

CAPITOLO 1

FILTRI CIC (CASCADED INTEGRATOR AND COMB)

Attualmente nell'ambito dei moderni sistemi DSP (Digital Signal Processing) vi sono specifiche di progetto che richiedono frequenze di campionamento fortemente maggiori rispetto a quelle strettamente necessarie per una corretta elaborazione numerica del segnale.

In tali casi è necessaria una forte riduzione del numero dei campioni, in assenza della quale si avrebbe sia l'impiego di filtri molto lunghi che un grande appesantimento della potenza di calcolo, vista la necessità di eseguire un elevato numero di moltiplicazioni al secondo.

Tale operazione di conversione del rate dei campioni risulta quindi estremamente laboriosa poiché che con le attuali implementazioni difficilmente si riescono ad ottenere moltiplicatori molto veloci; inoltre un grosso ostacolo è rappresentato dai filtri digitali con un elevato numero di prese, il che comporta la necessità di grossi registri di memoria.

Un'ottima alternativa a tale problema è stata offerta nel 1981 da Hogenauer in [1] grazie ad una classe di filtri digitali a fase lineare e risposta impulsiva finita (FIR) particolarmente idonei per eseguire operazioni di decimazione (riduzione della frequenza di campionamento) e caratterizzati dall'assenza di moltiplicatori (essendovi impiegati solamente sommatore, sottrattori e registri in numero limitato).

Tali filtri, denominati filtri CIC (Cascade Integrator and Comb) a causa della loro struttura costituita da una parte integratrice ed una a pettine disposte a cascata, hanno notevoli peculiarità:

- non sono necessari moltiplicatori;
- non ci sono coefficienti da memorizzare;
- la loro struttura è altamente regolare, infatti si può ottenere un intero filtro semplicemente disponendo in modo opportuno due blocchetti elementari;
- non sono richieste unità di controllo o temporizzazioni particolarmente complicate;
- lo stesso filtro può essere utilizzato per molti valori diversi del rate dei campioni;
- facilità estrema di progetto: infatti i parametri si possono ricavare da tabelle e le dimensioni dei registri intermedi si possono ricavare da formule.

In **questo capitolo** si descriveranno le caratteristiche del filtro CIC idoneo per effettuare operazioni di decimazione e caratterizzato da un'architettura assente di moltiplicatori e con un numero limitato di registri.

Nel **capitolo 2** si descriverà il progetto del sistema di un ricevitore digitale satellitare realizzato per ricevere dati a velocità variabile basato sul filtro CIC, mettendo in particolare rilievo lo stadio A/D (analog to digital, ossia analogico digitale) e le sue problematiche.

Nel **capitolo 3** infine si dimensionerà ed ottimizzerà lo stadio di conversione A/D di suddetto ricevitore digitale satellitare.

1.1 - IL FILTRO CIC DECIMATORE

L'operazione di decimazione, riducendo la frequenza di campionamento secondo un fattore r , comporta un avvicinamento delle repliche spettrali del segnale originario con conseguente rischio di aliasing qualora la banda di quest'ultimo non fosse opportunamente limitata.

Quindi il progetto di un filtro decimatore deve anche garantire una adeguata attenuazione dell'aliasing e delle componenti immagine presenti nello spettro del segnale decimato.

L'impiego dei filtri CIC, che provvedono contemporaneamente alla decimazione ed all'eliminazione dei disturbi indesiderati mediante filtraggio passa-basso, consente di soddisfare le esigenze basilari sopra evidenziate e nello stesso tempo presenta notevoli vantaggi dal punto di vista realizzativo essendo tali filtri privi di moltiplicatori e dotati di un numero limitato di registri.

1.2 - DESCRIZIONE DEL FILTRO

Nella figura 1.1 mostriamo la struttura del filtro CIC da cui deriva la sua stessa denominazione.

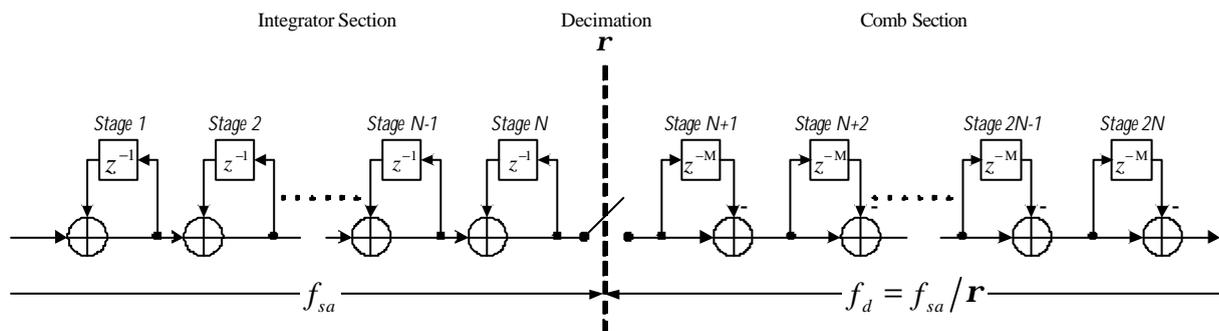


Figura 1.1-Struttura del filtro CIC decimatore

Esso infatti risulta caratterizzato dalla cascata di una sezione integratrice operante ad un'alta frequenza di campionamento f_{sa} e di una sezione combinatoria operante ad una frequenza più bassa $f_d = f_{sa} / r$.

La sezione integratrice è composta da N (ordine del filtro) stadi integratori digitali ideali ciascuno dei quali opera ad un'alta frequenza di campionamento f_{sa} e viene implementato come un filtro a singolo polo ,con coefficiente di reazione unitario e funzione di trasferimento

$$H_i(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (1.1)$$

per cui la cascata degli N integratori ha una funzione di trasferimento complessiva (riferita alla frequenza f_{sa})

$$H_I(z) = [H_i(z)]^N = \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} \right)^N \quad (1.2)$$

Successivamente il flusso di campioni in uscita dall'ultimo stadio integratore viene decimato di un fattore intero r (detto fattore di decimazione), ossia ogni r campioni ne viene conservato uno e vengono eliminati gli altri, ottenendo in tal modo un flusso “decimato” di rate:

$$f_d = \frac{f_{sa}}{r} \quad (1.3)$$

corrispondente ad una spaziatura fra i campioni pari a $T_d = rT_{sa}$.

