

CAPITOLO 5: Il cascade relè

In questo capitolo si introdurrà l'identificazione di sistemi mediante cascade relè [9]. Tale tecnica permette di identificare simultaneamente più punti della risposta in frequenza di un processo lineare a partire dalle oscillazioni stazionarie del segnale di uscita. La versione iniziale presentata in [9], tuttavia, può essere estesa per identificare parametri caratteristici di un processo di Hammestein (non linearità, ritardo introdotto, coefficienti della funzione di trasferimento della parte lineare). Come sarà evidente, il grosso problema nell'ottenere un'identificazione robusta è la corruzione del segnale di uscita attraverso rumore, risolvibile con opportune tecniche di analisi spettrale.

5.1 Il cascade relè

La tecnica del cascade relè consiste nell'utilizzare due relè per identificare più punti della risposta in frequenza di un sistema lineare. Come si nota in figura, i due relè sono inseriti in due differenti cicli: lo *slave relè*, corrispondente al classico relè utilizzato per identificare la pulsazione critica ω_c di un sistema lineare, si trova nell'anello interno. Il *master relè*, al contrario, inserito per la prima volta all'interno dell'identificazione di sistemi, viene posizionato nell'anello esterno.

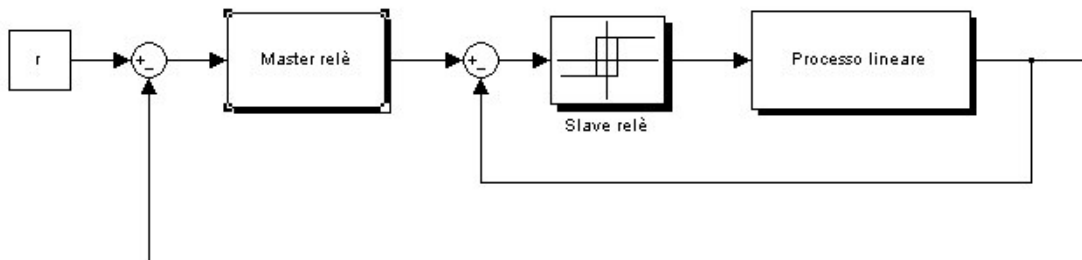


Figura 5.1. Schema di montaggio del cascade relè

Il master relè viene inserito per fornire al processo ulteriori eccitazioni rispetto a quella di frequenza ω_c imposta dallo slave relè, pur continuando quest'ultima ad esistere. Il master relè, comunque, affinché possa funzionare come descritto, deve essere opportunamente tarato. Questa operazione, comunque, risulta essere piuttosto semplice, visto che i parametri da gestire sono solamente due:

l'ampiezza d_2 dello slave relè e un bias μ_1 . Il master relè opera alla frequenza $0.5\omega_c$, e il suo funzionamento può essere così descritto:

$$u_1(k) = \begin{cases} -u_1(k-1) + 2\mu_1 & \text{se } e_1(k-1) < 0 \text{ e } e_1(k) > 0 \\ u_1(k-1) - 2\mu_1 & \text{se } e_1(k-1) > 0 \text{ e } e_1(k) < 0 \\ u_1(k-1) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.1.1)$$

dove con e_1 si indica il segnale in ingresso al master relè.

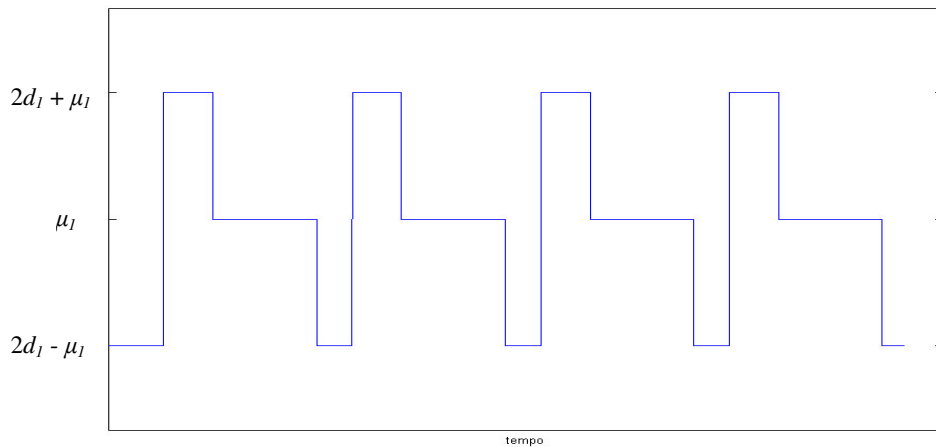


Figura 5.2. Andamento classico dell'uscita del master relè in funzione del segnale d'ingresso

In figura si mostra il classico andamento dell'uscita del master relè. L'uscita è periodica e le ampiezze raggiunte dai vari gradini sono $2d_1 + \mu_1$, μ_1 , $2d_1 - \mu_1$. Con l'introduzione del master relè si introducono le componenti frequenziali a $0.5\omega_c$ e $1.5\omega_c$, riuscendo a stimolare il processo con due diverse eccitazioni di periodo rispettivamente T_c e $2T_c$.

Il bias μ_1 viene introdotto per evitare improvvisi switchings nel segnale dovuti a disturbi.

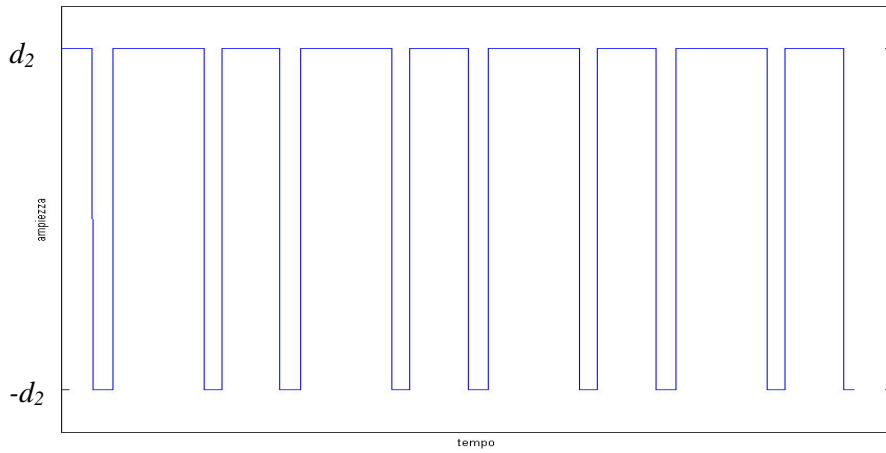


Figura 5.3. Uscita dello slave relè

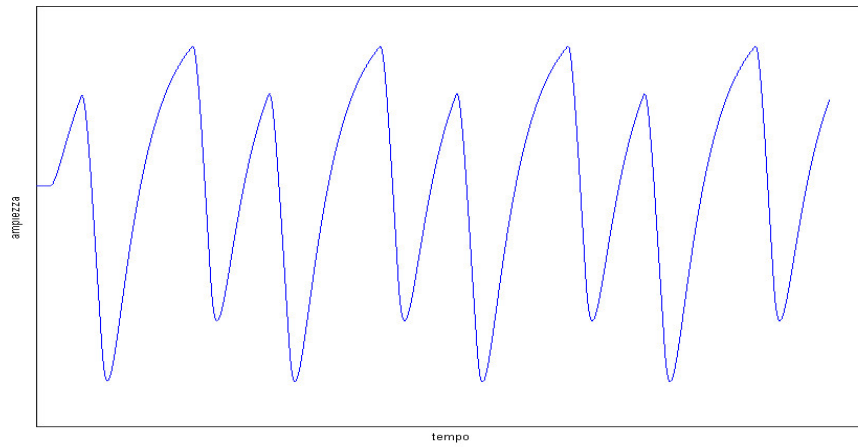


Figura 5.4. Uscita del processo di Hammerstein

La versione originale del feedback di cascade relè è stata proposta per sistemi del primo ordine più ritardo, esprimibili come

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-Delay \cdot s} \tag{5.1.2}$$

Se il processo lineare può essere espresso come in (5.1.2), è possibile ricavare la regola di taratura del master relè, ottenendo:

$$\begin{cases} d_2 \cdot k > 0 \\ \mu_1 < \min\{d_2 \cdot k, d_2 \cdot k \cdot (e^{Delay/\tau} - 1)\} \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Grazie alle due eccitazioni in ingresso, il segnale d'uscita $y(t)$ ha componenti frequenziali a $2\pi/T_c$ e π/T_c e alle armoniche dispari $6\pi/T_c, 10\pi/T_c, \dots$, e $3\pi/T_c, 5\pi/T_c, \dots$, rispettivamente.

Per un processo lineare la risposta in frequenza di $G(s)$ può essere ottenuta grazie all'analisi di Fourier come:

$$G(j\omega_i) = \frac{\int_0^{2T_c} y_s e^{-j\omega_i t} dt}{\int_0^{2T_c} u_s e^{-j\omega_i t} dt} \quad \text{per } i = 1, 2, \dots \quad (5.1.4)$$

dove

$$\omega_i = \frac{(2i-1)2\pi}{2^l T_c} \quad l = 0, 1 \quad (5.1.5)$$

sono le frequenze fondamentali e le frequenze delle armoniche dispari in u_s e y_s e dove u_s e y_s sono rispettivamente le forme delle oscillazioni stazionarie $u(k)$ e $y(k)$.

