mathbb{C}^n$. Questo è in parallelo con il modello di Chirka e Shcherbina, in cui si cercavano condizioni su $\mathcal{D}$ che garantissero che il cilindro fosse pseudoconvesso.
Consideriamo infatti un intorno tubolare di D che sia la restrizione di un intorno tubolare di M. Dato che M ha codimensione 1, questo intorno tubolare è l'embedding in $\mathbb{C}^n$ di un cilindro con base D. Si vorrebbero allora trovare condizioni su $\mathcal{D}$ affinchè l'immagine del cilindro abbia bordo pseudoconvesso.

6.4 Esempi

Il caso limitato

Esempio 6.11 La palla D_3 è un dominio strettamente convesso, la proiezione su $\mathcal{D}$ è un omeomorfismo con il disco equatoriale, le funzioni h^+ ed h^- sono rispettivamente superarmonica e subarmonica e su nessun aperto armoniche. La regolarità di bD è $\mathcal{C}^\infty$ e bD è una sfera S^2 embedded in modo $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{C}^2$ inoltre essa si trova nel bordo del dominio pseudoconvesso $D \times \mathbb{R}_v$. Per questo dominio valgono i risultati discussi.

Esempio 6.12 Se la funzione g è identicamente nulla su bD il problema di Dirichlet è risolubile per ogni D. L'insieme D è Levi piatto: le componenti connesse dei sottoinsiemi del tipo $\{u = \text{costante}\}$ sono le foglie per una foliazione complessa di codimensione reale 1 su D. Si ha $\Gamma_0 = bD$ ed inoltre D è il grafico della funzione identicamente nulla su $\overline{D}$, che estende la funzione nulla su bD.

Esempio 6.13 Le ipotesi della prima parte del teorema 6.6 sono soddisfatte ad esempio se $D \times \mathbb{R}_v$ è di classe $\mathcal{C}^2$ e strettamente pseudoconvesso oppure se è di classe $\mathcal{C}^2$ e debolmente pseudoconvesso e non contiene germi di curve complesse.

Esempio 6.14 ([CS], par. 5) Sia D della forma

$$D = \left\{ |z| < 1\, ;\, H^-(z) < u < H^+(z) \right\} ,$$

dove H^- e H^+ sono funzioni continue sul disco unitario $\overline{\Delta}$. Sia Γ_Φ il grafico di una funzione continua Φ su $\overline{D}$: tale grafico, se Levi piatto, è una soluzione del problema di Dirichlet con dati D e $\Phi|_{bD}$.
Se Γ_Φ è Levi piatto allora ogni foglia L della sua foliazione complessa è una

sottovarietà di $D \times \mathbb{R}_v$, è semplicemente connessa ed è globalmente il grafico di una funzione olomorfa ϕ su un dominio B semplicemente connesso in $\mathbb{C}_z$. Quanto detto potrebbe non valere se $\mathcal{D}$ non fosse semplicemente connesso. Sia

$$D = \{1 < |z| < 2\,;\ (|z|-1)(|z|-2) < u < (|z|-1)(2-|z|)\}\ .$$

Dato che la funzione $(|z|-1)(|z|-2)$ è subarmonica per $|z| > \frac{3}{4}$, $D \times \mathbb{R}_v$ è pseudoconvesso. Consideriamo $\Phi = \frac{1}{5\pi}\log|z|$ e sia $g = \Phi|_{bD}$.
L'ipersuperficie Γ_Φ è Levi piatta (in particolare è soluzione per il problema di Dirichlet di dati D e g) e ha come foglie

$$D \times \mathbb{R}_v \cap \left\{z = \exp^{-5\pi i(w+t)}\right\}\ , \quad -\frac{1}{5} < t \leq \frac{1}{5}\,.$$

La foglia corrispondente a $t = 0$ non è un grafico su un dominio di $\mathbb{C}_z$.

Esempio 6.15 ([CS] es.1) Presentiamo un esempio in cui non esiste alcuna ipersuperficie Levi piatta che abbia come bordo Γ_g e sia un grafico su $\overline{D}$. Nel caso considerato esiste comunque una varietà Levi piatta di classe $\mathcal{C}^0$ che ha come bordo Γ_g. Siano D e g definiti come

$$D = \left\{|z| < 1\,;\ -\sqrt{1-|z|^2} < u < -\frac{1}{2}\cos(\frac{3}{2}\pi|z|)\right\}$$

$$g(z,u) = \begin{cases} 0 & \text{per } u = -\sqrt{1-|z|^2} \\ 0 & \text{per } |z| \geq \frac{2}{3} \\ (\frac{1}{2}-u)^2 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Consideriamo il grafico della costante zero sull'inviluppo convesso di $\overline{D}$ in $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$

$$S_0 = \mathrm{co}(\overline{D}) \times \{0\}$$

e consideriamo l'ipersuperficie S_1, grafico sul complementare di D in $\mathrm{co}(\overline{D})$ della funzione $(\frac{1}{2}-u)^2$. L'unione $S_0 \cup S_1$ è un'ipersuperficie di classe $\mathcal{C}^0$ e non di classe $\mathcal{C}^1$, il suo bordo è il grafico di g, l'intersezione delle due superfici è un disco. L'ipersuperficie $S_0 \cup S_1$ è fogliata da dischi su cui le coordinate u e v sono costanti e quindi è Levi piatta. Tale ipersuperficie non è un grafico su $\overline{D}$ perchè convessificando $\overline{D}$ siamo usciti da $\overline{D} \times \mathbb{R}_v$ e non è neppure un grafico su $\mathrm{co}(\overline{D})$ dato che su certi punti ci sono due valori distinti per la coordinata v (si vedano le figure 6.3 e 6.4). Chirka e Sherbina ([CS]) affermano che, modificando opportunamente tale funzione g fuori dal luogo di zeri, si può costruire una singolarità tale che l'analogo di $S_0 \cup S_1$ potrebbe non costituire una varietà: approssimando il dominio e la funzione, il fenomeno si manifesta anche per D con bordo localmente definito da equazioni polinomiali e per g polinomiale.

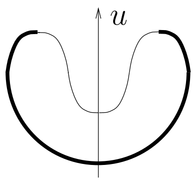


Figura 6.3: Una sezione di bD, con evidenziato ker$g$.

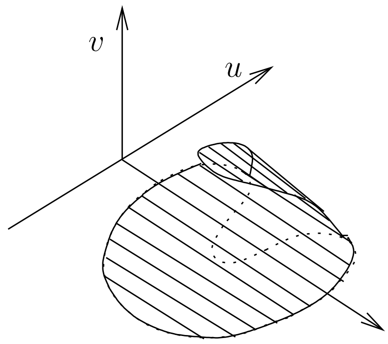


Figura 6.4: $S_0 \cup S_1$.

Esempio 6.16 ([CS] es.2) Il dominio D è lo stesso del caso precedente, adesso g è della forma

$$g(z,u) = \begin{cases} 0 & \text{per } u = -\sqrt{1-|z|^2} \\ 0 & \text{per } |z| \geq \frac{2}{3} \\ x\Big(\dfrac{u-\frac{1}{2}}{1+y}\Big) & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Il grafico di g è il bordo di un'ipersuperficie Levi piatta unione delle due superfici

$$S_0 = \mathrm{co}(\overline{D}) \times \{0\} \quad S_1 = \left\{ (z,u) \in \mathrm{co}(\overline{D}) - \overline{D} \quad v = \Re(z(w - \frac{1}{2})) \right\}.$$

L'intersezione delle due superfici è l'unione di un disco e del seguente sottoinsieme di un iperpiano totalmente reale (si veda la figura 6.5):

$$\left\{ |z| \leq \frac{2}{3}\,,\ w = \frac{1}{2} \right\} \cup \big\{ (z,u) \in \mathrm{co}(\overline{D}) - \overline{D}\,;\ x = v = 0 \big\}\,.$$

Un teorema di Kneser ([Vl], teo. 3.18.11) garantisce, dato che vi è un pezzo di piano totalmente reale nell'inviluppo di olomorfia del grafico di g, tale inviluppo contenga un aperto in $\mathbb{C}^2$ ed in particolare né l'inviluppo olomorfo

