

# Capitolo 3

## Reti di Clos riconfigurabili in ambiente multirate

### 3.1 Introduzione

In questo capitolo vediamo una rassegna dei risultati riguardanti le problematiche inerenti la riconfigurabilità delle reti di Clos in ambiente multirate. Analogamente all'ambiente classical switching (CS), nel prossimo paragrafo vedremo come queste problematiche sono modellate in termini di teoria dei grafi.

Ricordiamo che il problema di riconfigurabilità di una rete di Clos  $C(n,m,r)$  consiste nel determinare il minimo numero di switch centrali  $M(n,r)$  affinché la rete sia riconfigurabile. Mentre nel caso CS, è stato determinato che  $M(n,r) = n$ , in ambiente multirate ad oggi si conoscono solo dei limiti superiori.

La difficoltà in più rispetto al caso classical switching, è rappresentata dal problema di dover “sfruttare” al meglio ogni link, in modo da farvi passare quante più richieste possibili.

In [MRChRo91] S.P. Chung e K. W. Ross, ipotizzano che nel caso discreto multirate valga  $M(n,r) \leq 2n-1$ . Questa ipotesi, nella letteratura sull'argomento, ha preso il nome di *congettura Chung e Ross* ed è stata estesa anche al caso continuo [MRLiZh99].

#### *Congettura Chung & Ross*

$$M(n,r) \leq 2n-1 \quad (1)$$

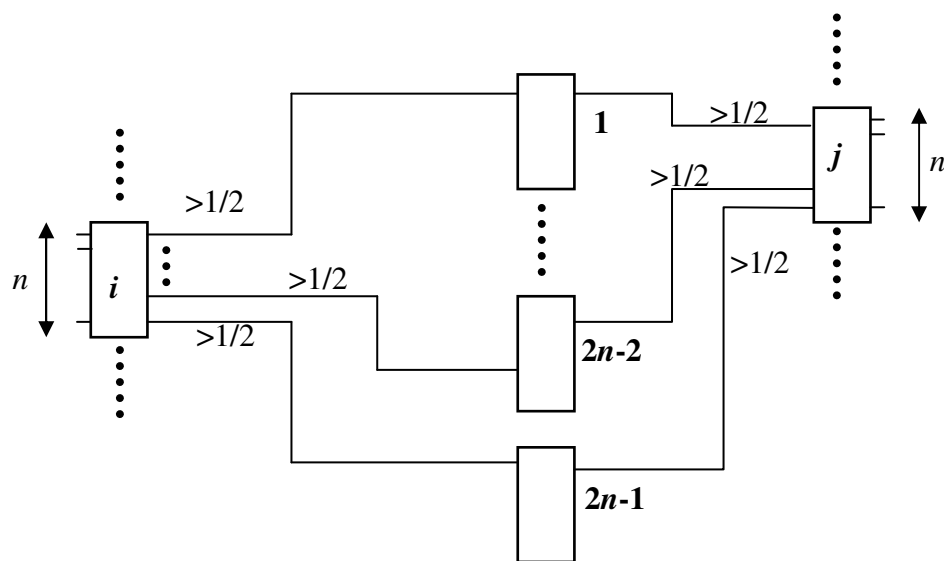
Ad oggi non sappiamo se tale congettura sia vera o meno. In ogni caso, ci sono diversi risultati che, limitando l'intervallo dei valori che il peso delle connessioni può assumere, la confermano.

Proviamo ora a dare una valutazione “qualitativa” dell'upper bound espresso dalla (1).

Osserviamo che la congettura è vera se per ogni frame  $F$ , l'algoritmo di routing determina una configurazione  $R$  che realizza  $F$  e tale che ogni link della rete abbia

“mediamente” un carico strettamente maggiore di  $\frac{1}{2}$ . Consideriamo infatti un generico switch d’ingresso  $i$ . Sappiamo che su  $i$  ci possono essere un insieme di richieste che in totale pesa al più  $n$ . Se è vero che l’algoritmo di routing riesce a “distribuire” le connessioni in modo che sui link che collegano  $i$  al secondo stadio, ci sia un carico  $>1/2$ , allora il numero dei link (e quindi di switch centrali) necessari, sarebbe strettamente minore di  $2n$ , quindi, essendo  $n$  intero, al più varrebbe  $2n-1$ .