Il flusso di rate f_d viene poi elaborato dalla sezione combinatoria a sua volta costituita da N stadi combinatori (ciascuno dei quali opera a frequenza f_d e presenta un ritardo differenziale di M campioni).

La funzione di trasferimento del singolo stadio combinatorio (riferita alla frequenza f_d) risulta:

$$H_{c@f_d}(z) = (1 - z^{-M}) \quad (1.4)$$

pertanto la cascata degli N combinatori presenta una funzione di trasferimento complessiva:

$$H_{C@f_d}(z) = \left[H_{c@f_d}(z) \right]^N = \left(1 - z^{-M} \right)^N \quad (1.5)$$

Riferendo la (1.5) alla frequenza di ingresso f_{sa} (più alta) si ottiene:

$$H_C(z) = \left(1 - z^{-rM} \right)^N \quad (1.6)$$

Combinando la (1.2) e la (1.6) possiamo ora ricavare la *funzione di trasferimento globale del filtro CIC* riferita alla frequenza di campionamento in ingresso f_{sa} :

$$H(z) = H_I(z)H_C(z) = \left(\frac{1 - z^{-rM}}{1 - z^{-1}} \right)^N = \left[\sum_{k=0}^{rM-1} z^{-k} \right]^N \quad (1.7)$$

Analizzando la (1.7) si può notare come il filtro CIC sia funzionalmente equivalente alla cascata di N filtri FIR uniformi ciascuno dei quali operante a frequenza f_{sa} ed avente funzione di trasferimento:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{rM-1} z^{-k} \quad (1.8)$$

seguiti poi da uno stadio di decimazione secondo un fattore intero r come mostrato in figura 1.2.

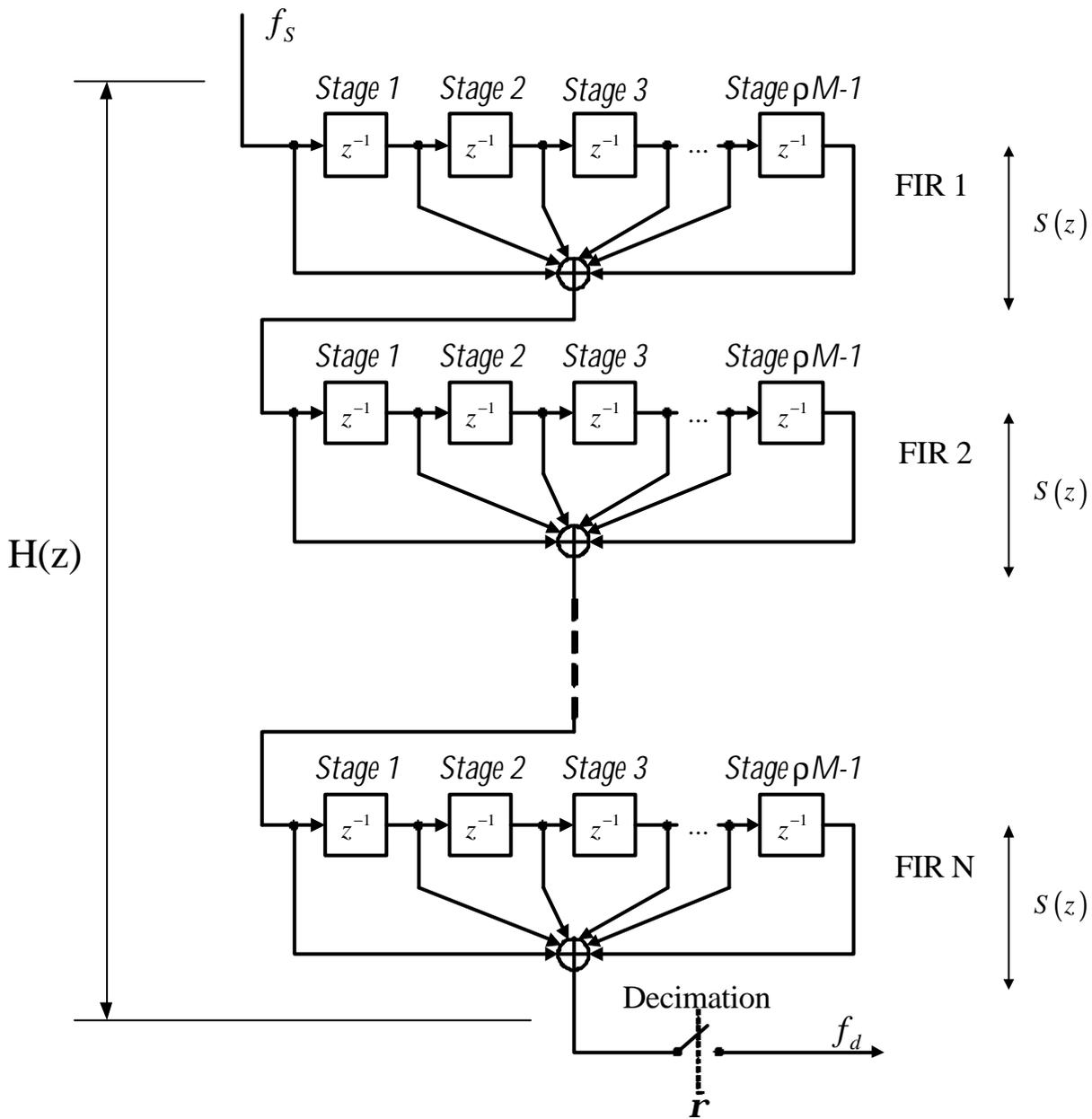


Figura 1.2-Rappresentazione equivalente del filtro CIC decimatore

1.3 - CARATTERISTICHE SPETTRALI DEL FILTRO

Il filtro CIC esaminato presenta caratteristiche spettrali di tipo passa-basso. La *risposta in frequenza* può essere ricavata ponendo $z = e^{j2\pi fT_{sa}}$ nella (1.7) ottenendo:

$$H(f) = \left(\frac{1 - e^{-j2\mathbf{p}\mathbf{r}MfT_{sa}}}{1 - e^{-j2\mathbf{p}fT_{sa}}} \right)^N = e^{-j\mathbf{p}fT_{sa}(\mathbf{r}M-1)N} \left[\frac{\sin(\mathbf{p}fT_{sa}\mathbf{r}M)}{\sin(\mathbf{p}fT_{sa})} \right]^N \quad (1.9)$$