La (5.1.4) può essere calcolata in maniera semplice utilizzando l'algoritmo FFT nel seguente modo:

$$G(j\omega_i) = \frac{FFT(y_s)}{FFT(u_s)} \quad (5.1.5)$$

5.2 Estensione del cascade relè a sistemi di tipo Hammerstein

Nella versione originale della tecnica del cascade relè il sistema di cui calcolare la risposta in frequenza è ovviamente lineare. Si ricordi infatti che la risposta in frequenza non è definita per sistemi non lineari. Una interessante estensione a sistemi non lineari è presentata in [10].

La trattazione di sistemi non lineari è particolarmente importante perchè molti sistemi reali presentano nonlinearità intrinseche che renderebbero il sistema stesso difficile da identificare. Inoltre, in [9] si calcola solo la risposta in frequenza (ottenuta per punti) del sistema, senza ottenere nessuna informazione per quanto riguarda il modello matematico del sistema (espresso mediante la funzione di trasferimento).

L'estensione ai sistemi di Hammerstein della tecnica del cascade relè permette di identificare con ottima precisione sia la non linearità presente nel sistema, sia i coefficienti del denominatore della funzione di trasferimento del processo lineare, sia il ritardo introdotto dal sistema. Il processo lineare all'interno di quello di Hammerstein (composto da una parte non lineare seguita da una parte lineare) viene qui assunto essere di ordine 2 (il polinomio della funzione di trasferimento sarà quindi del tipo $as^2 + bs + 1$), con facile estensione a sistemi di ordine qualsiasi. La scelta di utilizzare sistemi di ordine due (ovviamente riconducibili a sistemi del primo ordine se al denominatore si ha $a = 0$) è dettata dal fatto che la maggior parte dei sistemi reali sono generalmente ben approssimabili con sistemi di tale ordine (per approfondimenti sulla riduzione dell'ordine di un sistema, vedere [11]).

Due sono le versioni proposte: nella prima versione il ritardo viene calcolato come il primo istante di tempo durante il quale l'uscita assume valore non nullo; nella seconda versione il ritardo è calcolato insieme agli altri parametri non noti come soluzione di un sistema non lineare. La distinzione viene effettuata perchè nel caso di presenza di rumore sull'uscita, il calcolo del ritardo con la prima versione non sarebbe più corretto (il rumore dà comunque un'uscita diversa da zero).

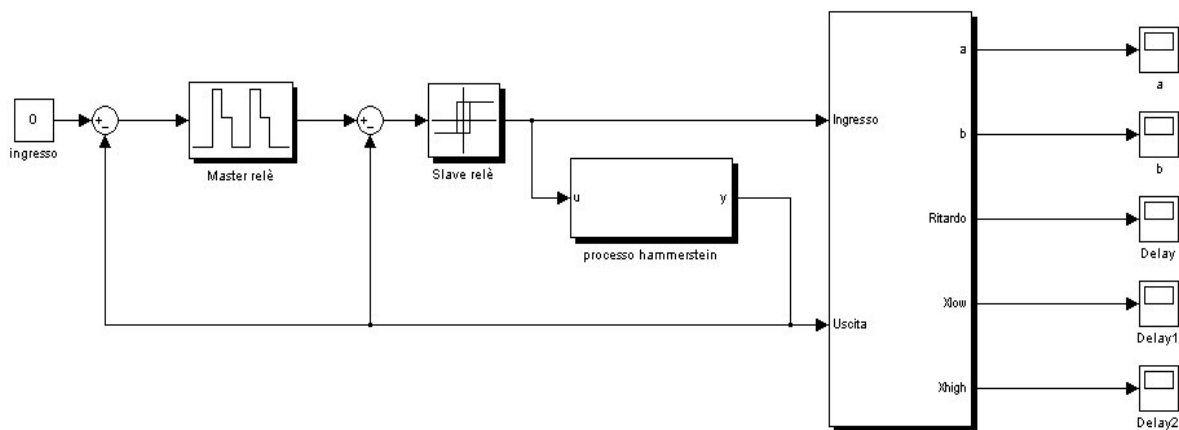


Figura 5.5. Schema della versione estesa

Un modello di sistema non lineare di tipo Hammerstein può schematizzarsi come la serie di un sistema non lineare e di un sistema lineare, come in figura:

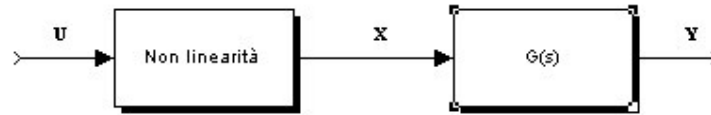


Figura 5.6. Modello di tipo Hammerstein

Esempi di modelli di tipo Hammerstein sono quindi i seguenti:

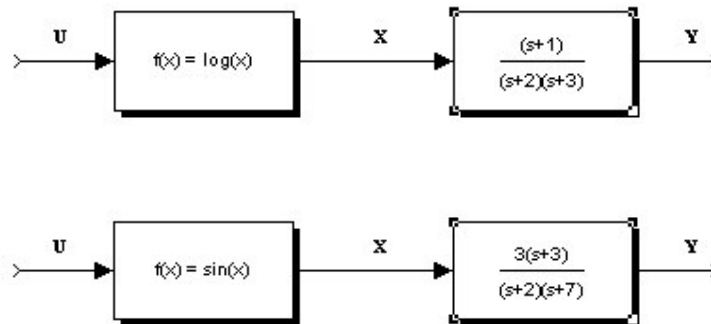


Figura 5.7. Esempi di modelli di tipo Hammerstein

in cui per ciascun modello il primo blocco rappresenta la non linearità, mentre il secondo è il processo lineare.

Nel seguito supporremo che per la parte lineare con risposta in frequenza del secondo ordine più ritardo, il guadagno statico sia unitario:

$$G(s) = \frac{e^{-\text{Delay} \cdot s}}{as^2 + bs + 1} \quad (5.2.1)$$

Il guadagno complessivo del processo risulta incluso, pertanto, nella parte non lineare.

Nel caso particolare in cui il blocco *Non linearità* sia sostituito da una costante, il sistema complessivo diventa lineare.

Nel caso generale, invece, non si può parlare di risposta in frequenza per il sistema di Hammerstein, ma si può ancora adottare la trasformata di Fourier applicata ai segnali.

Se $x(t)$ è il segnale in ingresso alla parte lineare del processo, è possibile scriverne la trasformata di Fourier come:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_k e^{2\pi kt / T_0} \quad (5.2.2)$$

dove X_0 , valor medio di $x(t)$, ed in generale i coefficienti X_k , possono scriversi come:

$$X_k = \begin{cases} (x_{high} + |x_{low}|) \cdot (D_1 + D_2) + x_{low} = \Delta x \cdot (D_1 + D_2) + x_{low} \\ \Delta x \cdot [D_1 \text{sinc}(kD_1) e^{-j\pi k D_1} + D_2 \text{sinc}(kD_2) e^{-j2\pi k(D_3 + 0.5D_2)}] = \Delta x \cdot C_k \end{cases} \quad (5.2.3)$$

dove si è posto:

$$C_k = D_1 \text{sinc}(kD_1) e^{-j\pi k D_1} + D_2 \text{sinc}(kD_2) e^{-j2\pi k(D_3 + 0.5D_2)} \quad (5.2.4)$$

In queste espressioni, D_1 , D_2 , D_3 , sono parametri ricavabili analiticamente dallo studio del segnale d'uscita dello slave relay $u_2(t)$. In particolare, D_1 e D_2 sono i dutycycles del primo e del secondo fronte d'onda del segnale, mentre D_3 è il ritardo tra i due fronti d'onda, normalizzato. Inoltre x_{low} e x_{high} sono i due valori che $x(t)$ assume e che costituiscono due valori assunti dalla funzione che esprime la non linearità.

Analogamente, è possibile scrivere la trasformata di Fourier dell'uscita $y(t)$ come:

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} Y_k e^{2\pi kt / T_0} \quad (5.2.5)$$

dove i coefficienti Y_k possono scriversi come:

$$Y_k = R_k + jI_k \quad (5.2.6)$$

in cui:

$$\begin{cases} R_k = \frac{1}{2T_c} \int_{2T_c} y(t) \cdot \cos(\pi kt / T_c) \cdot dt \\ I_k = \frac{1}{2T_c} \int_{2T_c} y(t) \cdot \sin(\pi kt / T_c) \cdot dt \end{cases} \quad (5.2.7)$$

ovvero:

$$Y_k = G(j\omega_k) \cdot X_k = G(j\omega_k) \cdot \Delta x \cdot C_k = G\left(j \frac{\omega_c}{2} k\right) \cdot \Delta x \cdot C_k \quad (5.2.8)$$

dove:

$$G(j\omega_k) = \frac{e^{-jDelay \cdot \omega_k}}{1 - a \cdot \omega_k^2 + j \cdot b \cdot \omega_k} \quad (5.2.9)$$

5.2.1 Versione 1

In questa prima versione il ritardo *Delay* introdotto dal sistema di Hammerstein viene calcolato direttamente misurando dopo quanto tempo, a partire dall'inizio della simulazione, l'uscita diventa non nulla.

Così concepita, questa versione ha purtroppo solo interesse di carattere teorico. Un qualunque segnale in uscita da un sistema reale è infatti corrotto, seppure in minima parte, da disturbi. Una soluzione parziale a questo inconveniente può essere ottenuta stimando il massimo valore assunto dal rumore, valore che chiamiamo *maxNoise*. Finché il segnale non supera in valore assoluto *maxNoise*, il segnale stesso verrà portato a zero (in pratica, finché non si supera *maxNoise*, il segnale viene considerato solo rumore e quindi annullato). Supponiamo che questo valore sia piccolo, e supponiamo che inizialmente il segnale evolva in maniera molto ripida. Se questo accade, in un arco di tempo molto piccolo il segnale verrà riconosciuto come valido, e la stima risulterà comunque abbastanza buona. (quanto piccolo deve essere questo intervallo temporale lo si deve derivare in base al ritardo stesso del sistema). Simulando tutto questo all'interno del codice di elaborazione del segnale si riesce così ad eliminare il rumore.