Le stesse considerazioni si possono fare per un qualsiasi switch d’uscita  $j$ .



Nel paragrafo 3.4 faremo una rassegna sui risultati conosciuti a riguardo del problema di riconfigurabilità di una  $C(n,m,r)$  evidenziando “quanto” essi confermino o meno la congettura.

Come vedremo, al contrario dell’ambiente CS, gli algoritmi di routing proposti sono pochi e spesso solo accennati. Tra questi ce n’è uno (*Routing\_Solid\_Connection*) su cui ci soffermeremo in modo particolare poiché, nel prossimo capitolo, sarà l’algoritmo di routing da cui partiremo per ottenere una serie di nuovi risultati.

In *Routing\_Solid\_Connection*, il problema di far passare in ogni link quante più connessioni possibili, è modellato come una particolare istanza del *Bin Packing Problem* (BPP). Quest’ultimo è un problema di ottimizzazione combinatoria NP-

*Hard* molto noto. Nel paragrafo 3.3 faremo una breve panoramica sul BPP in modo da comprendere meglio come opera l'algoritmo *Routing\_Solid\_Connection*.

### 3.2 Modello matematico

Analogamente al caso circuit switching, il problema di riconfigurabilità può essere riformulato come problema di edge coloring di multigrafi bipartiti.

#### **Definizione 3.1** *Weighted Edge Coloring* (WEC) [MRGaHw98]

Sia  $G=(V,E)$  un multigrafo i cui archi  $e \in E$  sono etichettati con un numero  $w(e)$  detto peso e tale che  $0 < b \leq w(e) \leq B \leq 1$ .

Chiamiamo *Weighted Edge Coloring* o colorazione di archi pesati, un assegnamento di colori a tutti gli archi  $E$  in modo che per ogni vertice  $v \in V$  la somma dei pesi degli archi dello stesso colore  $c$ , sia minore o uguale ad uno.

Con  $\chi_w(G)$  indicheremo il minimo numero di colori utilizzabili per un WEC di  $G$ .

Osserviamo che per  $b=B=1$  si ottiene la definizione di edge coloring vista nel capitolo due.

Come abbiamo visto per il caso CS, possiamo ora ridefinire una rete riconfigurabile in termini di WEC.

#### **Proprietà 3.1** *Rete di Clos riconfigurabile*

Una  $C(n,m,r)$  è riconfigurabile se e solo se, per ogni frame  $F$ , il grafo delle connessioni  $G_F$  ammette un weighted edge coloring con  $m$  colori.

Per vederlo basta associare ad ognuno degli  $m$  switch centrali uno dei colori utilizzati nella colorazione di  $G_F$ . In questo modo, da un WEC di  $G_F$ , si può ricavare una configurazione compatibile  $R$  che realizza  $F$ . Vale quindi anche la proprietà:

**Proprietà 3.2** *Algoritmo di routing*

Sia  $A_{WEC}$  un algoritmo che determina un WEC con  $m$  colori per un multigrafo bipartito, allora  $A_{WEC}$  è anche un algoritmo di routing per una  $C(n,m,r)$  riconfigurabile.