Posto $f_{sa} = 1/T_{sa}$ la *risposta in ampiezza* del CIC risulta data dalla seguente espressione :

$$|H(f)| = \left| \frac{\sin\left(\mathbf{p}\mathbf{r}M \frac{f}{f_{sa}}\right)}{\sin\left(\mathbf{p} \frac{f}{f_{sa}}\right)} \right|^N \quad (1.10)$$

o equivalentemente ponendo $f_d = f_{sa}/\mathbf{r}$ nella (1.10) otteniamo:

$$|H(f)| = \left| \frac{\sin\left(\mathbf{p}M \frac{f}{f_d}\right)}{\sin\left(\mathbf{p} \frac{f}{\mathbf{r}f_d}\right)} \right|^N \quad (1.11)$$

Tenendo conto che, secondo la (1.9), risulta $H(0) = (\mathbf{r}M)^N$ possiamo introdurre la seguente *risposta in frequenza normalizzata* :

$$H_n(f) = \frac{H(f)}{H(0)} = e^{-j\mathbf{p}fT_{sa}(\mathbf{r}M-1)N} \left[\frac{1}{\mathbf{r}M} \frac{\sin(\mathbf{p}fT_{sa}\mathbf{r}M)}{\sin(\mathbf{p}fT_{sa})} \right]^N \quad (1.12)$$

e la seguente *risposta in ampiezza normalizzata* :

$$|H_n(f)| = \left| \frac{1}{\mathbf{r}M} \frac{\sin\left(\mathbf{p}\mathbf{r}M \frac{f}{f_{sa}}\right)}{\sin\left(\mathbf{p} \frac{f}{f_{sa}}\right)} \right|^N = \left| \frac{1}{\mathbf{r}M} \frac{\sin\left(\mathbf{p}M \frac{f}{f_d}\right)}{\sin\left(\mathbf{p} \frac{f}{\mathbf{r}f_d}\right)} \right|^N \quad (1.13)$$

ottenendo, ovviamente, $H_n(0) = 1$. Nel seguito parlando di risposta in ampiezza del filtro faremo sempre riferimento alla (1.13).

Un esempio di risposta in ampiezza viene riportato in figura 1.3 per un filtro CIC di ordine $N=4$, fattore di decimazione $r = 6$ e considerando due diversi valori del ritardo differenziale ($M=1$ e $M=2$). Come si può notare, i nulli della risposta in ampiezza (1.13) si hanno in corrispondenza delle frequenze:

$$f_k = \frac{k}{MT_d} = \frac{kf_d}{M} = \frac{kf_{sa}}{M r} \quad (\text{con } k \neq 0, \text{intero, nonmultiplo di } M) \quad (1.14)$$

di cui quelle più significative, per quanto concerne la selettività del filtro, corrispondono a multipli interi di f_d . Infatti per un filtro CIC decimatore la regione centrata attorno ad ogni M -esimo nullo cade all'interno della banda passante del filtro causando errori di aliasing, per tale motivo si è soliti denominare tali regioni come *bande di aliasing* e corrispondono alle seguenti gamme di frequenze

$$(if_d - B_{-3dB}) \leq f \leq (if_d + B_{-3dB}) \quad \text{per } f \leq \frac{f_d}{2} \quad \text{ed } i = 0, 1, 2, \dots, \lfloor r/2 \rfloor \quad (1.15)$$

indicando con $\lfloor x \rfloor$ il più grande valore intero non superiore ad x e con B_{-3dB} la banda a -3dB del filtro espressa in funzione della frequenza più bassa f_d .

Nell'esempio mostrato in figura 1.3, relativamente al caso $M=1$ (valore comunemente adottato per quanto spiegato in seguito) si ha $B_{-3dB} \cong 0.154f_d$ e le bande di aliasing risultano centrate attorno alle frequenze $f_1 = f_d$, $f_2 = 2f_d$ e $f_3 = 3f_d$.