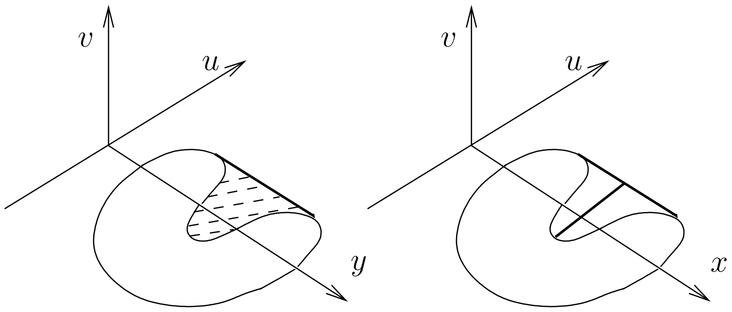


Figura 6.5: $S_0 \cap S_1 \cap \{v = 0\}$.

né l'inviluppo polinomiale di Γ_g sono soluzione per il problema di Dirichlet. I punti interni dell'inviluppo olomorfo di Γ_g possono anche essere contenuti nel cilindro $D \times \mathbb{R}_v$, come accade per

$$D = \left\{ |z| < 1\,;\ -\sqrt{1-|z|^2} < u < \frac{1}{2}\cos(\frac{5}{2}\pi|z|) \right\}\ ,$$

$$g(z,u) = \begin{cases} 0 & \text{per } u = -\sqrt{1-|z|^2} \\ 0 & \text{per } |z| \geq \frac{4}{5} \\ x\Big(\dfrac{u-\frac{1}{2}}{1+y}\Big) & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

Il caso non limitato

Diamo adesso la nozione di regolarità per domini illimitati.

Definizione 6.17 *Un dominio D in $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ si dice regolare se soddisfa le seguenti condizioni: $D \times \mathbb{R}_v$ è pseudoconvesso e $bD \times \mathbb{R}_u$ non contiene germi di curve complesse; le funzioni h^+ ed h^- che definiscono bD sono hölderiane fuori dai loro insiemi polari*[6]*; per ogni punto (z_0, u_0) in bD esiste un suo intorno U ed esiste un disco Δ in $\mathbb{C}_z$ centrato in z_0 tale che $U \cap D$ è uno dei seguenti*

$$U \cap \left\{ z \in \Delta_r\,;\ u < f^+(z) \right\}\ ;$$

$$U \cap \left\{ z \in \Delta_r\,;\ u > f^-(z) \right\}\ ;$$

$$U \cap \left\{ z \in \Omega\,;\ f^-(z) < u < f^+(z) \right\}\ .$$

[6]L'insieme polare di una funzione plurisubarmonica (risp. plurisuperarmonica) è il luogo dei punti ove la funzione vale $-\infty$ (risp. $+\infty$).

Nei primi due casi le funzioni f^+ ed f^- appartengano a $\mathcal{C}^0(\Delta)$; nel terzo caso Ω sia un dominio contenuto in Δ con frontiera omeomorfa a S^1 e che contenga z_0, le funzioni f^+ ed f^- appartengano a $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ e valga $f^- < f^+$ su Ω.

Riportiamo adesso alcune proprietà degli aperti regolari (cfr. [ShT]).
L'ultima condizione afferma in particolare che localmente bD divide $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$ in due parti.
Un dominio regolare è tale che le funzioni $-h^+$ e h^- sono continue su $\overline{\mathcal{D}}$, sono strettamente subarmoniche e coincidono su $b\mathcal{D}$, inoltre gli insiemi polari di h^+ e h^- sono dei chiusi in $\overline{\mathcal{D}}$ che non intersecano $b\mathcal{D}$.
Gli aperti connessi regolari illimitati sono invasi da una successione di aperti connessi regolari limitati di modo che un compatto contenuto nella chiusura del dominio illimitato sia definitivamente contenuto nella chiusura dei membri della successione.
Sono regolari aperti D di classe $\mathcal{C}^2$ tali che $D \times \mathbb{R}_v$ è strettamente pseudoconvesso oppure è debolmente pseudoconvesso e non contiene germi di curve complesse.
Diamo adesso alcuni esempi di aperti regolari, che si trovano in [ShT]. L'ultimo esempio è anche un controesempio per l'unicità, infatti per esso le funzioni Φ^+ e Φ^- del risultato di [ShT] non coincidono.

Esempio 6.18 L'insieme $D = \{u > |z|^2\}$ è un aperto connesso di classe $\mathcal{C}^2$ strettamente convesso quindi $D \times \mathbb{R}_v$ è di classe $\mathcal{C}^2$ e strettamente pseudoconvesso. Il modello $\mathcal{D}$ è omeomorfo a $\mathbb{C}_z$ tramite la proiezione Π'.

Esempio 6.19 L'insieme $D = \{x > y^2 + u^2\}$ è un aperto strettamente convesso di classe $\mathcal{C}^2$ quindi $D \times \mathbb{R}_v$ è di classe $\mathcal{C}^2$ e strettamente pseudoconvesso. L'insieme $\mathcal{D}$ è omeomorfo al dominio in $\mathbb{C}_z$ della forma $\{x > y^2\}$ e $b\mathcal{D}$ si può identificare con la curva in $\mathbb{C}_z$ $\{x = y^2\}$.

Esempio 6.20 Sia E un chiuso di $\mathbb{C}_z$ e sia D definito come

$$D = \left\{(z, u) \in (\mathbb{C}_z \backslash E) \times \mathbb{R}_u \, : \, u > |z|^2 - \log d(z, E)\right\} .$$

La funzione $h^-(z) = |z|^2 - \log d(z, E)$ è subarmonica e su nessun aperto armonica. L'insieme $\mathcal{D}$ è omeomorfo a $\mathbb{C}_z \backslash E$ ma tale sottoinsieme di $\mathbb{C}_z$ ha bordo in $\mathbb{C}_z$ mentre $\mathcal{D}$ è senza bordo dato che $h^-(z)$ tende a $+\infty$ per z che tende a E.

Esempio 6.21 Sia

$$D = \left\{ |z| > 1 \, , \quad -1 + \frac{1}{|z|^2} < u < 1 - \frac{1}{|z|^2} \right\} .$$

La funzione $-1+\frac{1}{|z|^2}$ è strettamente subarmonica. Si può identificare $\mathcal{D}$ con il dominio in $\mathbb{C}_z$ $\{|z|>1\}$ e $b\mathcal{D}$ con il cerchio unitario di $\mathbb{C}_z$.

Esempio 6.22 Sia

$$D=\left\{|z|>1\,,\quad \arg(z)-1+\frac{1}{|z|^2}<u<\arg(z)+1-\frac{1}{|z|^2}\right\}\,.$$

Il modello si proietta con Π' sul dominio $\{|z|>1\}$ e le retroimmagini di ciascun punto sono una quantità numerabile di punti. Il modello si rappresenta con una quantità numerabile di copie di $\{|z|>1\}$ mentre il bordo del modello si può rappresentare con una quantità numerabile di copie di $\{|z|=1\}$.

Esempio 6.23 Sia

$$D=\{y>0\,,\;x-\sqrt{y}<u<x+\sqrt{y}\}\,.$$

L'applicazione Π' è un omeomorfismo e le funzioni $x-\sqrt{y}$ e $x+\sqrt{y}$ sono rispettivamente subarmonica e superarmonica per $y>0$ ed è strettamente pseudoconvesso il dominio $D\times\mathbb{R}_v$.
Sia g identicamente nulla su bD e si considerino due grafici: il grafico della funzione identicamente nulla ed il grafico della funzione continua su $\overline{D}$ definita come $\Phi(z,u)=y-(u-x)^2$. Tali funzioni sono nulle su bD quindi i loro grafici, se sono Levi piatti, sono due soluzioni distinte per il problema di Dirichlet con dati D e la funzione nulla. Il primo grafico è D e quindi è Levi piatto (cfr. es. 6.11), il secondo grafico è Levi piatto in quanto è fogliato dalle curve

$$\left\{w=z+c-ic^2\,,\;y>c^2\right\}$$

per $c\in\mathbb{R}$. Le funzioni Φ^+ e Φ^- di questo esempio non solo non coincidono identicamente, sono diverse su tutto D.