Gli inconvenienti dovuti all'utilizzo pratico di questa tecnica sono essenzialmente due:

- si cancella comunque anche quella parte di segnale iniziale che assume valore minore od uguale a *maxNoise*
- per essere abbastanza sicuri di inserire la massima ampiezza raggiunta dal segnale quando è composto da solo rumore, è opportuno sovrastimare tale valore: questo conduce però a sovrastimare il ritardo

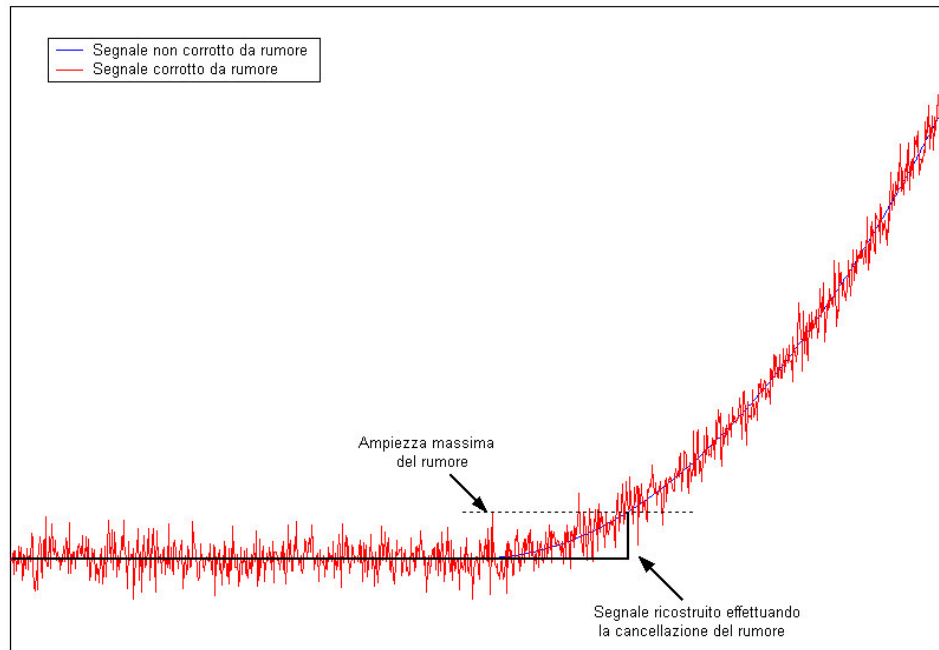


Figura 5.8. Eliminazione del rumore con soglia utilizzata nella prima versione (sovrastima del ritardo = +20%)

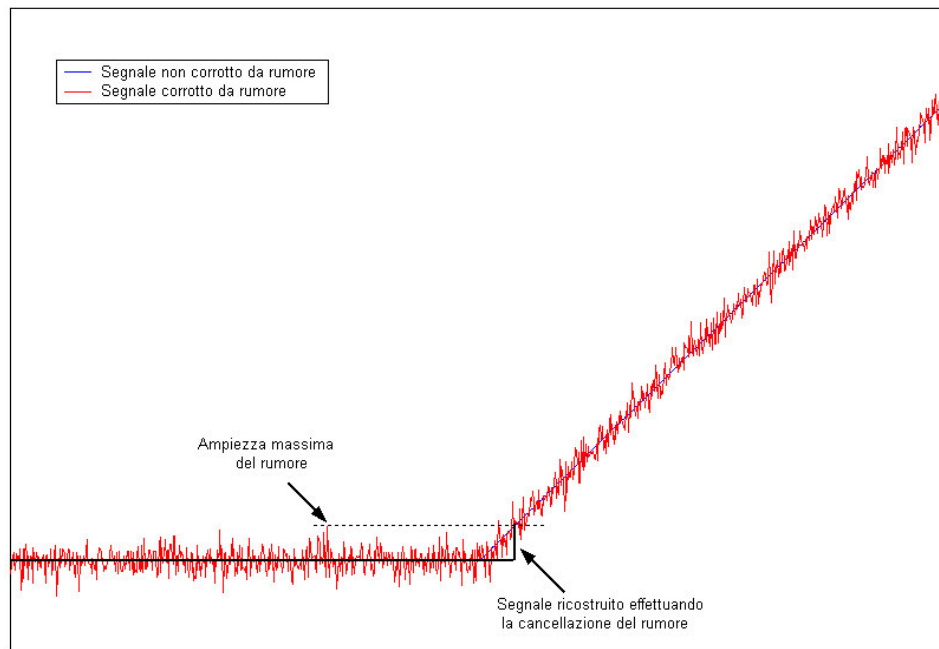


Figura 5.9. Eliminazione del rumore con soglia utilizzata nella prima versione (sovrastima del ritardo = +10%)

Nelle figure il ritardo è lo stesso (calcolabile come l'istante temporale in cui il segnale non corrotto da rumore diventa diverso da zero), come lo stesso è anche il rapporto segnale rumore utilizzato. Nel primo grafico il segnale ha pendenze iniziali minori rispetto al secondo grafico. La cancellazione del rumore porta tutto ciò a far sì che l'ulteriore ritardo aggiunto al segnale sia maggiore nel primo caso (nel primo caso la stima del ritardo aumenterà di circa il 20%, nel secondo caso l'aumento è di circa il 10%).

Riprendendo la (5.2.9), chiamiamo P_k i coefficienti ottenuti secondo la formula:

$$P_k = \frac{Yk}{Ck} \cdot e^{j\text{Delay} \cdot \omega_k} = \frac{\Delta x}{1 - a \cdot \omega_k^2 + j \cdot b \omega_k} \quad (5.2.10)$$

Per $k = 1, 2, 3$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} P_1 \omega_1^2 & -j \cdot P_1 \omega_1 & 1 \\ P_2 \omega_2^2 & -j \cdot P_2 \omega_2 & 1 \\ P_3 \omega_3^2 & -j \cdot P_3 \omega_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \quad (5.2.11)$$

Il sistema è lineare, quindi risolvibile in maniera semplice: l'inconveniente sta nel fatto che questo approccio non può essere utilizzato quando l'uscita del processo di Hammerstein viene corrotta da rumore, dato che l'uscita sarebbe non nulla anche al tempo 0. Il metodo di cancellazione del rumore proposto può portare vantaggio, ma la tecnica utilizzata non avrebbe carattere generale.

5.2.2 Versione 2

L'unica cosa che cambia rispetto alla prima versione sta nel modo in cui è calcolato il ritardo del sistema. In questa seconda versione il ritardo verrà calcolato insieme agli altri parametri di interesse risolvendo un sistema non lineare. Si vedrà come tale sistema sia di "difficile soluzione", ma come, mediante un accorgimento, potrà essere riportato alla soluzione di un sistema lineare.

Si sceglie di avere una stima del ritardo *Delay* inserendolo come ulteriore incognita. In questo caso:

$$\frac{Y_k}{Ck} = \frac{\Delta x \cdot e^{-j \text{Delay} \cdot \omega_k}}{1 - a \cdot \omega_k^2 + j \cdot b \omega_k} = P_k \quad (5.2.12)$$

Per $k = 1, 2, 3$ si ha il seguente sistema non lineare, con equazioni complesse:

$$\begin{cases} P_1 \cdot \omega_1^2 \cdot a - j \cdot P_1 \cdot \omega_1 \cdot b + \Delta x \cdot e^{-j \cdot \text{Delay} \cdot \omega_1} - P_1 = 0 \\ P_2 \cdot \omega_2^2 \cdot a - j \cdot P_2 \cdot \omega_2 \cdot b + \Delta x \cdot e^{-j \cdot \text{Delay} \cdot \omega_2} - P_2 = 0 \\ P_3 \cdot \omega_3^2 \cdot a - j \cdot P_3 \cdot \omega_3 \cdot b + \Delta x \cdot e^{-j \cdot \text{Delay} \cdot \omega_3} - P_3 = 0 \end{cases} \quad (5.2.13)$$

Scomponendo le 3 equazioni in parte reale e immaginaria si arriva al sistema nella forma finale con 6 equazioni e 4 incognite ($a, b, \Delta x, \text{Delay}$):

$$\begin{cases} P_1 \cdot \omega_1^2 \cdot a + \Delta x \cdot \cos(\text{Delay} \cdot \omega_1) - P_1 = 0 \\ P_1 \cdot \omega_1 \cdot b + \Delta x \cdot \sin(\text{Delay} \cdot \omega_1) = 0 \\ P_2 \cdot \omega_2^2 \cdot a + \Delta x \cdot \cos(\text{Delay} \cdot \omega_2) - P_2 = 0 \\ P_2 \cdot \omega_2 \cdot b + \Delta x \cdot \sin(\text{Delay} \cdot \omega_2) = 0 \\ P_3 \cdot \omega_3^2 \cdot a + \Delta x \cdot \cos(\text{Delay} \cdot \omega_3) - P_3 = 0 \\ P_3 \cdot \omega_3 \cdot b + \Delta x \cdot \sin(\text{Delay} \cdot \omega_3) = 0 \end{cases} \quad (5.2.14)$$

In entrambi i casi, la matrice in (5.2.11) o il sistema in (5.2.14) sono complessi mentre $a, b, \Delta x, \text{Delay}$, sono numeri reali; della soluzione si considera perciò solamente la parte reale.