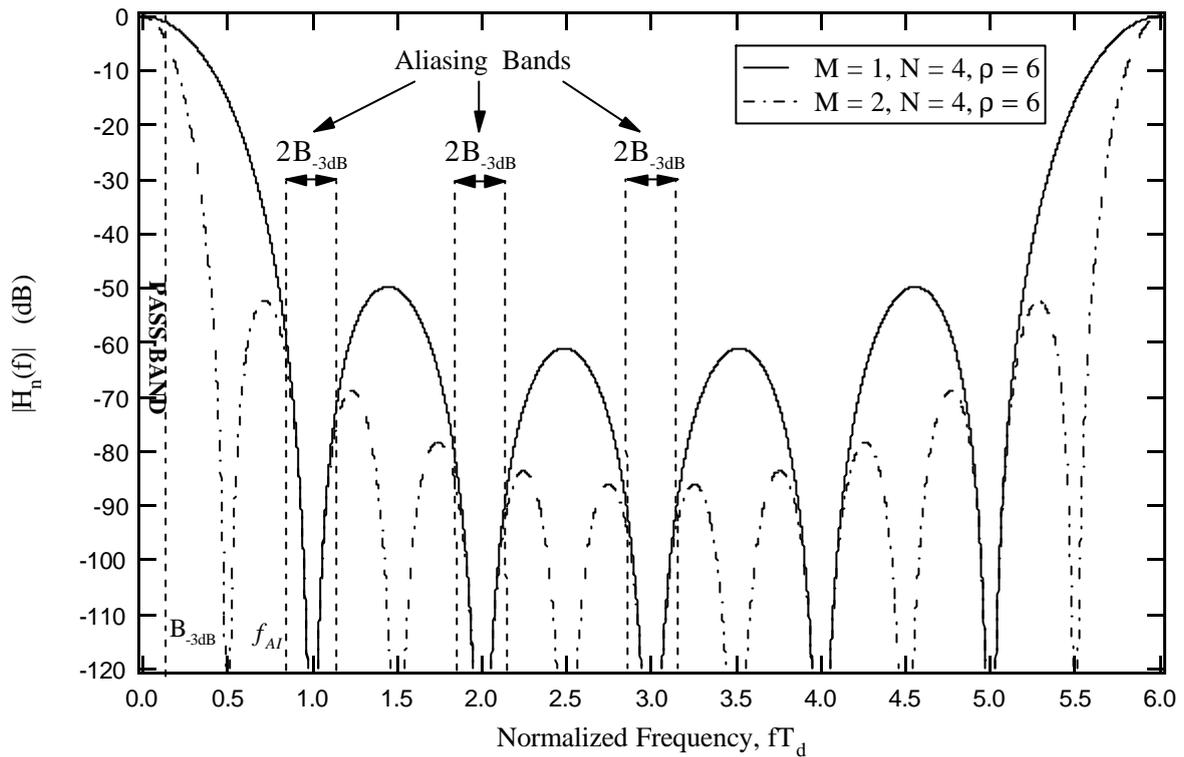


Figura 1.3-Esempio risposta in frequenza normalizzata di un filtro CIC decimatore

Nei progetti in generale gli errori di aliasing possono valutarsi considerando il massimo errore su tutte le bande di aliasing, tuttavia per un' ampia classe di filtri, se risulta $B_{-3dB} \leq f_d/2M$, tale massimo errore si può verificare in corrispondenza del limite sinistro della prima banda di aliasing e che indicheremo con $f_{AI} = f_d - B_{-3dB}$.

Supponendo di utilizzare il filtro in un sistema di comunicazione per il quale si impieghino in trasmissione degli impulsi con sagomatura a radice di coseno rialzato con fattore di roll-off variabile $\mathbf{a} = 0.20 \div 0.35$, il segnale utile (convertito in banda base) presente all'ingresso del filtro occuperà una banda:

$$B_{BB} = \frac{(1+\mathbf{a})}{2} R_S \quad (1.16)$$

dove R_S indica il symbol-rate usato in trasmissione. Assumendo, come in genere accade nella pratica, $f_d = 2R_S$ e normalizzando la (1.16) rispetto a tale valore si ottiene

$$\mathbf{b}_{BB} = \frac{B_{BB}}{f_d} = \frac{(1+a)}{4} = 0.30 \div 0.3375 \quad (1.17)$$

La risposta in ampiezza del CIC non è piatta sulla banda del segnale utile e quindi sarà necessario impiegare successivamente un filtro FIR equalizzatore al fine di minimizzare le distorsioni subite dal segnale stesso.

Tornando alla (1.9) si può osservare come la risposta in frequenza del filtro sia completamente determinata dai 3 parametri interi \mathbf{r} , M e N , ciascuno dei quali può essere fissato in modo da soddisfare il più possibile le specifiche di progetto secondo quanto di seguito specificato:

- Il *fattore di decimazione* \mathbf{r} determina la posizione dei nulli in corrispondenza delle frequenze $f_k = kf_{sa}/\mathbf{r} = kf_d$, fondamentali al fine di rimuovere quelle componenti spettrali che, in seguito all'operazione di decimazione, vengono spostate entro la banda del segnale utile. Nelle figura 1.4 si riporta l'andamento di $|H_n(f)|$ al variare di \mathbf{r} , fissati $M=1$ ed $N=4$.
- Il *ritardo differenziale* M determina la posizione dei nulli intermedi fra 2 di quelli localizzati alle frequenze $f_k = kf_d$. Tali nulli intermedi tuttavia sono di scarsa utilità per quanto riguarda il soddisfacimento delle specifiche di progetto dato che al crescere di M non si ottiene un significativo miglioramento delle capacità selettive del filtro mentre aumenta la capacità di memoria richiesta. Per tali ragioni nel seguito limiteremo la nostra attenzione al caso $M=1$. A conferma di quanto ora evidenziato in figura 1.5 riportiamo l'andamento di $|H_n(f)|$ al variare di M , fissati $\mathbf{r} = 6$ e $N = 4$.