Capitolo 7

Aspetti geometrico-funzionali

7.1 Estensioni di foliazioni complesse

Sia M una sottovarietà reale connessa di una varietà complessa N.
Sia $\mathcal{F}$ una foliazione complessa su M. Una foliazione $\mathcal{F}'$ si dice un'*estensione olomorfa* di $\mathcal{F}$ se $\mathcal{F}'$ è una foliazione olomorfa su un intorno connesso di M in N ed è tale che le foglie di $\mathcal{F}$ sono anche foglie di $\mathcal{F}'$.
Se $\mathcal{F}$ ammette un'estensione olomorfa allora si dice *olomorficamente estendibile.*
Una foliazione complessa e una sua estensione hanno la stessa dimensione.
Con *estensione olomorfa locale* di $\mathcal{F}$ intenderemo un'estensione olomorfa della restrizione di $\mathcal{F}$ ad un aperto di M.
Rea ([R]) ha studiato l'estendibilità della foliazione di Levi per una sottovarietà CR generica e Levi piatta di classe $\mathcal{C}^\infty$.
Sia allora M una sottovarietà Levi piatta, connessa, di classe $\mathcal{C}^\infty$, CR generica e di codimensione k in una varietà complessa N.

Proposizione 7.1 *Siano* $\{\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_k = 0\}$ *equazioni locali per* M*. La foliazione di Levi di* M *ammette un'estensione olomorfa locale in un punto* $p \in M$ *se e solo se esistono un intorno* U *di* p *in* N *e delle funzioni olomorfe* h_j $(j = 1, \ldots, k)$ *da* U *in* $\mathbb{C}$*, tali che su* $M \cap U$ *valga*

$$\forall j = 1, \ldots, k \quad \partial h_j \wedge \partial \Phi_1 \ldots \wedge \partial \Phi_k = 0\,; \quad \partial h_1 \wedge \ldots \wedge \partial h_k \neq 0\,.$$

Dim. Riassumiamo i passi essenziali della dimostrazione.
La condizione è necessaria in quanto si può scegliere, come $(h_1, \ldots, h_k)$, la coordinata trasversa dell'estensione olomorfa.
La seconda condizione richiesta sulle funzioni h_j dice che queste possono essere k coordinate distinte.

La prima condizione invece assicura che le funzioni h_j completano ad un sistema di coordinate la coordinata lungo la placca. Infatti $\partial\Phi_i$ sono le forme il cui nucleo è esattamente il tangente olomorfo.
L'idea è quindi utilizzare la coordinata lungo la placca della foliazione di Levi e $(h_1, \ldots, h_k)$ come coordinata trasversa per l'estensione olomorfa locale. $\square$

Proposizione 7.2 *Sia U un aperto di N che interseca M, siano*

$$(z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_k)$$

coordinate complesse su U e sia

$$M \cap U = \{\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_k = 0\} \ .$$

Le coordinate $z_1, \ldots, z_n$ e $w_1, \ldots, w_k$ sono rispettivamente la coordinata lungo la placca e la coordinata trasversa per una carta di un'estensione olomorfa della foliazione di Levi di M se e solo se

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial z_\alpha} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k \quad \forall\alpha = 1, \ldots, n \,.$$

Inoltre, se due sistemi di coordinate hanno tale proprietà, il cambio delle coordinate trasverse è indipendente dalla coordinata lungo la placca.

Dim. Si applica la proposizione 7.1 alle funzioni olomorfe $w_1, \ldots, w_k$. La condizione sulle z_α dice esattamente che i $\partial\Phi_j$ sono combinazioni di ∂w_h. Invece il fatto che le funzioni w_h siano coordinate complesse implica che sia soddisfatta anche l'altra ipotesi della proposizione precedente.
Per quanto riguarda il cambio di coordinate tra (z, w) e (z', w'), scriviamo

$$0 = (\frac{\partial\Phi_j}{\partial z_\alpha})_{(\alpha,j)} = A_{(\alpha,i)}(\frac{\partial\Phi_j}{\partial w'_i})_{(i,j)} \quad \partial\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \partial\Phi_k \neq 0 \,.$$

Dalla seconda equazione segue che il determinante della matrice che moltiplica A è diverso da zero e quindi che A è identicamente nulla. Ma la matrice A ha come entrate proprio le derivate delle coordinate w'_i rispetto alle z_α. $\square$

Proposizione 7.3 *Se M ha un ricoprimento aperto per cui le restrizioni di $\mathcal{F}$ ammettono un'estensione olomorfa, allora anche M ammette un'estensione olomorfa.*

Dim. Per ogni p in M vi saranno carte fogliate locali come nella proposizione precedente, che sono, per quanto visto, coerentemente fogliate. Il cambio di coordinate è olomorfo, dato che sono coordinate di N. Dunque esiste una foliazione olomorfa sull'unione dei domini di tali carte, che è un intorno di M in N. □

Teorema 7.4 *Un'estensione olomorfa della foliazione di Levi, se esiste, è unica. Inoltre, se la sottovarietà è analitica reale, la foliazione di Levi ammette un'estensione olomorfa.*

Per *unicità* si intende che, dati due aperti di N con due estensioni olomorfe, coincidano le restrizioni alla componente connessa della loro intersezione che contiene M.
Dim. Per quanto riguarda l'unicità, basta mostrare che le foliazioni sono uguali se ristrette ad un aperto che interseca M, dato che due foliazioni olomorfe definite su un connesso e che coincidono su un aperto non vuoto sono uguali.
Dato che le carte di una foliazione olomorfa sono carte di N, l'unica cosa da verificare, affinché siano carte fogliate della stessa foliazione, è che siano coerentemente fogliate.
Consideriamo allora un aperto U di N per cui $M \cap U$ abbia funzioni di definizione $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ e consideriamo due carte fogliate, con dominio contenuto in U, tali che l'intersezione dei domini sia un aperto connesso che interseca M. Tali carte soddisfano entrambe la condizione della proposizione 7.2 e quindi sono coerentemente fogliate.
Per quanto riguarda l'esistenza, grazie all'osservazione 7.3, sarà sufficiente garantirla localmente.
Si cercano funzioni come nella proposizione 7.1.
Dal fatto che M è Levi piatta e CR generica segue (cfr. [R], prop. 4.3) che localmente esistono delle funzioni $f_1, \ldots, f_k$ su M di classe $\mathcal{C}^\omega$ tali che su $M \cap U$

$$\partial f_j \wedge \partial \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \partial \Phi_k = 0 \quad \forall\, j = 1, \ldots, k\,;$$

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_k \wedge d\Phi_1 \wedge \ldots \wedge d\Phi_k \neq 0\,..$$

Tali funzioni corrispondono alla coordinata trasversa della foliazione di Levi.
Siano $\phi_1, \ldots, \phi_k$ le restrizioni di $f_1, \ldots, f_k$ a $M \cap U$.
Vi sono estensioni olomorfe h_j delle ϕ_j per $j = 1, \ldots, k$ su un aperto V di N, dato che M è di tipo CR generica e le funzioni ϕ_j sono analitiche reali e di tipo CR (cfr. [Bo], teo. 1 p. 141).
La prima condizione per le f_j dipende solo dai valori ϕ_j su M e quindi vale

anche per le h_j.
La condizione

$$0 \neq d\Re h_1 \wedge \ldots \wedge d\Re h_k \wedge d\Phi_1 \wedge \ldots \wedge d\Phi_k$$

vale per le funzioni $\Re h_j$ dato che vale per le f_j e dato che dipende solo dai valori su M.
Le funzioni h_j sono olomorfe quindi vale $\partial h_j = dh_j$.
Dato che le ϕ_j sono reali, $\Im h_j|_{M\cap V}$ è identicamente nulla; ne segue

$$d\Im h_j \wedge d\Phi_1 \wedge \ldots \wedge d\Phi_k = 0 \text{ su } M \cap V\,.$$

Possiamo allora scrivere

$$0 \neq d\Re h_1 \wedge \ldots \wedge d\Re h_k \wedge d\Phi_1 \wedge \ldots \wedge d\Phi_k = \partial h_1 \wedge \ldots \wedge \partial h_k \wedge d\Phi_1 \wedge \ldots \wedge d\Phi_k.$$

Le funzioni olomorfe h_j soddisfano allora le ipotesi della proposizione 7.1 e da ciò segue la tesi. □

7.2 Risultati di compattezza per foglie di ipersuperficie Levi piatte

Consideriamo varietà complesse e connesse N che contengono ipersuperficie M connesse, compatte, analitiche reali, orientabili e Levi piatte. Tali varietà complesse si dicono *pseudo piatte* e la coppia (N, M) si dice una *coppia pseudo piatta.*
L'obbiettivo è lo studio delle proprietà funzionali dell'algebra delle funzioni olomorfe su N in relazione alle proprietà geometriche della foliazione di Levi di M.
Esempi di coppie pseudo piatte sono i seguenti:

(a) il prodotto $Y \times \mathbb{C}$, dove Y è una varietà complessa connessa compatta e il prodotto $Y \times C$, dove C è una curva compatta analitica reale contenuta in $\mathbb{C}$ (cfr. es. 7.18);

(b) il 2-toro complesso e il 3-toro reale Levi piatto dell'esempio di Grauert (si veda pag. 65).