Infine, a partire da Δx si ricavano i due valori della non linearità x_{low} e x_{high} , attraverso l'espressione di X_0 nella (5.2.3), dopo aver assunto che $X_0 = Y_0$, dal momento che $G(j\omega)$ ha guadagno unitario.

5.3 Esempi

Si riportano di seguito alcune simulazioni che evidenziano gli ottimi risultati in assenza di rumore; in presenza di rumore si nota come la stima dei parametri si degradi fino a non essere più consistente con i valori reali.

Nelle simulazioni sotto riportate si utilizzerà la seconda versione: in presenza di rumore lo schema proposto con la prima non ha carattere generale, mentre in assenza di rumore i risultati ottenuti con le due versioni sono identici.

La non linearità del processo di Hammerstein è la stessa per tutte le simulazioni effettuate nel seguito:

$$f(u) = 2(1 - e^{0.0693u}) \quad (5.2.15)$$

Per ogni simulazione si identificano due punti della $f(u)$; variando opportunamente d_1 , d_2 , μ_1 , la funzione viene ricostruita per punti.

5.3.1 Esempio

Consideriamo la seguente funzione di trasferimento facente parte del processo di Hammerstein (la non linearità è quella appena descritta):

$$G(s) = \frac{1}{5s^2 + 6s + 1} e^{-1.s}$$

Vogliamo quindi determinare i parametri a e b della funzione di trasferimento, il ritardo e la caratteristica non lineare.

In questo caso il rumore imposto sull'uscita del processo di Hammerstein è nullo (caso ideale); la simulazione viene fermata al tempo $t = 500$ secondi.

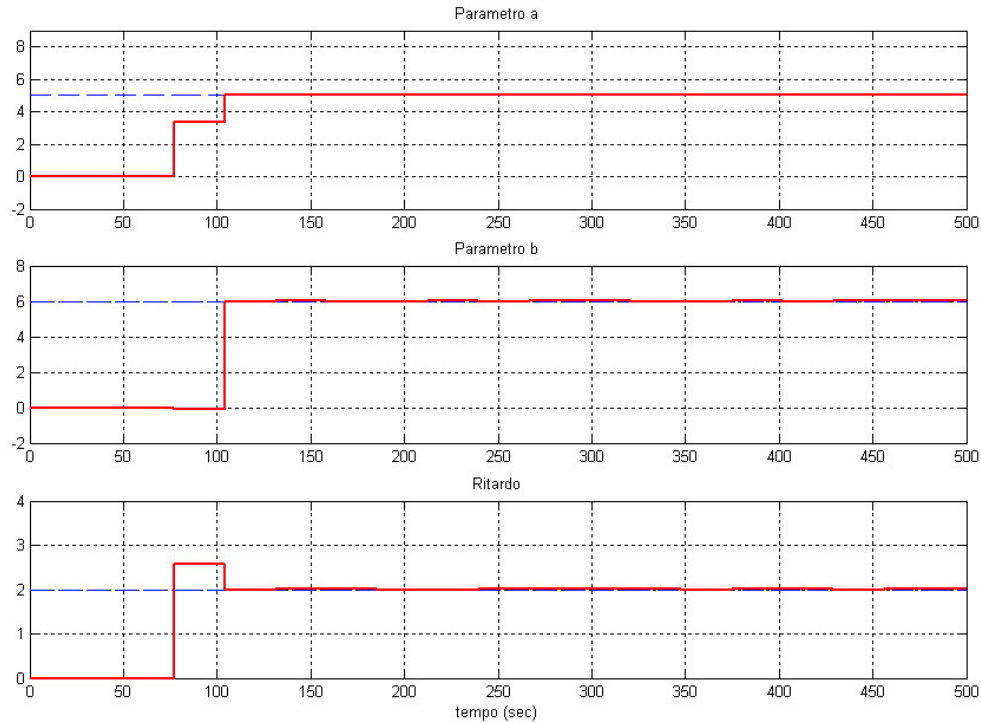


Figura 5.10. Stima dei parametri

I risultati ottenuti sono evidenziati in tabella.

	a	b	ritardo
Parametri reali	5	6	1
Parametri stimati	5.00000024	6.00000065	1.000000026

Per ottenere la curva che rappresenta la non linearità sono necessari un numero di simulazioni proporzionale al numero di punti desiderati nel grafico (per ogni simulazione si identificano 2 punti). In pratica, per ogni simulazione si ripetono i seguenti passi:

1. si inseriscono nuovi valori per i parametri caratteristici dei due relè
2. si verifica che con tali valori il sistema complessivo oscilli con due frequenze fondamentali; in caso contrario si ritorna al punto 1
3. si ferma la simulazione quando i risultati sono ormai stabili, si acquisiscono le coordinate dei due punti immettendole in un vettore

4. se i punti ottenuti sono sufficienti si termina plottando il grafico, altrimenti si ritorna al punto 1

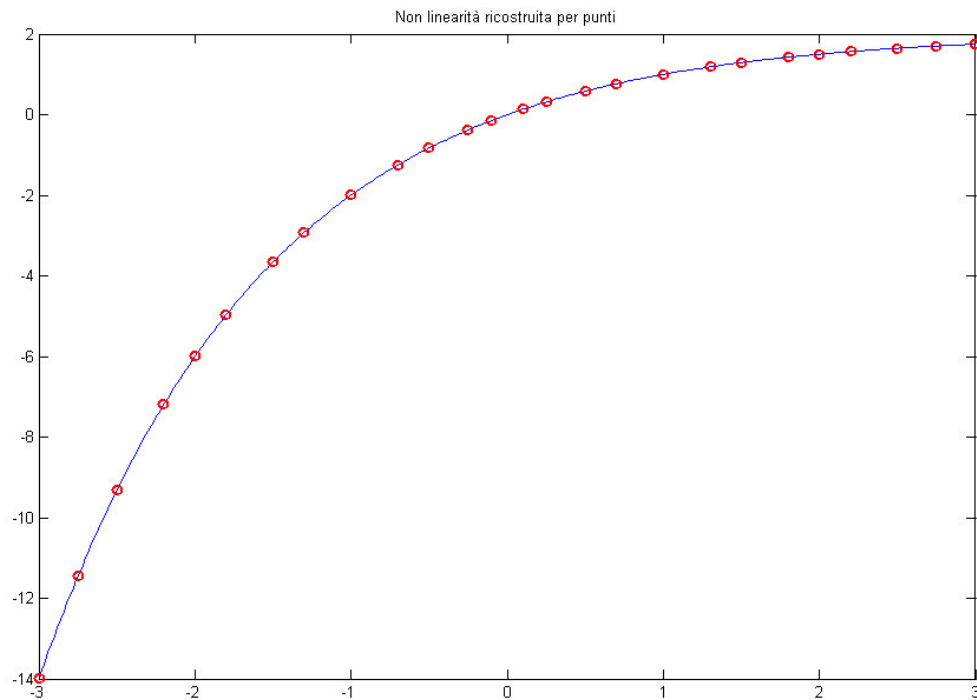


Figura 5.11. Non linearità ricostruita per punti attraverso più simulazioni

Vediamo cosa accade se si prova a sommare del rumore al segnale.

Il rumore viene generato in Simulink mediante il blocco *Band Limited White Noise*, inserendo come parametri la potenza ed il periodo di campionamento del rumore.

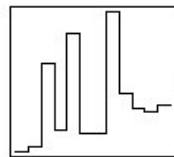


Figura 5.12. Il blocco *Band Limited White Noise*

Inserendo nella maschera del blocco i valori:

- potenza: 0.001
- periodo di campionamento: 1 secondo

i parametri oscillano attorno ai valori reali.

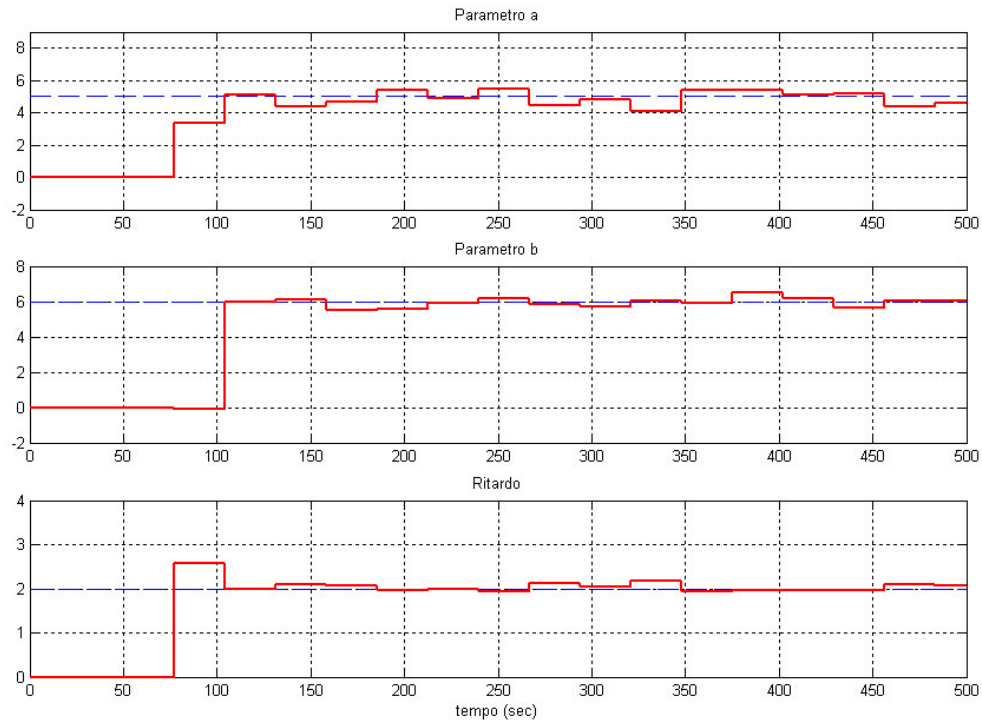


Figura 5.13. Stima dei parametri in presenza di rumore sull'uscita ($a=5$, $b=6$, ritardo=2)

Per evidenziare l'andamento dell'uscita e l'influenza del rumore si mostrano in figura sia l'uscita senza essere corrotta da rumore, sia l'uscita da processare corrotta da rumore.