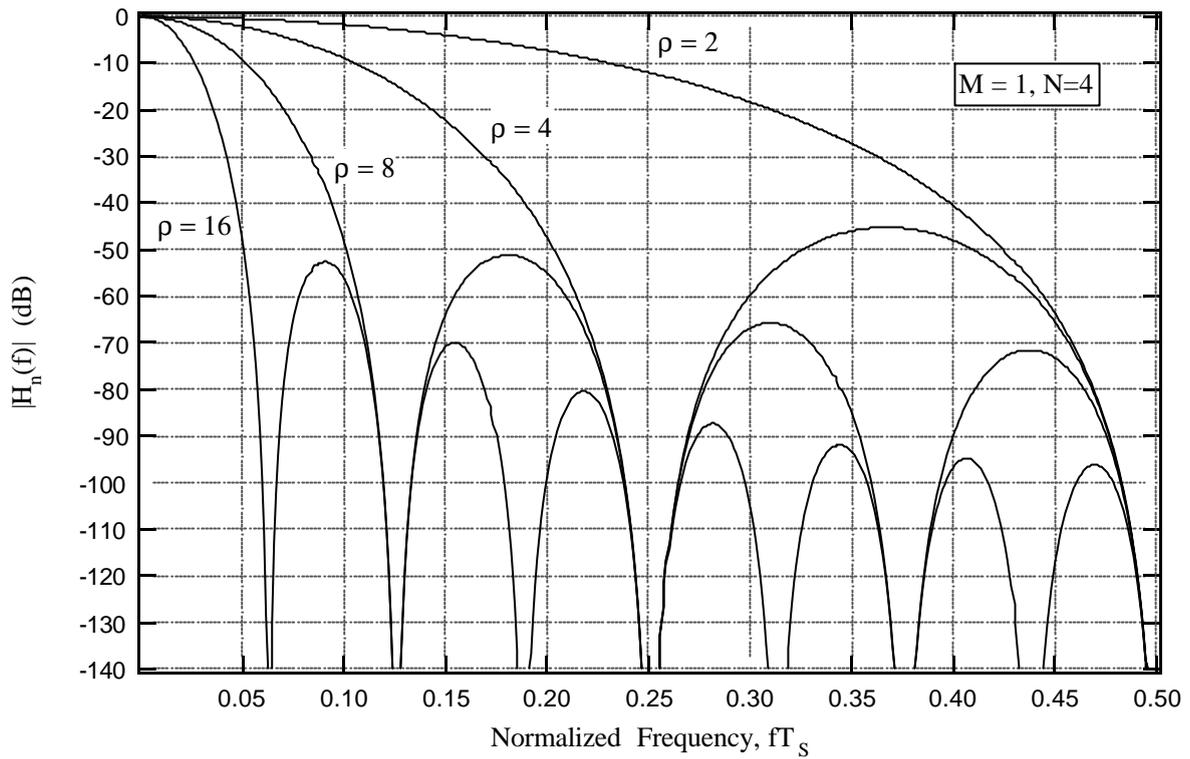


Figura 1.4-Risposta in frequenza del filtro CIC al variare di ρ

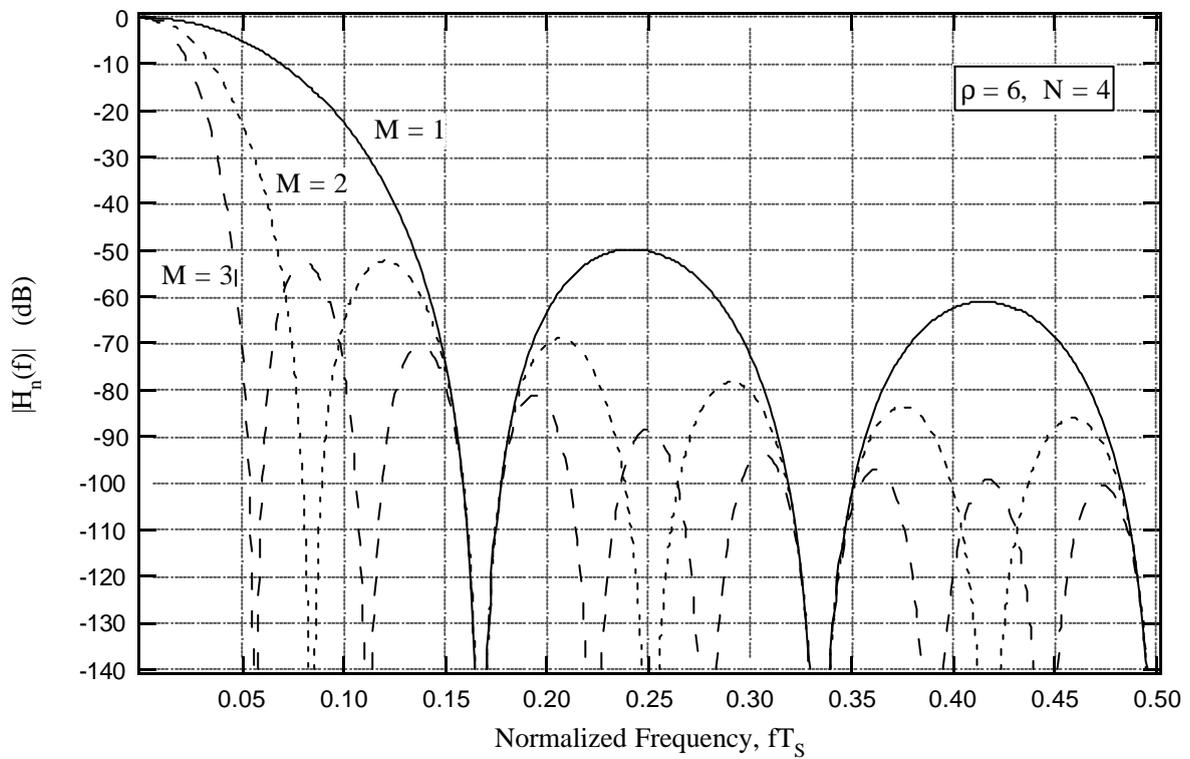


Figura 1.5-Risposta in frequenza del filtro CIC al variare di M

- L'ordine del filtro N determina la forma dei notch relativi alle frequenze $f_k = kf_d$ e l'ampiezza dei lobi laterali. Il valore di tale parametro andrà pertanto scelto al fine di ottenere la richiesta attenuazione delle componenti spettrali indesiderate e, come vedremo nel paragrafo 1.3, al fine di limitare il rumore all'uscita del filtro. Nelle figura 1.6 viene mostrato l'andamento di $|H_n(f)|$ al variare di N , fissati $M=1$ e $r = 8$.