Nell'esempio (a) le funzioni olomorfe dipendono solo dalla coordinata $z \in \mathbb{C}$. In particolare due funzioni olomorfe f,g sono *analiticamente dipendenti* cioè $df \wedge dg = 0$. Invece, nell'esempio (b) non vi sono funzioni olomorfe non costanti sul 2-toro complesso (si veda pag. 65).
Questi esempi corrispondono ai due soli tipi possibili di coppie psedopiatte. Infatti possiamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 7.5 *Ogni varietà pseudopiatta N possiede al più una funzione olomorfa analiticamente indipendente (cioè due qualsiasi funzioni olomorfe su N sono analiticamente dipendenti).*

Vale inoltre la seguente caratterizzazione.

Teorema 7.6 ([MR], teo. 2) *Sia (N, M) una coppia pseudo piatta. Le proprietà seguenti sono equivalenti:*

(i) *le foglie della foliazione di Levi su M sono compatte;*

(ii) *esiste un intorno U di M per cui $\mathcal{O}(U) \neq \mathbb{C}$ (cioè esiste una funzione olomorfa su U non costante);*

(iii) *esiste un intorno U di M che è una fibrazione olomorfa*[1] *$\pi : U \to \Sigma$, dove Σ è una superficie di Riemann (non compatta se tale è N) ed $M = \pi^{-1}(S)$, dove S è una curva analitica reale semplice chiusa di Σ.*

La coppia pseudo piatta dell'esempio di Grauert non soddisfa nessuna delle condizioni equivalenti del teorema 7.6. È immediato verificare invece che la coppia dell'esempio (a) verifica la condizione (ii) del teorema precedente.

Premettiamo alla dimostrazione dei teoremi 7.5 e 7.6 alcune considerazioni.

Proposizione 7.7 *Sia M un'ipersuperficie Levi piatta di classe $\mathcal{C}^\infty$ e compatta in una varietà complessa connessa N. Se esiste una funzione olomorfa h non costante su un intorno U di M e che sia costante su una foglia della foliazione di Levi di M, allora tale foglia è compatta.*

Definizione 7.8 *Una successione convergente in una varietà fogliata si dice trasversale a una foliazione se esiste una carta fogliata della foliazione il cui dominio contiene il limite e per cui la successione interseca un'infinità numerabile di placche distinte.*

Dim. prop.7.7 Per assurdo, sia Z la foglia non compatta. Allora esiste una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di Z con limite z in M ma non in Z.
Tale successione è trasversale altrimenti almeno una placca conterrebbe una sottosuccessione ed, essendo chiusa, il limite z starebbe in Z.
Sia $c = h(Z)$ e sia $S = \{h = c\}$. L'insieme S è un chiuso non vuoto del dominio di h, la sua intersezione con una carta fogliata contiene infinite placche

[1] Una fibrazione olomorfa è una varietà complessa $\mathcal{M}$ dotata di una proiezione olomorfa con differenziale suriettivo su una varietà complessa connessa B e tale che le retroimmagini dei punti sono varietà complesse compatte.

di Z, che si accumulano sulla placca di z. Considerando $h - c$ come funzione (analitica) solo della coordinata trasversa, essa ha infiniti zeri nell'intorno della coordinata trasversa di z. Allora h è costante rispetto alla coordinata trasversa quindi la funzione h è costante su un intorno di z in M, da cui segue che essa è costante su un intorno di z in N e quindi costante su U. $\square$

Corollario 7.9 ([MR], cor. 3.1) *Sia f una funzione olomorfa non costante su un intorno di M. Se Z è una foglia della foliazione di Levi di M su cui $|f||_M$ assume massimo, allora tale foglia è compatta.*

Dim. Osserviamo che $|f|$ ha massimo su M dato che M è compatta, pertanto la restrizione di f a Z è costante per il principio del massimo. Allora si può applicare la proposizione precedente e concludere. $\square$

Osservazione 7.10 ([MR], lemma 3.1) *Consideriamo una coppia pseudo piatta (N, M). Consideriamo un'estensione olomorfa della foliazione di Levi di M. Sia h una funzione olomorfa definita su un intorno del limite di una successione trasversale. Supponiamo che, in una carta fogliata (U, Φ) dell'estensione olomorfa tale che U sia un intorno del limite, la funzione h sia costante sulle placche contenenti i punti della successione. Allora h dipende solo dalla coordinata trasversa.*

Dim. Fissiamo due valori per la coordinata lungo la placca, x' e x''. Detta y la coordinata trasversa si può considerare la funzione

$$\gamma(y) = h(x', y) - h(x'', y)\,.$$

Tale funzione è analitica e vale zero sulle coordinate trasverse di punti della successione trasversale, che si accumulano sulla coordinata trasversa del limite. La funzione γ è allora identicamente nulla per cui la funzione h dipende solo dalla coordinata trasversa. $\square$

Proposizione 7.11 *Sia M un'ipersuperficie reale connessa, compatta, Levi piatta e di classe $\mathcal{C}^\omega$ di una varietà complessa N. Se esiste una funzione olomorfa non costante in un intorno di M in $\mathbb{C}^n$ allora tutte le foglie della foliazione di Levi di M sono compatte.*

Dim. Sia h la funzione olomorfa non costante: possiamo supporre che il dominio di h sia un intorno connesso di M.
Mostriamo che vi sono infinite foglie compatte. La funzione h è olomorfa quindi è costante su ciascuna foglia compatta. Se vi fossero un numero finito di foglie compatte $Z_1, \ldots, Z_k$, il prodotto $(h - h(Z_1)) \cdots (h - h(Z_n))$ sarebbe

una funzione olomorfa non costante che si annulla su tutte le foglie compatte e sarebbe quindi nulla (per il cor. 7.9 assume il massimo del suo modulo su una foglia compatta). Allora h assumerebbe solo un numero finito di valori per cui sarebbe costante, assurdo.
Una successione convergente di punti che appartengono a foglie compatte distinte è trasversale quindi, grazie all'osservazione 7.10, su una carta fogliata in un intorno del limite h dipende solo dalla coordinata trasversa. Se questa proprietà vale per una carta della foliazione olomorfa vale anche per tutte le carte fogliate che ne intersecano il dominio, dato che h è analitica. Allora, dato che M è connessa, h è costante lungo le foglie di M e quindi, per la proposizione 7.7, ogni foglia è compatta. $\square$

7.3 Dimostrazione dei teoremi 7.5 e 7.6

Dim. teo.7.5 Mostriamo che due funzioni olomorfe h_1 e h_2 su una varietà pseudo piatta N sono analiticamente dipendenti.
Sia (N, M) una coppia pseudo piatta. Possiamo supporre che h_1 non sia costante allora, per la proposizione 7.11, le foglie della foliazione di Levi di M sono compatte.
Le funzioni olomorfe h_1 e h_2 sono costanti sulle foglie, dato che le foglie sono sottovarietà complesse compatte di N. Allora, per l'osservazione 7.10, localmente h_1 e h_2 dipendono solo dalla coordinata trasversa. Detta $z \in \mathbb{C}$ la coordinata trasversa, si ha

$$dh_1 = \partial h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial z} dz \quad dh_2 = \partial h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial z} dz$$

sui punti di M e di conseguenza h_1 e h_2 sono analiticamente dipendenti. $\square$
Evidenziamo alcune considerazioni che ci serviranno per la dimostrazione del teorema 7.6.