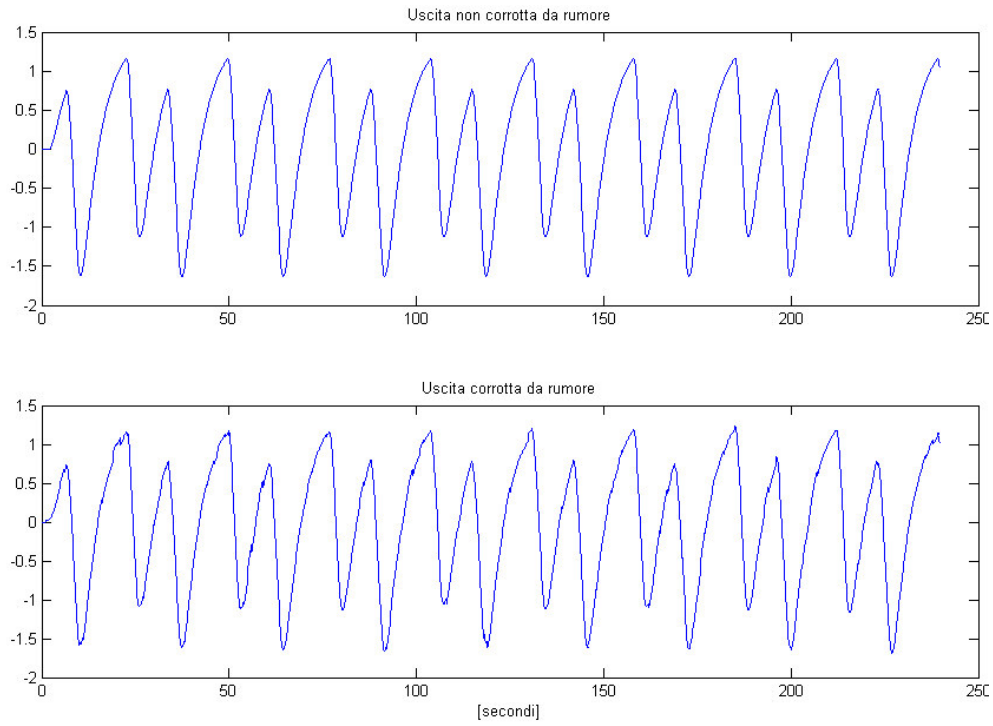


Figura 5.14. Uscita del sistema con e senza l'aggiunta di rumore

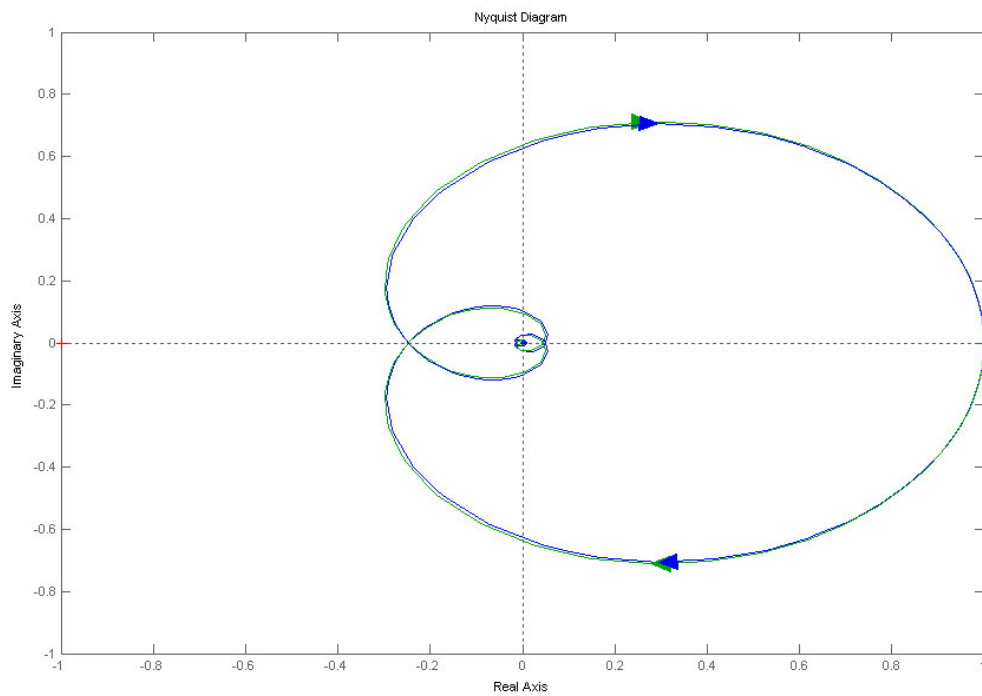


Figura 5.15. Diagrammi di Nyquist del sistema reale (in blu) e di quello stimato (in verde)

Si riportano inoltre in figura i diagrammi di Nyquist del sistema reale (in blu) e di quello stimato (in verde).

Aumentando il periodo di campionamento del rumore, portandolo da 1 a 0.1 secondi, cioè

- potenza: 0.001
- periodo di campionamento: 0.1 secondi

i grafici sono i seguenti:

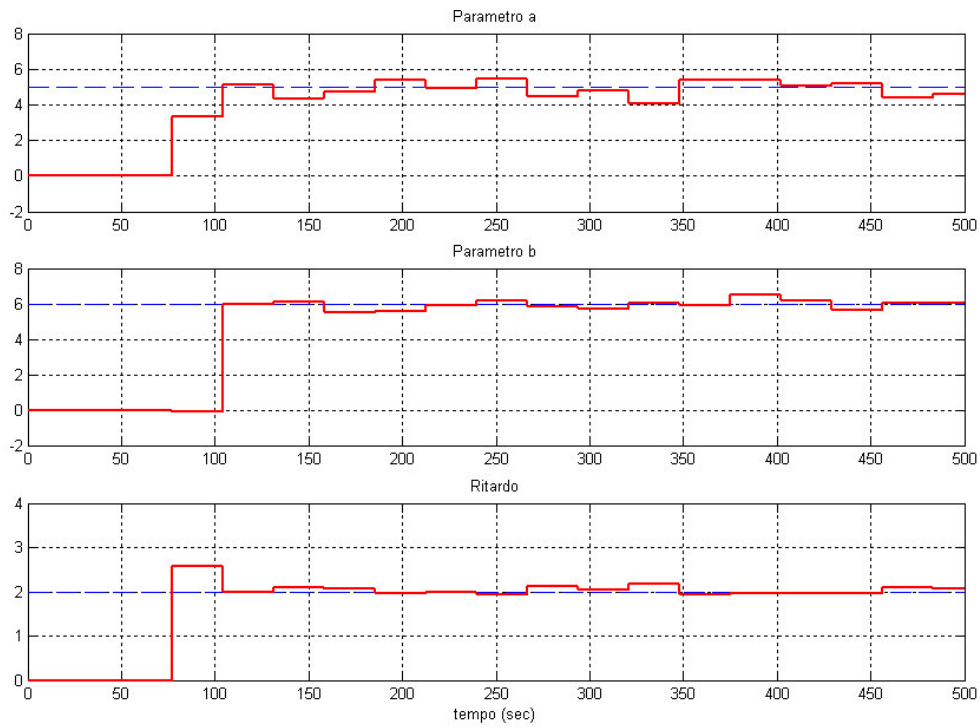


Figura 5.16. Stima dei parametri in presenza di rumore sull'uscita ($a=5$, $b=6$, ritardo=2)