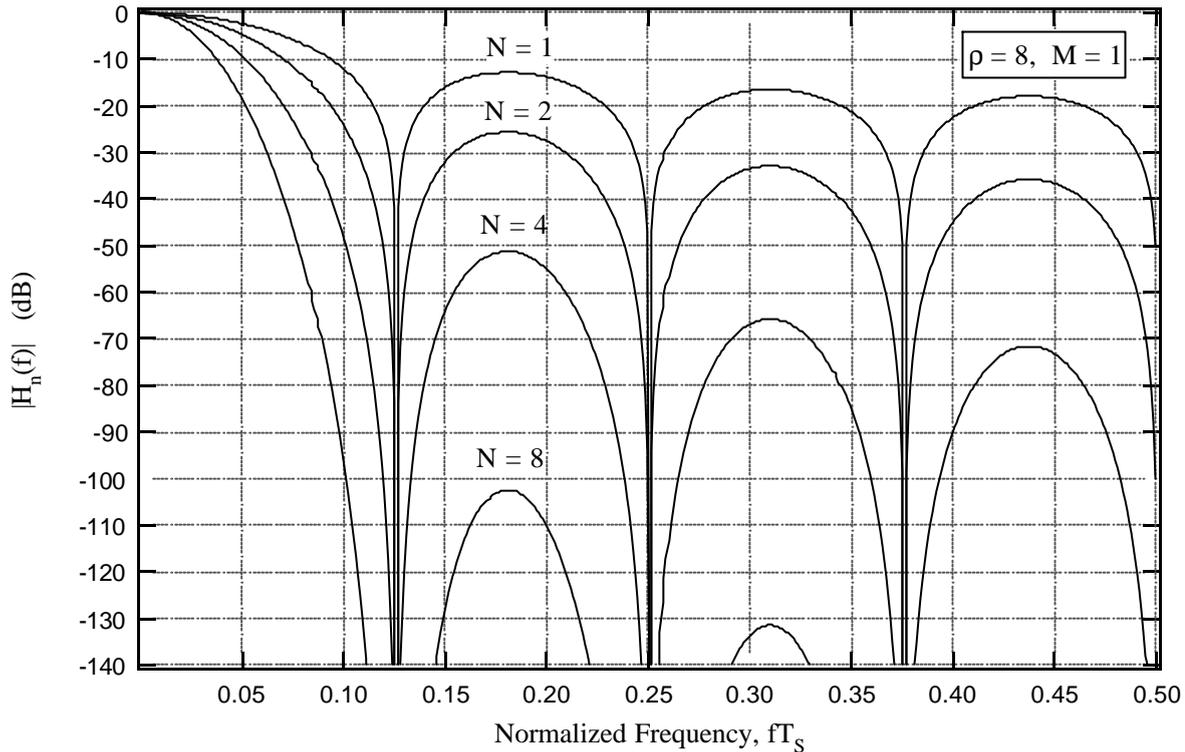


Figura 1.6-Risposta in frequenza del filtro CIC al variare di N

1.4 - SPETTRO DI RUMORE IN USCITA DAL FILTRO

Supponiamo che al segnale utile presente all'ingresso del filtro si sovrapponga un processo di rumore gaussiano bianco discreto $w(kT_{sa})$ tale che:

$$w(kT_{sa}) = w_R(kT_{sa}) + jw_I(kT_{sa}) \quad (1.18)$$

dove $w_R(kT_{sa}), w_I(kT_{sa})$ sono processi gaussiani indipendenti con densità spettrale di potenza (bilatera) N_0 . Considerando lo schema in figura 1.7 andremo adesso a valutare lo spettro del rumore dopo il filtraggio operato dal CIC.

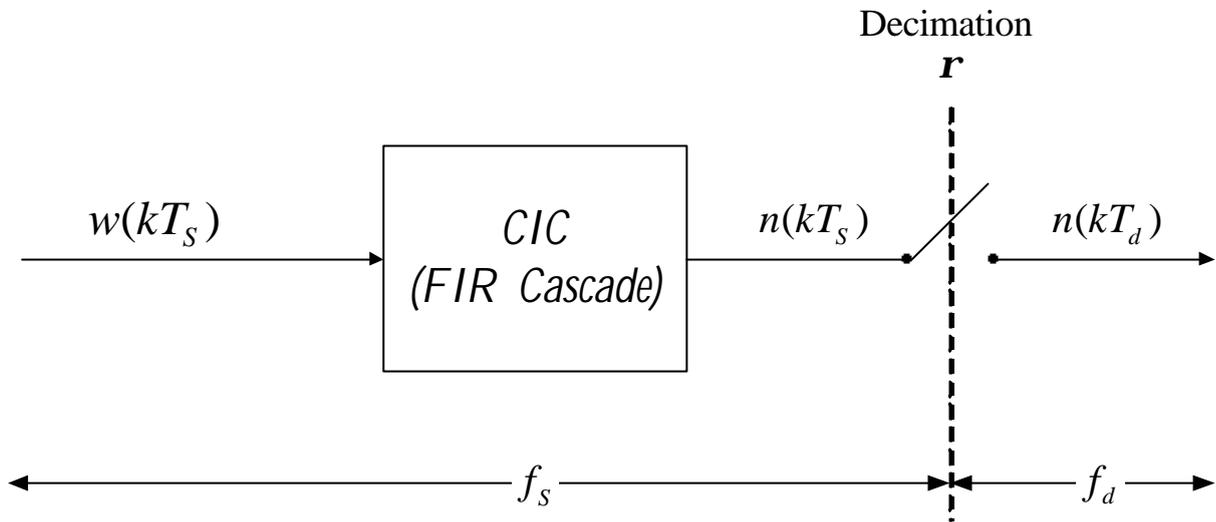


Figura 1.7-Filtraggio del rumore

Per quanto prima assunto la densità spettrale del processo $w(kT_{sa})$ risulta pari a

$$S_w(f) = 2N_0 \quad (1.19)$$

mentre quella del processo di rumore $n(kT_{sa})$ a valle dello stadio di filtraggio del CIC è data dalla seguente espressione

$$S_n(f) = S_w(f) |H_n(f)|^2 = 2N_0 |H_n(f)|^2 \quad (1.20)$$

Si noti come la radice quadrata della densità spettrale di potenza di $n(kT_{sa})$ risulti proporzionale all'ampiezza della risposta in frequenza del filtro.