Proposizione 7.12 ([MR], prop. 4.1) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di classe $\mathcal{C}^s$, $s = 1, \ldots, \infty$ (rispettivamente analitica reale oppure olomorfa) su una varietà M. Se le foglie di $\mathcal{F}$ sono compatte e con olonomia banale, lo spazio delle foglie di $\mathcal{F}$ è una varietà di classe $\mathcal{C}^s$ (risp. analitica reale, olomorfa) e con tale struttura la proiezione al quoziente che lo definisce è di classe $\mathcal{C}^s$ (risp. analitica reale, olomorfa).*

Dim. Consideriamo una foglia L e un suo intorno V che sia immagine di un intorno tubolare W. Le olonomie della foliazione banale su W e quella di $\mathcal{F}|_V$ sono $\mathcal{C}^\infty$-coniugate e quindi, per la proposizione 2.6, le foliazioni $\mathcal{F}|_V$ e quella

dell'intorno tubolare si ottengono l'una dall'altra con un diffeomorfismo di classe $\mathcal{C}^\infty$. Ne segue che vi sono carte con dominio contenuto in V per cui una carta contiene al più una placca per ciascuna foglia.
Lo spazio quoziente è a base numerabile: si considerino i domini delle carte di un atlante numerabile su M con la proprietà di contenere al più una placca per ciascuna foglia e inoltre per ognuno di questi domini si consideri un sistema numerabile di aperti che siano intorni di ciascun punto.
Lo spazio quoziente è di Hausdorff dato che la foglia L è disgiunta dalle altre foglie dell'intorno V e dalle foglie fuori di tale intorno.
Sia π la proiezione sul quoziente. Da una carta (U, ϕ) con al più una placca per ciascuna foglia, si ottengono carte per lo spazio quoziente: il dominio è $\pi(U)$, la mappa è quella che associa ad ogni classe di equivalenza la coordinata trasversa della placca corrispondente.
La regolarità di tale atlante è quella dei cambi della coordinata trasversa quindi almeno quella della foliazione. $\square$

Proposizione 7.13 *Sia (N, M) una coppia pseudo piatta. Se le foglie della foliazione di Levi $\mathcal{L}$ su M sono compatte e se U è un intorno di M in N su cui è definita un'estensione olomorfa di $\mathcal{L}$ allora esiste un intorno di M contenuto in U che sia unione di foglie compatte e con olonomia banale per l'estensione olomorfa.*

Dim. Dimostriamo preliminarmente che $\mathcal{L}$ ha foglie con olonomia banale.
La foliazione di Levi di M ha codimensione reale 1 quindi, se esistessero germi nell'olonomia diversi da quelli di id e di $-id$, per la proposizione 2.11, esisterebbe una carta con infinite placche distinte per una stessa foglia, contraddicendo il fatto che le tutte le foglie sono compatte.
La foliazione di Levi su una varietà orientabile è trasversalmente orientabile: non c'è allora il germe di $-id$.
Le foglie di $\mathcal{L}$ hanno olonomia banale anche se considerate come foglie dell'estensione olomorfa. Consideriamo su U l'estensione olomorfa $\mathcal{F}$ della foliazione $\mathcal{L}$.
Un germe $\hat{f}$ dell'olonomia di una foglia di $\mathcal{L}$ vista come foglia di $\mathcal{F}$ è un'applicazione olomorfa tra due aperti di $\mathbb{C}$. Dato che l'olonomia in $\mathcal{L}$ è banale, $\hat{f}$ sarà l'identità su una curva reale di dimensione 1 (che parametrizza le foglie di $\mathcal{L}$). Localmente la curva si esprime con l'equazione $\{\Im z = 0\}$. Dato che per la funzione olomorfa $g = f - id$ valgono le equazioni

$$\frac{\partial^l g}{\partial x^l} = \frac{\partial^l g}{\partial z^l} \quad \forall l \in \mathbb{N}$$

allora su un punto della curva sono uguali a zero le derivate complesse di g di qualsiasi ordine, dunque g è costante. L'unico germe di olonomia è il germe

dell'identità quindi l'olonomia è banale.
Per il teorema 2.9, ciascuna foglia di $\mathcal{L}$ (e quindi M) ha un intorno in U costituito da foglie compatte con gruppo di olonomia banale. $\square$

Proposizione 7.14 *Se le foglie della foliazione di Levi di M sono compatte, esiste un intorno U di M tale che lo spazio delle foglie dell'estensione olomorfa su U sia una superficie di Riemann non compatta e tale che lo spazio delle foglie della foliazione di Levi di M sia una sottovarietà analitica reale compatta dello spazio delle foglie dell'estensione olomorfa su U. Inoltre esiste una funzione olomorfa non costante da U in $\mathbb{C}$.*

Dim. I due spazi delle foglie sono varietà di classe rispettivamente analitico reale e olomorfo di dimensione rispettivamente reale e complessa 1, grazie alla proposizione 7.12. Il primo spazio è un compatto poiché M è compatta quindi è diffeomorfo ad S^1. In un dominio di una carta fogliata per la foliazione olomorfa, la restrizione della proiezione dà un embedding dello spazio delle foglie di M in quello della foliazione olomorfa: tali spazi sono infatti descritti localmente dalla coordinata trasversa. Scegliendo un intorno U di M connesso, lo spazio delle foglie risulta connesso e quindi è una superficie di Riemann: se tale superficie di Riemann è compatta sostituiamo U con la retroimmagine tramite la proiezione di un intorno non compatto dello spazio delle foglie di M.
Una superficie di Riemann non compatta è una varietà di Stein[2] e quindi ammette funzioni olomorfe non costanti. Basta allora comporre una di tali funzioni con la proiezione sullo spazio delle foglie, che è olomorfa per la proposizione 7.12, per ottenere una funzione olomorfa non costante su U. $\square$

Dim. teo.7.6
$(iii) \Rightarrow (ii)$ È già stato dimostrato nella proposizione 7.14.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Segue dalla proposizione 7.11.
$(i) \Rightarrow (iii)$ Dimostrando la proposizione 7.13 si è osservato che le foglie di $\mathcal{L}$ hanno olonomia banale. Allora dal teorema 2.9, fissata una foglia L, si ottiene che vi è un suo intorno, unione di foglie compatte con olonomia banale, che sia un fibrato su L di classe analitica reale.
Esiste un intorno di L in N che sia diffeomorfo, tramite un diffeomorfismo analitico, al prodotto della foglia per un disco di $\mathbb{C}$, di modo che le foglie dell'estensione olomorfa di $\mathcal{L}$ abbiano come immagini gli insiemi di livello della seconda coordinata. Segue che lo spazio delle foglie di $\mathcal{L}$ ha un embedding nello spazio delle foglie della sua estensione olomorfa e la sua immagine è una curva analitica compatta connessa ed è quindi diffeomorfa ad S^1. $\square$

[2] È stato dimostrato nel 1948 da Behnke e Stein.

7.4 Esempi

Estensioni olomorfe

Esempio 7.15 Un iperpiano reale in $\mathbb{C}^n$ è un'ipersuperficie analitica reale Levi piatta CR generica. A meno di un biolomorfismo in $\mathbb{C}^n$, possiamo supporre che l'iperpiano abbia equazione

$$\{y_n = 0\} \ .$$

Le foglie della foliazione di Levi sull'iperpiano reale corrispondono agli insiemi

$$\{y_n = 0, x_n = \text{cost.}\} \ .$$

La foliazione olomorfa su un intorno dell'iperpiano con foglie gli insiemi del tipo

$$\{z_n = \text{cost.}\}$$

è un'estensione olomorfa della foliazione di Levi.

Esempio 7.16 La condizione di analiticità non è necessaria per l'esistenza di un'estensione olomorfa, come si vede dal seguente esempio. Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ e l'ipersuperficie reale

$$\{y_2 - f(x_2) = 0\} \ .$$

Tale sottovarietà è CR generica e di classe $\mathcal{C}^\infty$, inoltre è Levi piatta dato che è fogliata in sottovarietà complesse di dimensione complessa 1, precisamente le rette complesse di equazione

$$z_2 = s + if(s) \quad s \in \mathbb{R} \, .$$

Sono estensioni olomorfe della foliazione di Levi, le foliazioni olomorfe su un intorno della ipersuperficie con foglie le rette complesse di equazione

$$\{z_2 = \text{cost.}\} \ .$$

Esempio 7.17 Riportiamo l'esempio ([R], par. 6) di una ipersuperficie Levi piatta in $\mathbb{C}^2$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ la cui foliazione di Levi non ammette alcuna estensione olomorfa. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{c} e^{-1/t^2} \sin(\pi/t) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \le 0 \, , \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante tale che

$$\max_{|t|\leq 1} |f'(t)| < \frac{1}{2}.$$

Un'ipersuperficie Levi piatta che soddisfa le condizioni richieste è

$$\left\{(z_1, f(t)z_1 + t) \in \mathbb{C}^2 |\ t \in \mathbb{R}, |t| < 1; z_1 \in \mathbb{C}, |z_1| < 1\right\}.$$

Viene dimostrato che, se Φ è una funzione di definizione per l'ipersuperficie, una funzione olomorfa h tale che $\partial h \wedge \partial \Phi = 0$ deve essere costante quindi si conclude grazie alla proposizione 7.1.
Il controesempio è estendibile a $\mathbb{C}^n$ per $n > 2$ considerando l'ipersuperficie con la stessa funzione di definizione.

