CAPITOLO 1: Trasformate di Fourier

Uno degli aspetti più importanti di tutto il settore ingegneristico è sicuramente la trattazione di un segnale nella duplice veste tempo/frequenza. In questo capitolo si analizzeranno preliminarmente le nozioni matematiche di base per l'elaborazione di un segnale, bagaglio indispensabile per poter procedere nel seguito.
Una buona parte di tutte le tecniche sviluppate per elaborare un segnale si basa sulle cosiddette trasformate di Fourier.

1.1 Le serie di Fourier per segnali periodici tempo continuo

Dalla matematica è noto che qualunque segnale formato da somme di esponenziali nella forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t} \tag{1.1.1}$$

è un segnale periodico di periodo $T = 1/F_0$.
D'altra parte, se disponiamo di $x(t)$ periodico con periodo T, possiamo scriverlo come in (1.1.1) sostituendo F_0 con $1/T$. Il segnale $x(t)$ così ottenuto viene detto *serie di Fourier*.
I coefficienti c_k si calcolano facilmente, ottenendo:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j2\pi kF_0 t}\,dt \tag{1.1.2}$$

L'espressione del segnale nel dominio del tempo (1.1.1) viene generalmente chiamata *equazione di sintesi*; la corrispondente espressione nel dominio della frequenza, come in (1.1.2), viene invece generalmente indicata come *equazione di analisi*.
Un'importante considerazione riguarda la convergenza della serie (1.1.1); è lecito infatti chiedersi quando tale serie coincida col segnale per ogni valore di t, cioè quando il segnale $x(t)$ assuma sempre lo stesso valore di

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t} \tag{1.1.3}$$

Il problema è stato risolto da Dirichlet, che ha formulato opportune condizioni.
Le cosiddette *condizioni di Dirichlet* sono:

1. Il segnale x(t) ha in ciascun periodo un numero di discontinuità finito
2. Il segnale contiene un numero finito di massimi e minimi in ciascun periodo
3. Il segnale è assolutamente integrabile su ciascun periodo, cioè:

$$\int_T |x(t)|dt < \infty \tag{1.1.4}$$

Se $x(t)$ è periodico e soddisfa le condizioni di Dirichlet, può essere rappresentato come in (1.1.1), dove i coefficienti sono espressi dalla (1.1.2). Le condizioni di Dirichlet sono sufficienti, ma non necessarie: ciò significa che possono esistere segnali che non verificano tali condizioni ma che possono essere espressi mediante la (1.1.1). Comunque, per tutti i segnali di interesse pratico valgono le condizioni di Dirichlet.
Generalmente i coefficienti risultano essere valori complessi: nel caso di segnali reali vale comunque la relazione che c_k e c_{-k} sono complessi coniugati. Potendo allora scrivere

$$c_k = |c_k|e^{j\theta_k} \tag{1.1.5}$$

è lecito scrivere:

$$c_{-k} = |c_k|e^{-j\theta_k} \tag{1.1.6}$$

ottenendo una diversa forma (ma equivalente alla prima) per il segnale periodico $x(t)$:

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) \tag{1.1.7}$$

1.2 Densità spettrale di potenza per segnali periodici

Per un segnale si definisce la quantità energia come:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x^2(t)|dt \tag{1.2.1}$$

In accordo a tale definizione, qualunque segnale periodico ha energia infinita.

Si definisce inoltre la quantità potenza media come:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|x^2(t)\right| dt \tag{1.2.2}$$

Nel caso di un segnale periodico, la (1.2.2) viene riscritta come:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|x^2(t)\right| dt \tag{1.2.3}$$

dove T è ancora il periodo del segnale.

Vale inoltre la cosiddetta *relazione di Parseval*:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|x^2(t)\right| dt = \sum_{-\infty}^{\infty} \left|c_k\right|^2 \tag{1.2.4}$$

1.3 La trasformata di Fourier per segnali periodici tempo discreto

Supponiamo di avere una sequenza periodica di periodo N, ossia $x(n) = x(n+N)$ per ogni n.

La rappresentazione in serie di Fourier per $x(n)$ è

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \tag{1.3.1}$$

dove i coefficienti c_k sono calcolati come

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \tag{1.3.2}$$

L'espressione (1.3.1) viene conosciuta come *equazione di sintesi*, la (1.3.2) come *equazione di analisi* (ovviamente stavolta nel caso di segnali periodici tempo discreto).

La differenza sostanziale tra un segnale tempo continuo ed uno tempo discreto sta nelle componenti in frequenza: mentre il primo può avere un intervallo illimitato di frequenze, il secondo possiede al massimo *N* componenti frequenziali, con *N* periodo del segnale.

Come per l'analogo tempo continuo, anche per un segnale tempo discreto è possibile definirne la potenza:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2 \tag{1.3.3}$$

E come nel caso continuo, la potenza può essere messa direttamente in relazione con i coefficienti di Fourier:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\left|c_k\right|^2 \tag{1.3.4}$$

1.4 La trasformata di Fourier per segnali aperiodici tempo discreto

Come per il caso dei segnali aperiodici tempo continuo, anche nel caso dei segnali aperiodici tempo discreto l'analisi frequenziale passa dalla trasformata del segnale nel dominio del tempo.
Per un segnale tempo discreto ad energia finita la trasformata di Fourier è definita come

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \tag{1.4.1}$$

Fisicamente $X(\omega)$ rappresenta la decomposizione del segnale di partenza $x(n)$ nelle sue componenti frequenziali. Anche in questo caso l'equazione che definisce la trasformata del segnale temporale viene chiamata *equazione di analisi*.
L'*equazione di sintesi*, derivata dalla (1.4.1), è:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n} \tag{1.4.2}$$

Successivamente vedremo come l'introduzione della trasformata di Fourier per segnali tempo discreto risulti indispensabile per formulare alcuni algoritmi di analisi frequenziale, noti come FFT (Fast Fourier Transform).

1.5 Alcune considerazioni sullo spettro del segnale

Per segnali tempo continuo, un'attenta ispezione della serie di Fourier e della sua trasformata mostra come il segnale nel dominio della frequenza non presenti periodicità: ciò dipende dal fatto che l'esponenziale complesso $e^{j2\pi Ft}$ è funzione della variabile continua t, e quindi non periodica in F. L'intervallo frequenziale del segnale si estende quindi da $F = 0$ ad $F = \infty$.

Per segnali tempo discreto, invece, lo spettro è periodico, con periodo $\omega = 2\pi$. La conseguenza è che l'intervallo frequenziale si estende tra $\omega = -\pi$ a $\omega = \pi$ radianti.
Per segnali periodici, si osserva uno spettro discreto. Come visto sopra, tutti i segnali periodici possono essre scritti mediante serie di Fourier, i cio coefficienti costituiscono lo spettro discreto. La distanza tra ciascuna linea dello spettro è $\Delta F = 1/T$ per segnali tempo continuo, $\Delta f = 1/N$ per segnali tempo discreto.
Per segnali aperiodici ad energia finita lo spettro è invece continuo. La proprietà è diretta conseguenza del fatto che sia $X(F)$ che $X(\omega)$ sono funzioni rispettivamente di $e^{j2\pi Ft}$ e $e^{j\omega n}$, che sono funzioni continue nelle variabili F e ω.
In conclusione, si può affermare che la periodicità con "periodo" α in un dominio automaticamente porta alla discretizzazione con "spaziatura" $1/\alpha$ nell'altro dominio, e viceversa.