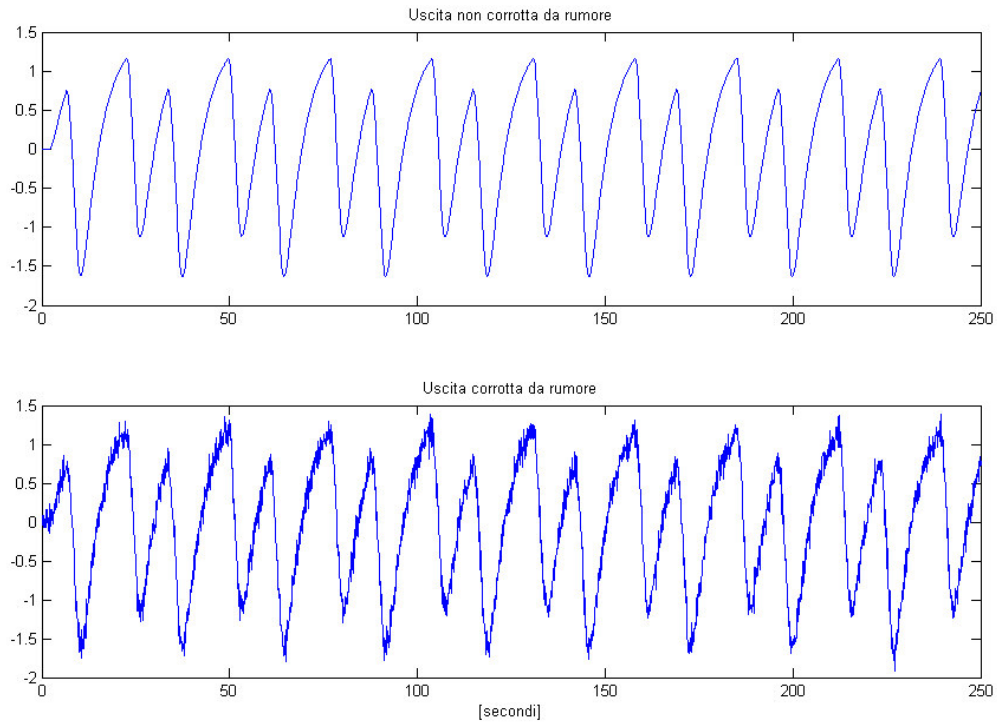


Figura 5.17. Uscita del sistema con e senza l'aggiunta di rumore

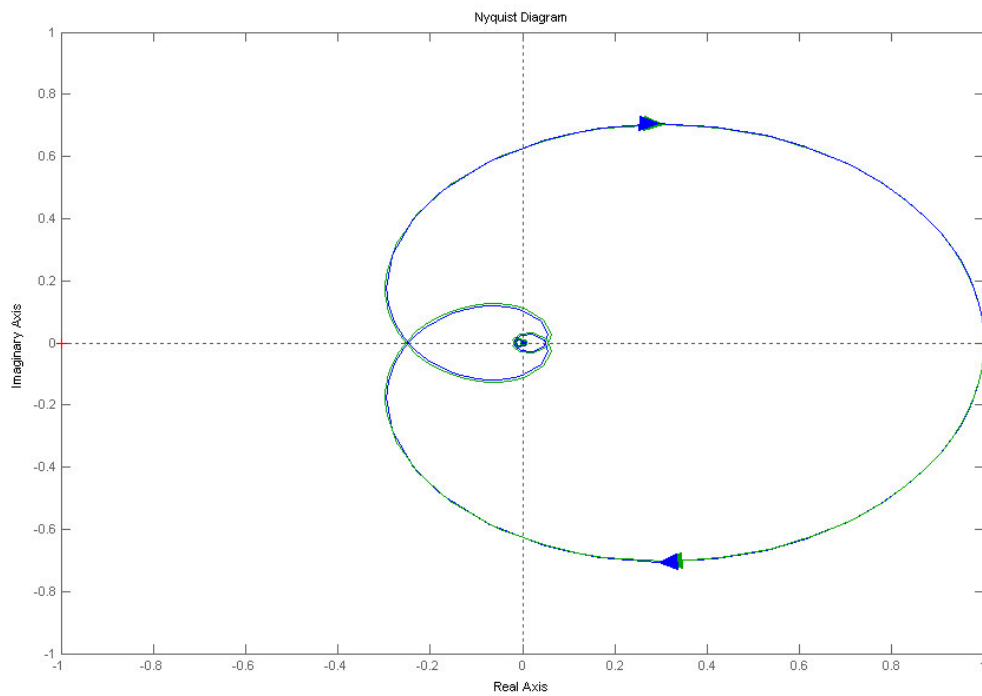


Figura 5.18. Diagrammi di Nyquist del sistema reale (in blu) e di quello stimato (in verde)

Proviamo ora ad aumentare la potenza del rumore, ripristinando il campionamento ad 1 secondo. I nuovi dati per il rumore sono quindi:

- potenza: 0.01
- periodo di campionamento: 1 secondo

I grafici ottenuti sono i seguenti:

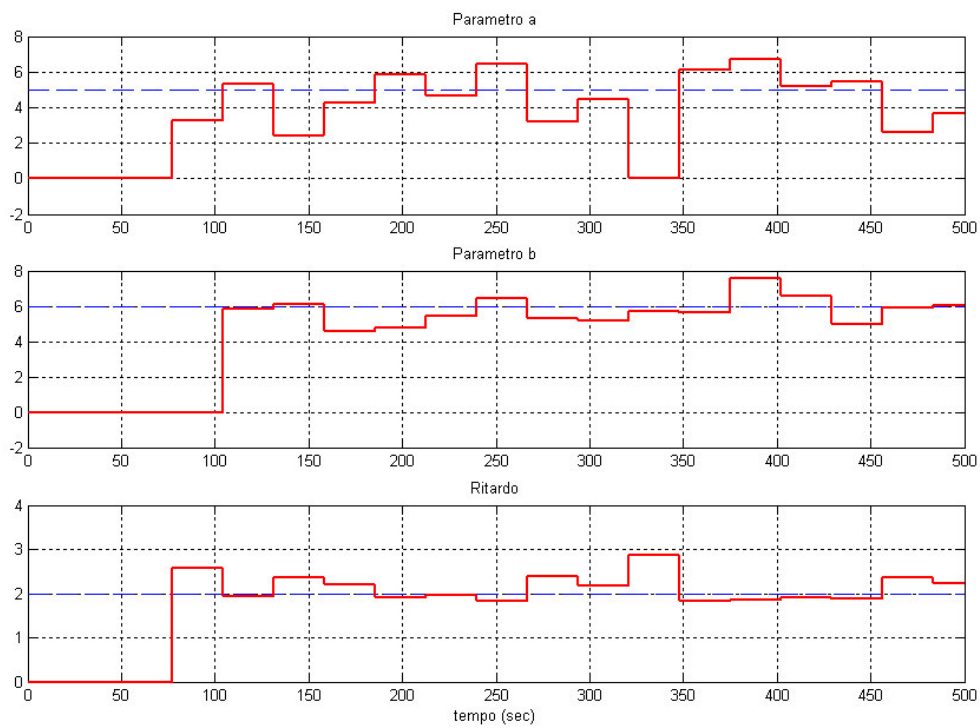


Figura 5.19. Stima dei parametri in presenza di rumore sull'uscita ($a=5$, $b=6$, ritardo=2)

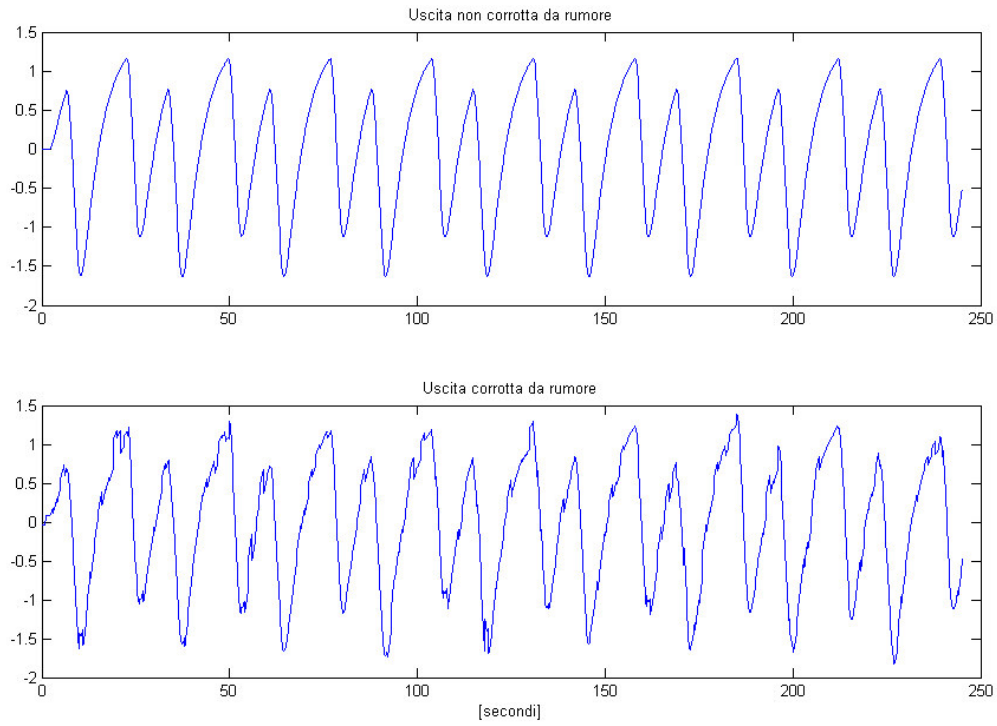


Figura 5.20. Uscita del sistema con e senza l'aggiunta di rumore

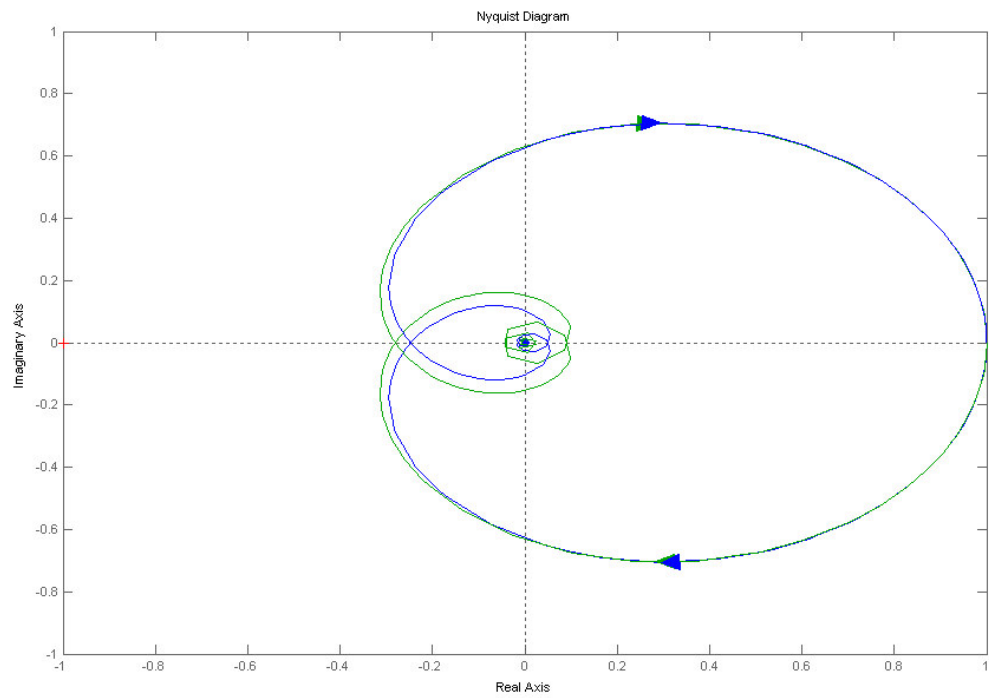


Figura 5.21. Diagrammi di Nyquist del sistema reale (in blu) e di quello stimato (in verde)