Coppie pseudo piatte

Esempio 7.18 Se T è una varietà complessa connessa compatta, allora il prodotto $T \times \mathbb{C}$ è una varietà complessa pseudo piatta.
Infatti, se C è una curva in $\mathbb{C}$, chiusa e analitica reale, le ipersuperficie $T \times C \subset T \times \mathbb{C}$ sono analitiche reali, compatte e orientabili.
Tali ipersuperficie sono inoltre Levi piatte in quanto $HT(T \times C)$ è l'immagine, tramite il differenziale dell'inclusione, del tangente di $T \times \{z\}$ quindi la coordinata $\frac{\partial}{\partial z}$ è nulla mentre una funzione di definizione e la sua forma di Levi dipendono solo dalla coordinata $\frac{\partial}{\partial z}$. La foliazione di Levi di $T \times C$ ha come foglie le sottovarietà complesse di $T \times \mathbb{C}$ della forma $T \times \{z\}$ con $z \in C$.
La coppia $(T \times \mathbb{C}, T \times S^1)$ è pseudo piatta. Ad esempio si possono scegliere $T = \mathbb{CP}^1$, $C = S^1$.
Le funzioni olomorfe su $T \times \mathbb{C}$ sono costanti nella prima variabile, poiché T è compatta e connessa, ma la varietà complessa $T \times \mathbb{C}$ ammette una funzione olomorfa non costante, la proiezione sulla seconda coordinata.
L'ipersuperficie $T \times C$ soddisfa allora la seconda condizione del teorema 7.6.

Esempio 7.19 Sia (N, M) una coppia pseudo piatta. Se N ammette una funzione olomorfa non costante allora sono verificate le condizioni del teorema 7.6.
Non è una proprietà necessaria, come si vede dal seguente esempio. Siano N_1 una superficie di Riemann compatta, N_2 una varietà complessa connessa compatta.
Il prodotto $N_1 \times N_2$ è una varietà complessa connessa compatta quindi non ammette funzioni olomorfe non costanti.
Consideriamo l'ipersuperficie reale $C \times N_2$, dove C è una curva analitica reale

su N_1. Tale ipersuperficie è analitica reale, in quanto il tangente olomorfo in ogni punto coincide con l'immersione del tangente di N_2 e la forma di Levi dipende solo dall'altra coordinata.
La foliazione di Levi ha come foglie gli insiemi compatti $\{p\} \times N_2$. Per il teorema 7.6 esiste allora una funzione olomorfa non costante in un intorno della ipersuperficie reale.

Esempio 7.20 ([MR], p.697) Consideriamo la varietà complessa

$$N = \mathbb{C} \times A/G \quad A = \{a + ib \mid a > 0, b > 0\} \subset \mathbb{C}\,,$$

$$G = \left\{\phi_{n,m} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \mid \phi_{n,m}(z_1, z_2) = (z_1 + m + nz_2, z_2)\,,\, m, n \in \mathbb{Z}\right\}\,.$$

Fissato un valore a in A, si ha un 1-toro complesso considerando il reticolo composto dai numeri complessi 1 ed a. L'insieme N è allora una famiglia di tori complessi parametrizzata dalla coordinata su A quindi è una fibrazione olomorfa[3]. Consideriamo la proiezione π, indotta sul quoziente dalla proiezione $\mathbb{C} \times A \to A$. La funzione π è una funzione su N, non costante e olomorfa. L'insieme N è una varietà complessa connessa compatta 1-dimensionale ed è pseudo piatta in quanto sono ipersuperfici reali analitiche orientabili e Levi piatte le retroimmagini di cerchi analitici C contenuti in A tramite la proiezione π di N su A.

7.5 Proprietà geometriche per varietà Levi piatte compatte

Teorema 7.21 ([BaI], teo. 3) *Sia M una ipersuperficie Levi piatta di classe $\mathcal{C}^\infty$ contenuta in una varietá complessa 2-dimensionale N di classe $\mathcal{C}^\infty$. Se T è una foglia per la foliazione di Levi su M che sia diffeomorfa ad un toro complesso 1-dimensionale $\mathbb{T}$ e ha olonomia infinitesima allora ha olonomia banale.*

La foliazione di Reeb su S^3 (cfr. cap.2) ammette sottoatlanti semiolomorfi dato che ha dimensione reale 2 (cfr. es.4.11). L'olonomia della foglia toroidale che borda entrambe le componenti non è banale ma è infinitesima. La foliazione di Reeb non è però una foliazione complessa sull'immagine di S^3 tramite un'immersione in una varietà complessa. Infatti l'immagine della foliazione di Reeb, per motivi dimensionali, dovrebbe essere la foliazione di

[3]Una fibrazione olomorfa è una varietà complessa $\mathcal{M}$ dotata di una proiezione olomorfa con differenziale suriettivo su una varietà complessa connessa B e tale che le retroimmagini dei punti siano varietà complesse compatte.

Levi e la foglia toroidale avrebbe olonomia infinitesima e non banale. L'immagine di S^3 risulterebbe una ipersuperficie come nelle ipotesi del teorema e sia avrebbe un assurdo.

Teorema 7.22 ([BaI], teo. 1) *Sia M un'ipersuperficie senza bordo Levi piatta, compatta, orientabile e di classe $\mathcal{C}^\infty$ di una 2-varietà complessa N. Allora vale*

(i) $\sharp\,\pi_1(M) = +\infty$

(ii) $\pi_2(M) = 0 \quad \text{oppure} \quad \mathrm{M} \approx \mathrm{S}^2 \times \mathrm{S}^1\,.$

La dimostrazione del teorema si fonda sulla prodedura di cancellazione di componenti di Reeb descritta nel secondo capitolo.
I due modelli di ipersuperficie Levi piatte compatte orientabili di classe $\mathcal{C}^\infty$ contenute in una 2-varietà complessa sono allora una varietà con π_1 infinito e π_2 banale oppure una varietà diffeomorfa ad $S^2 \times S^1$ (che ha π_1 infinito e π_2 non nullo).
Un esempio del primo tipo è la varietà $\mathbb{T} \times S^1$, dove $\mathbb{T}$ è un 1-toro complesso, che è immersa nella 2-varietà complessa $\mathbb{T} \times \mathbb{C}$ ed è fogliata con foglie complesse di codimensione 1 (gli insiemi di livello della seconda coordinata) quindi è Levi piatta. La varietà $\mathbb{T} \times S^1$ non è diffeomorfa a $S^2 \times S^1$ dato che $\mathbb{T} \times S^1$ è diffeomorfo a $S^1 \times S^1 \times S^1$ e i primi gruppi di coomologia sono diversi:
$$H^1(S^1 \times S^1 \times S^1) = \mathbb{Z}^{\oplus 3} \quad H^1(S^2 \times S^1) = \mathbb{Z}\,.$$

Un esempio del secondo tipo è la varietà $\mathbb{CP} \times S^1$, che è contenuta nella 2-varietà complessa $\mathbb{CP} \times \mathbb{C}$, è diffeomorfa ad $S^2 \times S^1$ ed è Levi piatta in quanto è fogliata da foglie complesse di codimensione 1 (gli insiemi di livello della seconda coordinata).
Osserviamo anche che la varietà N del teorema 7.22 non può essere biolomorfa a $\mathbb{C}^2$ perchè in $\mathbb{C}^2$ non esistono ipersuperficie Levi piatte compatte (cfr. prop. 5.12).
Una 3-varietà chiusa orientabile senza bordo e tale che una foliazione trasversalmente orientabile ammette una componente di Reeb o è diffeomorfa a $S^2 \times S^1$ oppure non è rivestita da $\mathbb{R}^3$ ([CC2], cor. 9.1.11).