La successiva operazione di decimazione comporta una traslazione dello spettro relativo alla (1.20) sulle frequenze $kf_d = kf_{sa}/r$ con conseguente sovrapposizione delle varie repliche spettrali. In virtù di questo fenomeno il segnale utile risentirà dell'aliasing prodotta dalle varie repliche spettrali come mostrato nella figura 1.8.

Il contributo totale dell'aliasing fra le varie repliche spettrali, denominato *alias profile*, risulta costituito da r termini ed è superiormente limitato dalla seguente funzione

$$A(f) = \sum_{\substack{k=-r/2 \\ k \neq 0}}^{r/2} |S_n(f - kf_d)| \quad (1.21)$$

il cui grafico (normalizzato) viene riportato in figura 1.9.

Il contributo totale di rumore in uscita dal filtro CIC è dato dalla somma della componente $S_n(f)$ e dell' *alias profile* $A(f)$ secondo quanto mostrato in figura 1.10.

Tenendo conto di quanto ora ricavato, sarà necessario scegliere il parametro N in modo tale da mantenere l'alias profile quanto più basso possibile entro la banda del segnale utile.

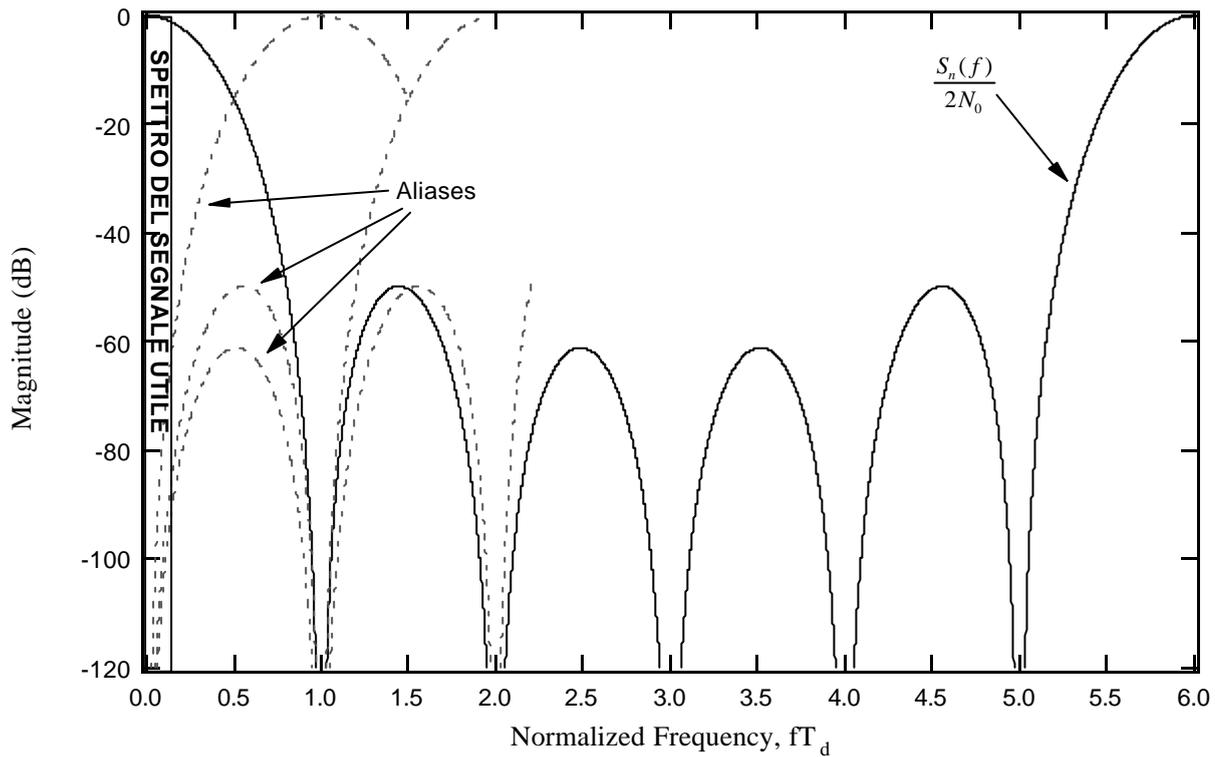


Figura 1.8-Effetto di aliasing del CIC dovuto alla decimazione

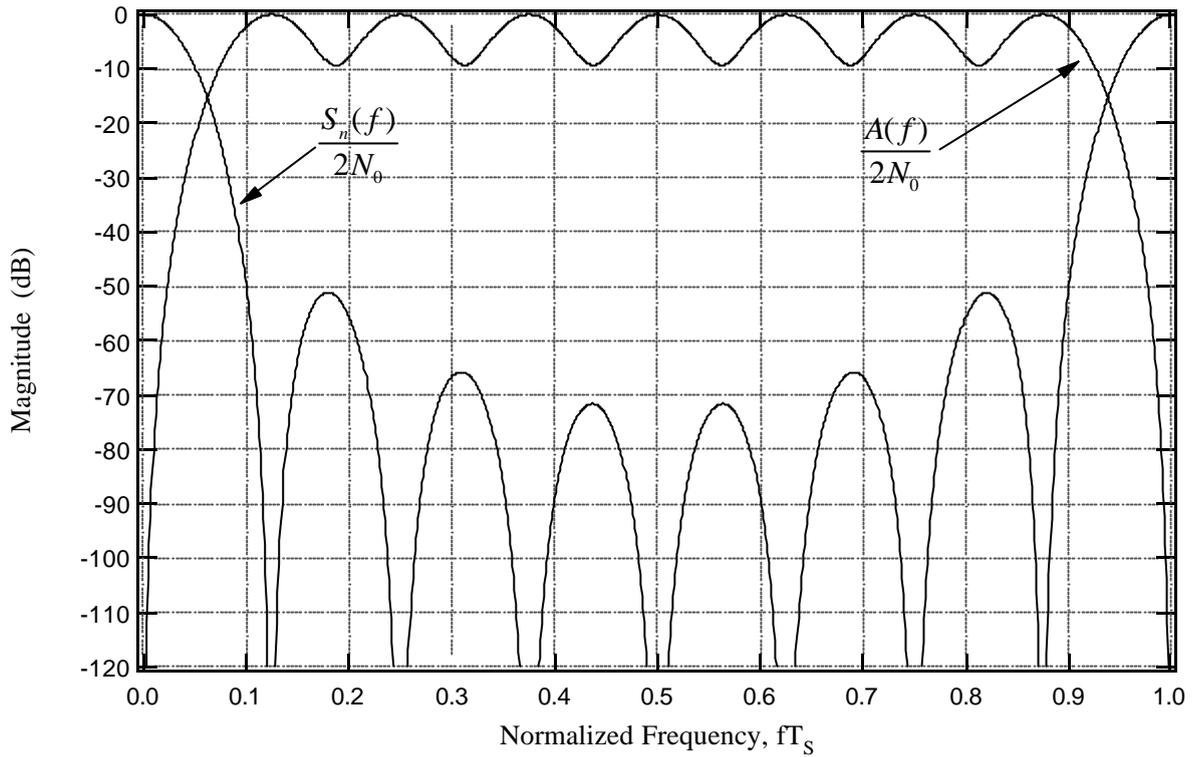


Figura 1.9-Andamenti normalizzati dell'alias profile e della densità spettrale di potenza in uscita allo stadio di filtraggio del CIC

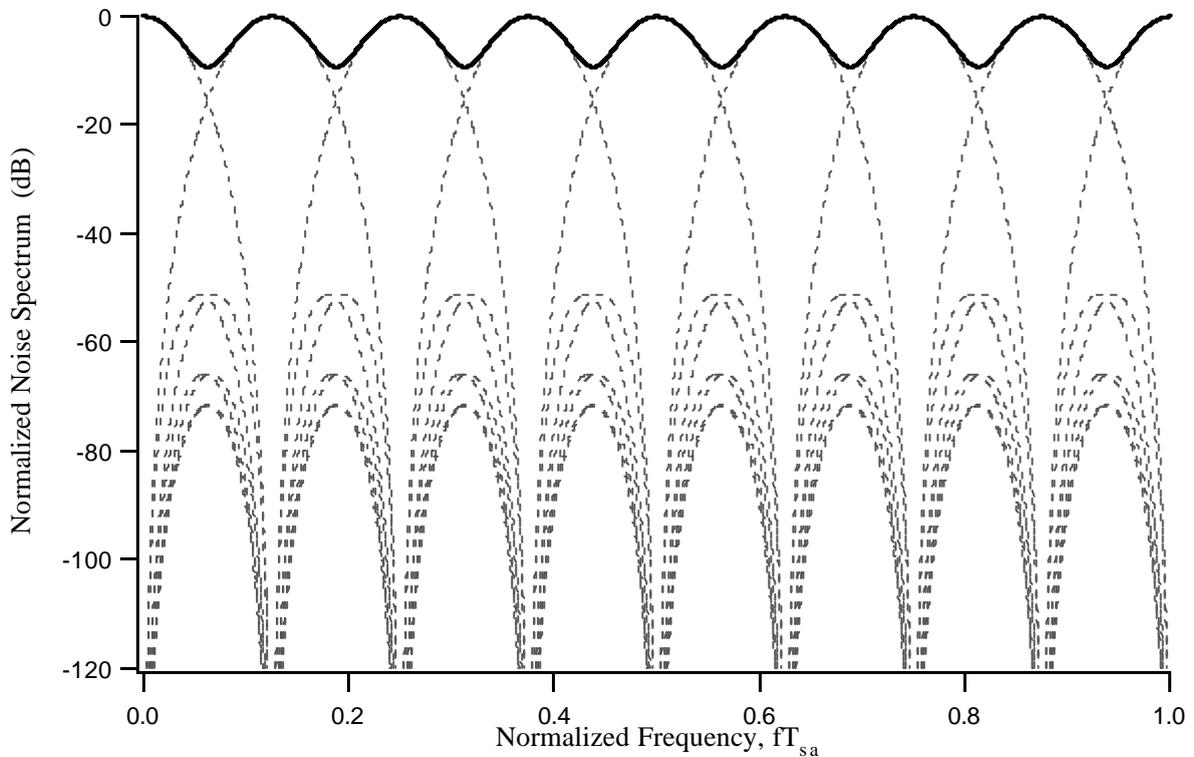


Figura 1.10-Spettro di rumore normalizzato in uscita dal CIC