Dai grafici risulta abbastanza evidente come le stime peggiorino all'aumentare della potenza di rumore. Confrontiamo questi ultimi grafici riferendoli a quelli ottenuti con potenza di rumore pari a 0.001 e campionamento di un secondo; si osserva:

1. nel grafico di figura 5.19 (parametri a, b, ritardo) i valori stimati variano maggiormente
2. nel grafico di figura 5.21 il diagramma di Nyquist stimato si discosta maggiormente da quello reale

5.3.2 Esempio

Consideriamo ora la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{7s^2 + 3s + 1} e^{-2s}$$

In assenza di rumore sull'uscita, le stime per i parametri del sistema lineare sono evidenziate nei seguenti grafici.

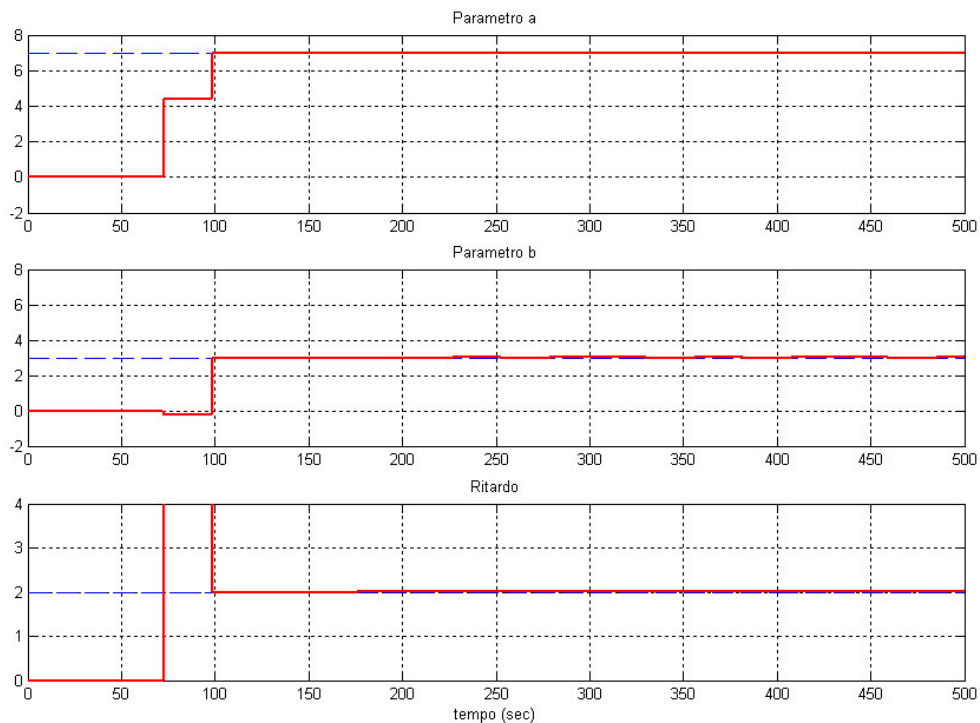


Figura 5.22. Stima dei parametri in presenza di rumore sull'uscita (a=7, b=3, ritardo=2)

Dalla tabella sottostante si evidenziano i notevoli risultati ottenuti.

	a	b	ritardo
Parametri reali	7	3	2
Parametri stimati	7.0000029	3.0000006	1.99999922

Utilizzando invece i seguenti parametri per il rumore:

- potenza: 0.001
- periodo di campionamento: 0.1 secondi

si ottiene:

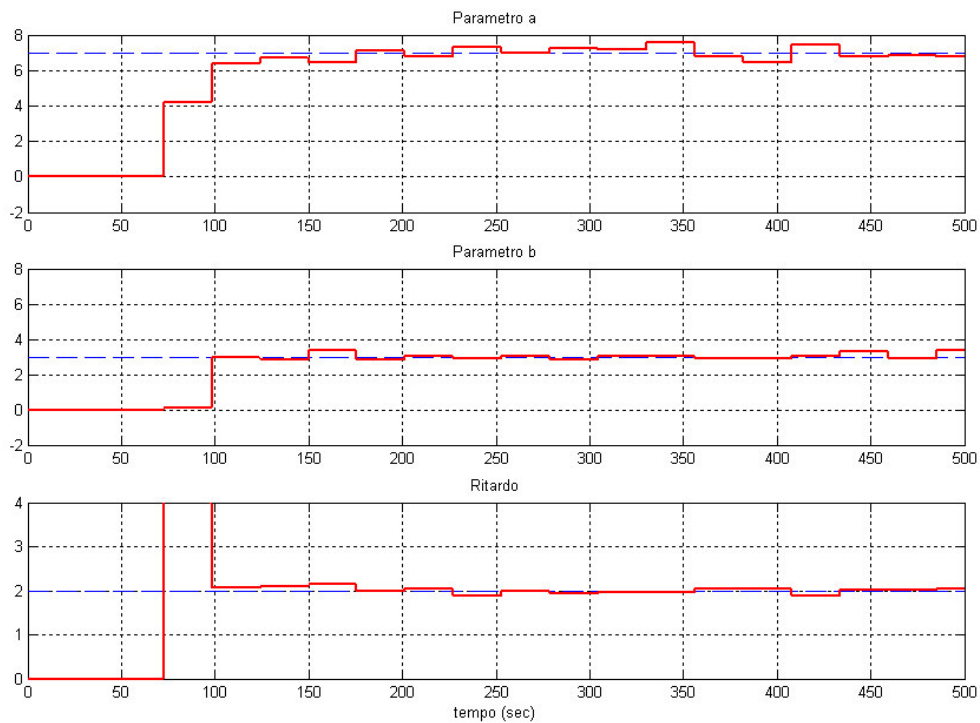


Figura 5.23. Stima dei parametri in presenza di rumore sull'uscita ($a=7$, $b=3$, ritardo=2)