Corollario 7.23 *Sia M un'ipersuperficie senza bordo Levi piatta, compatta, orientabile e di classe $\mathcal{C}^\infty$ di una 2-varietà complessa N. Se M non è diffeomorfa a $S^2 \times S^1$ allora il suo rivestimento universale è $\mathbb{R}^3$.*

Lemma 7.24 ([BaI], prop p.496) *Se N è una varietà complessa ed Ω è un aperto connesso di N con frontiera non vuota di classe $\mathcal{C}^\infty$ e la forma di Levi di $b\Omega$ è definita positiva in un punto allora esiste una funzione su Ω limitata, plurisubarmonica e non costante.*

Dim. Se la forma di Levi è definita positiva in $p \in \Omega$, esiste una funzione olomorfa h in un intorno U di p tale che

$$h(p) = 0 \; ; \quad \Re h > 0 \quad \text{su}\, \Omega \cap \mathrm{U}$$

(cfr. [Kra], 3.2.3). Allora, per ϵ piccolo, la funzione su Ω definita come

$$u(z) = \begin{cases} \max\{\Re h(z), \epsilon\} & \text{per } z \in \Omega \cap U \\ -\epsilon & \text{per } z \in \Omega \backslash U \end{cases} .$$

è limitata, non costante e plurisubarmonica. □

Teorema 7.25 ([BaI], teo. 2, oss.3) *Se N è una 2-varietà complessa e Ω è un aperto connesso di N con frontiera una sottovarietà non vuota, compatta e di classe $\mathcal{C}^\infty$, allora N non è biolomorfo a $\mathbb{C}^2$. Analogamente N non può essere biolomorfa ad una varietà complessa che sia olomorficamente convessa, semplicemente connessa all'infinito[4] e senza funzioni plurisubarmoniche limitate non costanti.*

Dim. Per assurdo, se Ω è biolomorfo a $\mathbb{C}^2$, Ω è olomorficamente convesso quindi la sua forma di Levi di $b\Omega$ è semidefinita positiva. Su $\mathbb{C}^2$ le funzioni plurisubarmoniche limitate sono costanti e questo vale di conseguenza su Ω. La forma di Levi di una funzione che localmente definisce $b\Omega$ è allora nulla grazie al lemma quindi Ω è Levi piatta.
Mostriamo che $\pi_1(b\Omega)$ è banale. Si consideri un intorno tubolare U di $b\Omega$ in Ω. Per il biolomorfismo con $\mathbb{C}^2$ esiste un intorno V di $b\Omega$ semplicemente connesso contenuto in U. Solleviamo un cammino su $b\Omega$ in V, utilizzando la retrazione di U. Il cammino ottenuto si contrae in V al cammino costante e, proiettando l'omotopia, il cammino da cui siamo partiti è omotopo a costante in $b\Omega$.
La varietà $b\Omega$ è senza bordo, è compatta per ipotesi, è orientabile e ha gruppo fondamentale finito. Abbiamo una contraddizione con la prima affermazione del teorema 7.22 applicato a $b\Omega$.
L'ultima affermazione dell'enunciato si dimostra analogamente perché le ipotesi sono esattamente le proprietà di $\mathbb{C}^2$ che sono servite nella dimostrazione.
□

[4]esiste una successione esaustiva di compatti i cui i complementari siano semplicemente connessi.

7.6 Le foliazioni come spazi anellati

In questo paragrafo diamo alcuni cenni di possibili sviluppi della teoria delle foliazioni semiolomorfe. Ci limitiamo ad enunciare alcuni risultati, rimandando per la loro dimostrazione a [GT].

Il fascio dei germi di funzioni olomorfe lungo le foglie

Sia $\mathcal{F}$ una foliazione semiolomorfa su una varietà reale M.
Indichiamo con $\mathcal{O}_M$ il fascio dei germi di funzioni a valori complessi, di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M e olomorfe lungo le foglie[5]. Indichiamo inoltre con $\mathcal{O}(M)$ l'algebra delle sezioni globali di $\mathcal{O}$ cioè l'algebra delle funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ su M e olomorfe lungo le foglie.
Nel caso in cui la foliazione sia semiolomorfa analitica reale, indicheremo con $\mathcal{O}'_M$ il sottofascio di $\mathcal{O}_M$ costituito dai germi di funzioni da M in $\mathbb{C}$ analitiche reali e olomorfe lungo le foglie e con $\mathcal{O}'(M)$ l'algebra delle sue sezioni globali.
La proposizione seguente estende ai fasci $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ il classico teorema di Hartogs.

Proposizione 7.26 *Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$ e consideriamo la foliazione semiolomorfa analitica reale che ha come carta $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k, id)$. Sia K un compatto di Ω tale che $\Omega - K$ sia connesso. Allora è surgettivo l'omomorfismo indotto dalla restrizione:*

$$\mathcal{O}'(\Omega) \to \mathcal{O}'(\Omega - K)\,.$$

Se $n \geq 2$ e per ogni $t \in \mathbb{R}^k$ è connesso l'insieme $(\Omega - K) \cap \mathbb{C}^n \times \{t\}$, è surgettivo l'omomorfismo indotto dalla restrizione

$$\mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega - K)\,.$$

Foliazioni q-complete e foliazioni di Stein

Definizione 7.27 *Una funzione $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, dove Ω è un dominio di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$ si dice strettamente q-pseudoconvessa se per $t^0 \in \mathbb{R}^k$ la forma di Levi di $\Phi|_{\Omega \cap \{t = t^0\}}$ ha almeno $(n - q + 1)$ autovalori strettamente positivi.*

Definizione 7.28 *Una foliazione semiolomorfa si dice q-completa se esiste una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$, olomorfa lungo le foglie, d'esaustione*[6] *e strettamente q-pseudoconvessa.*

---

[5] funzioni che ristrette alle foglie sono olomorfe.

[6] Una funzione $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$, dove Ω è un dominio di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$ si dice d'esaustione se sono relativamente compatti gli insiemi $\{\Phi < c\}\,, \forall c \in \mathbb{R}$.

Una foliazione semiolomorfa di una varietà contenuta in una varietà complessa q-completa è una foliazione q-completa.

Definizione 7.29 *Una foliazione semiolomorfa $\mathcal{F}$ su una $(2n+k)$-varietà reale M si dice una foliazione di Stein se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

(i) l'algebra $\mathcal{O}(M)$ separa i punti;

(ii) l'insieme M è $\mathcal{O}$-convesso;

(iii) per ogni $p \in M$ esistono in $\mathcal{O}(M)$ funzioni $f_1, \ldots, f_n, h_1, \ldots, h_k$ tali che, esplicitando le coordinate locali con $(z_1, \ldots, z_n)$ coordinata lungo la placca e $(t_1, \ldots, t_k)$ coordinata trasversa,

$$\text{rank}\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n, h_1, \ldots, h_k)}{\partial(z_1, \ldots, z_n, t_1, \ldots, t_k)} = n + k.$$

Una foliazione di Stein è una foliazione 1-completa (cfr. [GT], teo.1). Le foglie di una foliazione 1-completa sono varietà di Stein. Per le foliazioni di Stein basta osservare che le condizioni [(i)] e [(ii)] valgono anche per le foglie. Per foliazioni 1-complete in generale si utilizza il fatto che si può restringere a una foglie la funzione di esaustione e questo garantisce che la foglia sia una varietà di Stein (cfr. [FG], p.268).

Risultati sui gruppi di omologia e coomologia

Per quanto riguarda la coomologia di una foliazione q-completa ci si possono aspettare risultati analoghi a quella delle varietà complesse q-complete.
C'è tuttavia una profonda differenza tra il fascio $\mathcal{O}$ ed il fascio $\mathcal{O}'$. Ad esempio, se $M = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}$ e si considera la foliazione che ha come foglie gli insemi di livello della seconda coordinata, per il fascio $\mathcal{O}'$ si ha $H^1(N, \mathcal{O}') \neq 0$ perché l'equazione

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z, u) = f(z, u)$$

con f analitica reale può non avere soluzione g analitica reale (si veda l'esempio di Andreotti e Nacinovich, [AN]). Questo fatto ha una conseguenza interessante. L'insieme $\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u$, visto come sottoinsieme di $\mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$, non ha un sistema fondamentale di intorni $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che siano domini d'olomorfia. Infatti, se esistesse un tale sistema di intorni, si avrebbe

$$\mathcal{O}'_{\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u} = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{O}_{U_n}$$

e quindi

$$H^1(\mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_u, \mathcal{O}') = \lim_{n \to +\infty} H^1(U_n, \mathcal{O}_{U_n}) = 0\,.$$

Per quanto riguarda la coomologia di $\mathcal{O}$, l'unico caso noto è quello in cui M sia un'ipersuperficie Levi piatta di una varietà di Stein X e si consideri la foliazione di Levi (si veda [GT]).