1.5 - CONCLUSIONE

Nei precedenti paragrafi si è visto come l'impiego di un filtro CIC decimatore consenta di mantenere gli errori dovuti all'aliasing nella banda passante entro determinati limiti agendo sul numero N (ordine del filtro) degli stadi costituenti ogni sua sezione.

Va anche osservato che il filtro, eseguendo una transizione da una frequenza di campionamento alta ad una più bassa consente l'impiego di filtri convenzionali operanti in bassa frequenza al fine di sagomare opportunamente la risposta in frequenza .

Dal punto di vista implementativo, i filtri CIC presentano alcuni vantaggi che fanno di essi una economica alternativa ad alcune soluzioni convenzionali. Essi infatti non presentano moltiplicatori, non richiedono una eccessiva capacità di memoria, hanno una struttura molto regolare basata su due soli blocchi base ed infine possono essere utilizzati in applicazioni caratterizzate da fattori di decimazione diversi prevedendo semplicemente l'impiego di un circuito scalatore e minime modifiche da apportarsi al filtro di timing. Nonostante i notevoli vantaggi sopra menzionati occorre infine tener presente che per alti fattori di decimazione r , l'ampiezza dei registri potrebbe risultare molto grande ed inoltre la dipendenza della risposta in frequenza dai soli 3 parametri del filtro comporta un limitato insieme di caratteristiche del filtro stesso.