Consideriamo una rete di Clos con  $r$  switch d' ingresso (uscita) ognuno con  $n$  inlet (outlet). Il numero minimo di switch centrali  $M(n,r)$  affinché la rete sia riconfigurabile, corrisponde al minimo numero di colori necessari a colorare il multigrafo  $G_F$  relativo ad un qualsiasi frame  $F$  di  $\Phi(n,r)$ . Come per l'ambiente CS, il problema di riconfigurabilità può quindi essere riformulato come segue:

**Proprietà 3.3** *Problema di riconfigurabilità*

Siano fissati due interi positivi  $n$  ed  $r$ . Indichiamo con  $\chi_w(G_F(n,r))$  il numero minimo di colori affinché, per ogni frame  $F$  di  $\Phi(n,r)$ , il multigrafo  $G_F$  ammetta un edge coloring con  $\chi_w(G_F(n,r))$  colori. In simboli

$$\chi_w(G_F(n,r)) = \max_{F \in \Phi(n,r)} \chi_w(G_F).$$

Vale la relazione:

$$\chi_w(G_F(n,r)) = M(n,r)$$

(dove  $G_F(n,r)$  è l'insieme dei  $G_F$ , al variare di  $F$  in  $\Phi(n,r)$ ).

Purtroppo le analogie con il caso circuit switching si fermano qui, infatti non esiste nè un teorema equivalente a quello di Slepian e Duguid (capitolo 2) che ci dice quanto vale  $M(n,r)$ , nè un risultato simile al lemma di Konig che determini il valore di  $\chi_w(G_F(n,r))$ .

In [MRGaHw98], si osserva che il problema della determinazione di un WEC per un multigrafo pesato non è stato affrontato in letteratura (per lo meno fino al 1999). Nello stesso articolo si dà il primo limite superiore ed uno inferiore a  $\chi_w(G)$  nel caso che  $G$  sia bipartito. Vale infatti il teorema:

**Teorema 3.1** [MRGaHw98]

Sia  $G=(I,O,E)$  un multigrafo bipartito pesato, con pesi appartenenti all'intervallo  $(0,1]$  e sia  $w(v)$  il *peso* del vertice  $v$ , cioè la somma dei pesi degli archi incidenti su  $v$ . Vale la relazione

$$2n-1 \leq \chi_w(G) \leq \left\lceil \frac{17n-5}{6} \right\rceil$$

dove  $n=\max\{w(v) \mid v \in I \cup O\}$  è detto *peso* di  $G$ .

Sia  $G(n,r)$  l'insieme dei multigrafi bipartiti di peso  $n$  e con l'insieme dei vertici partizionato in due insiemi  $I$  e  $O$  tali che  $|I|=|O|=r$ . Osserviamo che fissati  $n$  ed  $r$ ,  $G(n,r)$  contiene propriamente  $G_F(n,r)$  dunque  $\chi_w(G_F(n,r)) \leq \chi_w(G(n,r))$ . Questo è dovuto alla definizione di frame che, essendo un multinsieme di connessioni compatibile, implica l'esistenza, per ogni vertice  $v$  di  $G_F$ , di una partizione degli archi incidenti su  $v$  in  $n$  gruppi ciascuno di peso al più uno. Ricordiamo infatti che nella definizione di insieme di connessioni compatibili, si richiede che la somma dei pesi delle richieste che arrivano (sono "dirette") da un inlet (ad un outlet) sia al più uno.

**3.3 Problema del Bin Packing (BPP).**

Il problema del bin packing è così definito:

**Definizione 3.2**

Sia  $C$  una costante positiva ed  $l=(x_1, \dots, x_n)$  una lista di elementi (o *item*) ognuno avente un *peso*  $w(x_i)$  t.c.  $0 < w(x_i) \leq C$ .

Ci chiediamo qual è il più piccolo intero positivo  $m$  per cui esiste una partizione (o *packing*)  $B_1, \dots, B_m$  di  $l$  t.c. :

$$w(B_j) = \sum_{x_i \in B_j} w(x_i) \leq C \quad \forall B_j, 1 \leq j \leq m$$

dove  $B_1, \dots, B_m$  sono detti *bin* ed il valore  $w(B_j)$  è il *peso* del bin  $B_j$ .