Teorema 7.30 *Sia M un'ipersuperficie di classe $\mathcal{C}^\infty$, Levi piatta di una varietà di Stein X. Allora*

$$H^j(M, \mathcal{O}_M) = 0$$

per $j \geq 1$.

Risultati analoghi a quelli dimostrati per le varietà di Stein valgono per le foliazioni di Stein analitiche reali su sottovarietà reali di $\mathbb{C}^N$.
Enunciamo infine un risultato sull'omologia.

Teorema 7.31 ([GT], teo. 6) *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione semiolomorfa analitica e di Stein su una sottovarietà M di $\mathbb{C}^N$. Sono nulli tutti i gruppi di omologia $H_j(M, \mathbb{Z})$ per $j \geq n + k + 1$.*

Bibliografia

[A1] Y. Abe, *A Remark on Levi Foliations*, Math. Rep. Toyama Univ., 1982, vol. 5, pp. 141-145.

[A2] Y. Abe, *On Levi Foliation*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univer. Ser.A, 1984, vol. 38, n. 2, pp. 169-176.

[AF] A. Andreotti, G.A. Fredricks, *Embeddability of Real Analytic Cauchy-Riemann Manifolds*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie IV, 1979, vol. 6, n. 2, pp. 285-304.

[AN] A. Andreotti, M. Nacinovich, *Analytic Convexity*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1980, n. 7, pp. 287-372.

[Ba1] D.E. Barrett, *Global Convexity Properties of Some Families of Three-Dimensional Compact Levi-Flat Hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 1992, vol. 332, pp. 459-474.

[Ba2] D.E. Barrett, *Complex Analytic Realization of Reeb's Foliation of* S^3, Mathematische Zeitschrift, 1990, vol. 203, pp. 355-361.

[BaF] D.E. Barrett, J.E. Fornaess, *On the Smoothness of Levi-Foliations*, Publicaciones Mat., 1988, vol. 32 n. 2, pp. 171177.

[BaI] D.E. Barrett, T. Inaba, *On the Topology of Compact Smooth Three-Dimensional Levi-Flat Hypersurfaces*, The Journal of Geometric Analysis, 1992, vol. 2, n. 6, pp. 489-497.

[BeG] E. Bedford, G. Gaveau, *Envelopes of Holomorphy of certain* 2-*Spheres in* $\mathbb{C}^2$, American Journal of Mathematics, 1983, vol. 105, pp. 975-1009.

[BeK] E. Bedford, M. Kalka, *Foliations and Complex Monge-Ampére Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 1977, vol. 30, n. 5, pp. 543-571.

[BeKl] E. Bedford, W. Klingenberg, *On the Envelopes of Holomorphy of a 2-Sphere in $\mathbb{C}^2$*, Journal of the American Mathematical Society, 1991, vol. 4, pp. 623-646.

[Bi] E. Bishop, *Differentiable Manifolds in Complex Euclidean Space*, Duke Math. J., 1965, vol. 32, pp. 1-22.

[Bo] A. Boggess, *CR manifolds and tangential CR complex*, CRC Press, 1991.

[CC1] A. Candel, L. Conlon, *Foliations I*, Graduate Study in Mathematics 23, American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

[CC2] A. Candel, L. Conlon, *Foliations II*, Graduate Study in Mathematics 60, American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

[CL] C. Camacho, A. Lins Neto, *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[CM] G. Citti, A. Montanari, *$\mathcal{C}^\infty$ Regularity of Solutions of an Equation of Levi's Type in $\mathbb{R}^{2n+1}$*, Ann. Mat. Pura Appl., 2001, serie 4, vol. 180, n. 1, pp. 27-50.

[CS] E.M. Chirka, N.V. Shcherbina, *Pseudoconvexity of Rigid Domains and Foliations of Hull of Graphs*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, Serie IV, 1995, vol. XXII, n. 4, pp. 707-735.

[DTZ] P. Dolbeault, G. Tomassini, D. Zaitsev, *On Boundaries of Levi Flat Hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$*, preprint.

[E] Y. Eliashberg, *Filling by Holomorphic Disks and its Applications*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 1991, vol. 151, pp. 45-67.

[F1] M. Freeman, *Local Complex Foliation of Real Submanifold*, Math. Ann., 1974, vol. 209, pp. 1-30.

[F2] M. Freeman, *The Levi Form and Local Complex Foliations*, Proceedings of the Amer. Math. Soc., 1976, vol. 57, n. 2, pp. 369-370.

[FG] K. Fritzsche, H. Grauert, *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*, Springer, 2002.

[Gro] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic Curves in Symplectic Manifolds*, Invent. Math., 1985, vol. 82 pp. 307-347.

[GT] G. GIGANTE, G. TOMASSINI, *Foliations with Complex Leaves*, Differential Geometry and its Applications, North-Holland, 1995, n. 5, pp. 33-49.

[H] M.W. HIRSCH, *Differential topology*, Springer Verlag, 1976.

[Kop] N. KOPELL, *Commuting diffeomorphisms*, Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XIV, Berkeley, 1968), Amer. Math. Soc., 1970, pp. 165-184.

[Kra] S.G. KRANTZ, *Function theory of several complex variables*, John Wiley & Sons, New York, 1982.

[Kru] N.G. KRUŽILIN, *Two-Dimensional Spheres in the Boundary of Strictly Pseudoconvex Domains in* $\mathbb{C}^2$, Izv. Akad. Nauk USSR Ser. Mat., 1991, vol. 55, pp. 1194-1237.

[L] A. LINS NETO, *A Note on Projective Levi Flats and Minimal Sets of Algebraic Foliations*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1999, vol. 49, n. 4, pp. 1369-1385.

[Mi] J.W. MILNOR, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, 1997.

[MR] A. MILANI, C. REA, *Geometry and Function Algebra on Pseudo-flat Manifolds*, Annali Scuola Normale Superiore Classe di Scienze, 1972, vol. 26, pp. 695-709.

[Mo] C.B. MORREY, *On the Solutions of Quasilinear Elliptic Partial Differential Equations*, Trans. Amer. Math. Soc., 1938, vol. 43, pp. 126-321.

[MS] C.C. MOORE, C. SCHOCHET, *Global Analysis on Foliated Spaces*, Springer Verlag, 1988.

[MV] L. MEERSSEMAN, A. VERJOVSKY, A smooth foliation on the 5-sphere by complex surfaces, Ann. of Math. (2), 2002, vol. 156, n. 3, pp. 915-930.

[O1] T. OHSAWA, *Nonexistence of Real Analytic Levi Flat Hypersurfaces in* $\mathbb{P}^2$, Nagoya Math. J., 2000, vol. 158, pp. 95-98.

[O2] T. OHSAWA, *On the Levi-flats in Complex Tori of Dimension Two*, preprint.

[R] C. Rea, *Levi-flat Submanifolds and Holomorphic Extension of Foliations*, Annali Scuola Normale Superiore Classe di Scienze, 1972, vol. 26, pp. 665-681.

[RR] H. Rosenberg, R. Roussarie, *Some Remarks on Stability of Foliations*, Journal of Differential Geometry, 1975, vol. 10, pp. 207-219.

[Sh] N.V. Shcherbina, *On the Polynomial Hull of a Graph*, Journal of Mathematics of the Indiana University, 1993, vol. 42, pp. 477-503.

[ShT] N.V. Shcherbina, G.Tomassini, *The Dirichlet Problem for Levi-flat Graphs over Unbounded Domains*, International Mathematics Research Notices, 1999, n. 3, pp. 111-151.

[Si] Y.T. Siu, *Non Existence of Smooth Levi-Flat Hypersurfaces in Complex Projective Spaces of Dimension* ≥ 3, Annals of Mathematics (2), 2000, vol. 151, n. 3, pp. 1217-1243.

[SlT] Z. Slodkowski, G. Tomassini, *Weak Solutions for the Levi Equation and Envelope of Holomorphy*, J. Funct. Anal., 1991, vol. 101, pp. 392-407.

[Sm] K.Smith, *An Invitation to Algebraic Geometry*, Springer, 2000.

[So] F. Sommer, *Komplex-Analytische Blätterung Reeller Hyperflächen im* $\mathbb{C}^n$, Math. Annalen, 1959, vol. 137, pp. 392-411.

[Ta] I. Tamura, *Topology of Foliations: An Introduction*, American Mathematical Society, Providence RI, 1997.

[Vl] V.S. Vladimirov, *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*, M.I.T. Press, 1966.