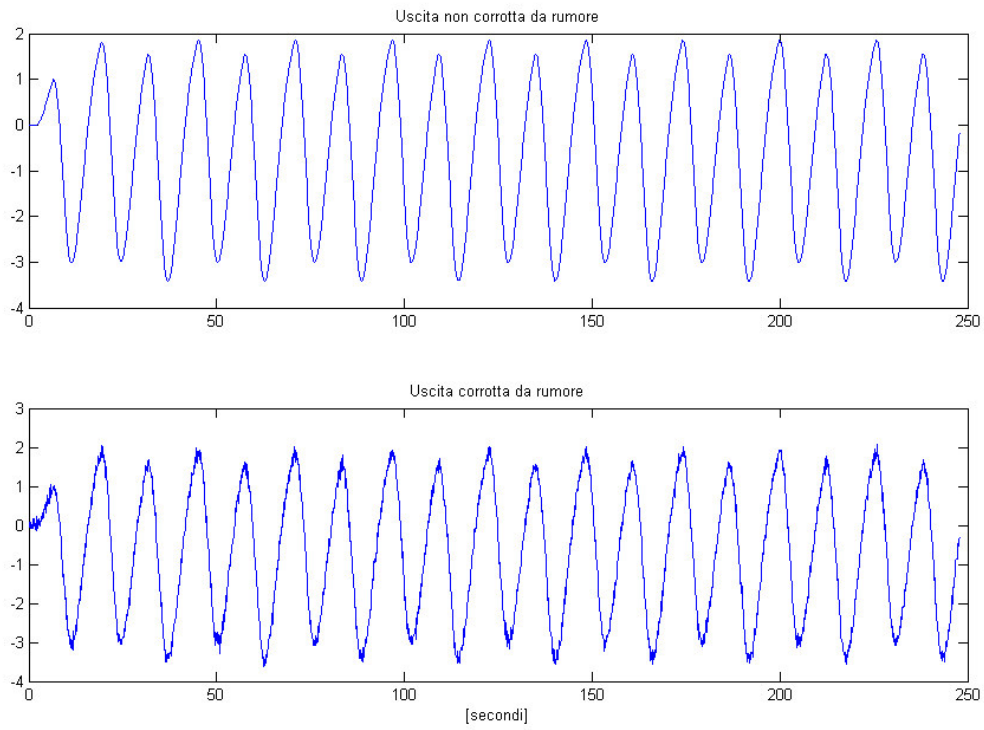


Figura 5.24. Uscita del sistema con e senza l'aggiunta di rumore

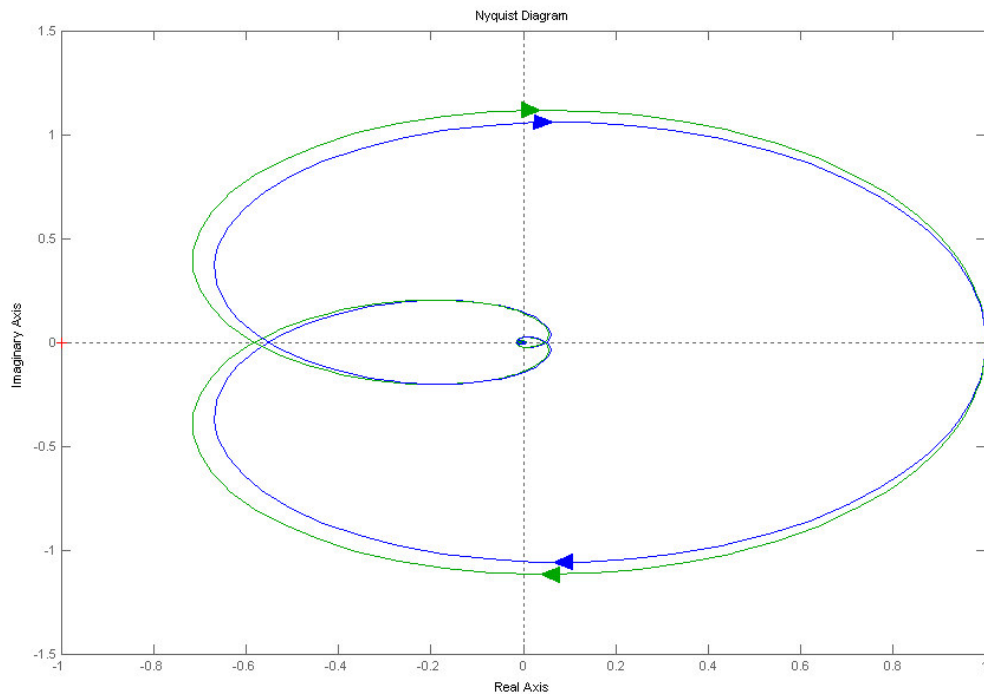


Figura 5.25. Diagrammi di Nyquist del sistema reale (in blu) e di quello stimato (in verde)

Portando il rumore a:

- potenza: 0.01
- periodo di campionamento: 0.1 secondi

i risultati sono i seguenti:

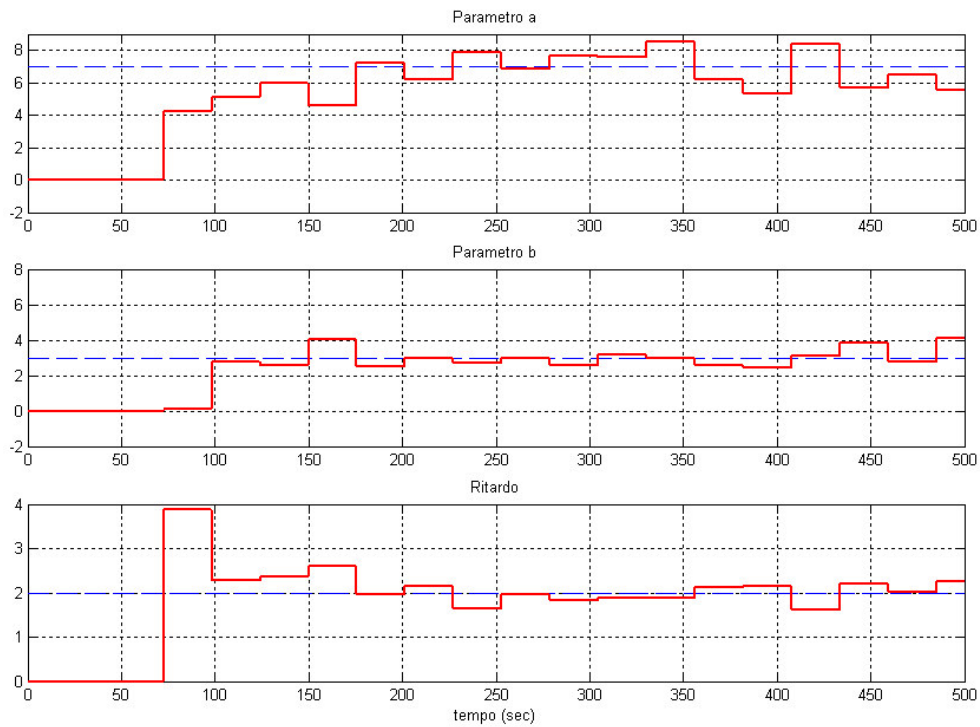


Figura 5.26. Stima dei parametri in presenza di rumore sull'uscita ($a=7$, $b=3$, ritardo=2)

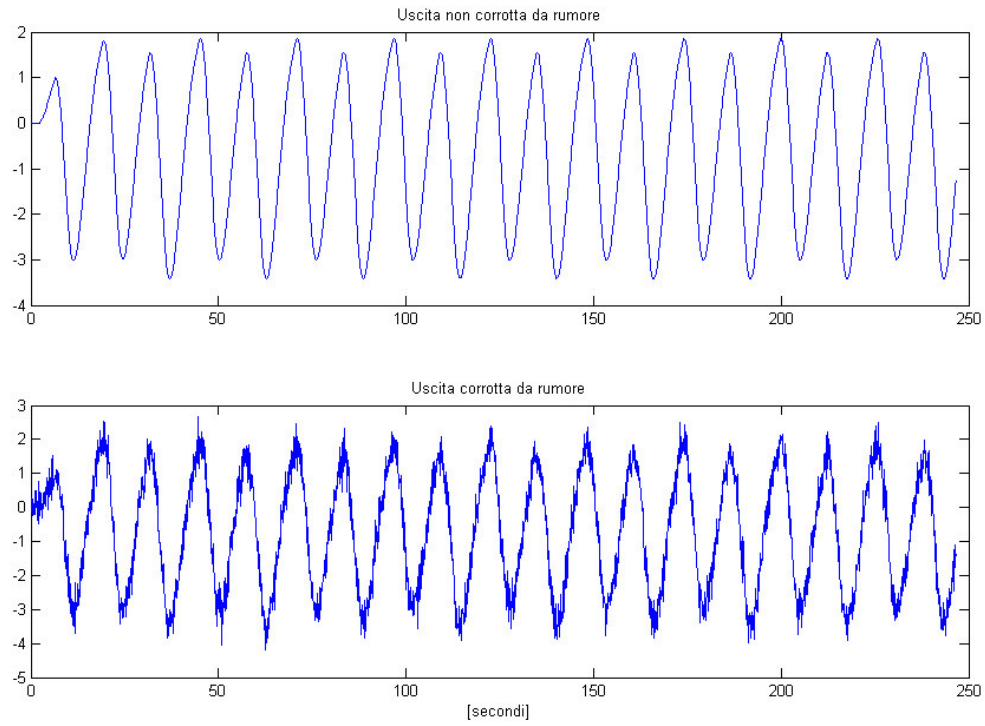


Figura 5.27. Uscita del sistema con e senza l'aggiunta di rumore

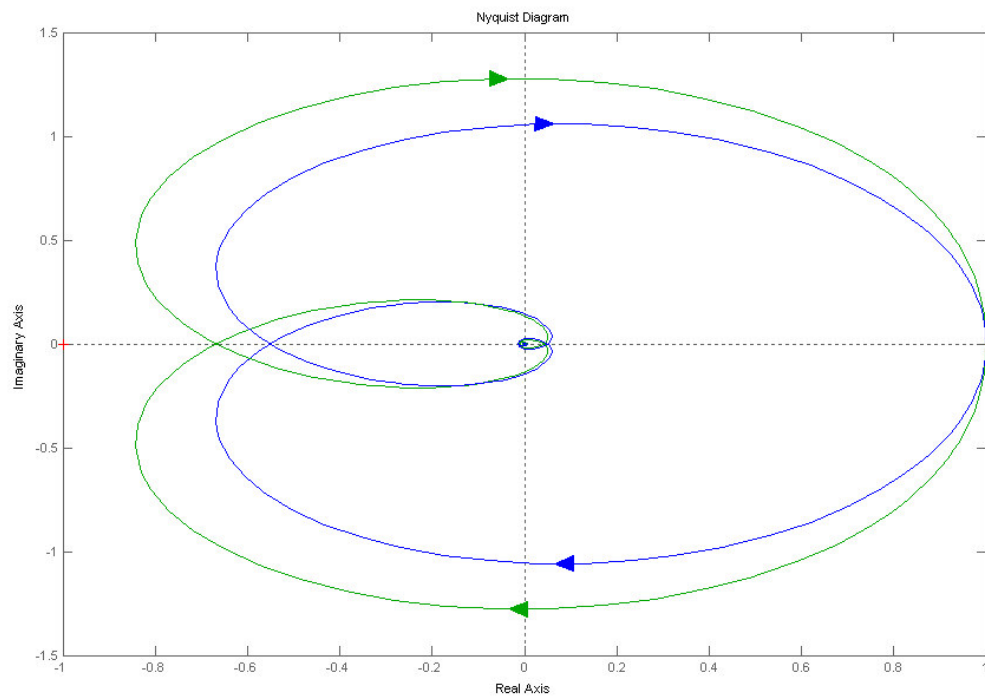


Figura 5.28. Diagrammi di Nyquist del sistema reale (in blu) e di quello stimato (in verde)

Come si nota dalle simulazioni, sommando l'uscita con rumore bianco a valor medio nullo, i valori di a , b e ritardo oscillano, e lo fanno in maniera sempre più evidente quanto più aumentiamo la potenza del rumore. In pratica, aumentando la potenza del rumore in uscita i risultati che si trovano non sono più stabili, e data l'ampiezza dei valori che si riscontrano non c'è più modo di individuare i valori corretti.