L'analisi matematica del BPP risale ai primi anni settanta ed è di M.R Garey e R.L. Graham. Nel corso degli anni il BPP, assieme a sue numerose varianti, si è dimostrato essere un modello matematico per molti problemi pratici legati a diverse discipline: imballaggio di merci, riempimento di container, cutting stock, assegnamento di spot commerciali nei programmi televisivi, allocazione di memoria nei computer e più in generale problemi di scheduling di risorse limitate. Il problema è stato dimostrato essere NP-hard [BPGaJh79], dunque è improbabile che esista un algoritmo efficiente (cioè con complessità in tempo polinomiale) che lo risolva.

Tutto questo ha comportato numerose ricerche sul tema e la produzione di diverse euristiche per risolvere il BPP. Un'ampia panoramica sull'argomento si può trovare in [BPJohn96].

La maggior parte delle euristiche proposte, si possono dividere in due categorie: *on line* ed *off line*. Nel caso degli algoritmi *on line*, gli item sono messi nei bin nell'ordine in cui sono "incontrati" scandendo la lista  $l$ ; la decisione in quale bin inserire l'item  $x_i$  è presa senza conoscere gli item successivi di  $l$  cioè  $x_{i+1}, \dots, x_n$ . Gli algoritmi *off line*, invece conoscono l'intera lista  $l$  degli item e, come è intuibile, in generale producono risultati migliori di quelli *on line*.

In entrambi i tipi di euristica, una volta deciso in quale bin inserire un elemento, non è più possibile cambiare decisione.

A riguardo della misura della bontà delle euristiche, questa è fornita in termini di *analisi competitiva*, secondo cui se  $|E(l)|$  è il numero di bin prodotti dall'euristica  $E$  applicata ad  $l$  e  $|OTT(l)|$  è la soluzione ottima al BPP, allora si vuole determinare un upper bound al rapporto  $|E(l)|/|OTT(l)|$  al variare delle possibili  $l$ . Nel prossimo paragrafo, oltre ad una serie di notazioni e definizioni, formalizzeremo meglio questo concetto.

Un altro studio che si fa sull'euristiche, è quello del loro comportamento nel caso medio e si basa principalmente su un approccio statistico. Di questo comunque noi non ci occuperemo.

### 3.3.1 Definizioni e notazioni

Sia data la lista di item  $l=(x_1, \dots, x_n)$ , indichiamo con  $E(l)=\{B_1, \dots, B_m\}$  la sequenza di bin prodotti dall'euristica  $E$  e con  $OTT(l)$  quella che fornirebbe

l'algoritmo ottimo. D'ora in avanti considereremo  $C=1$ , poiché a questo caso ci possiamo sempre ricondurre “normalizzando” il peso di tutti gli item.

Sia  $\alpha$  un numero reale appartenente all'intervallo  $(0,C]$ ,  $V_\alpha$  è l'insieme di tutte le liste  $l$  i cui item hanno un peso  $w \in (0, \alpha]$ .

**Definizione 3.3** *Asymptotic Performance Ratio (APR)*

$$R_E^\infty(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sup_{l \in V_\alpha} \left\{ \frac{E(l)}{k} : OPT(l) = k \right\} \right)$$

quando  $\alpha=1$  allora lo indicheremo più brevemente con  $R_E^\infty$

In sostanza il numero  $R_E^\infty(\alpha)$ , misura, nel caso pessimo, la bontà della soluzione prodotta da  $E$  rispetto all'algoritmo ottimo  $OTT$ . Una definizione equivalente di  $R_E^\infty(\alpha)$  molto utilizzata è la seguente:

$R_E^\infty(\alpha)$  è il più piccolo numero per cui esiste una costante  $k \geq 0$  tale che

$$E(l) \leq R_E^\infty(\alpha) OPT(l) + k \quad \forall l \in V_\alpha$$

C'è un secondo modo per misurare la performance dell'euristica  $E$  nel caso pessimo ed è conosciuto come *absolute worst-case ratio*:

$$R_E(\alpha) = \sup_{l \in V_\alpha} \left\{ \frac{E(l)}{OTT(l)} \right\}$$

In termini più recenti  $R_E(\alpha)$  sarebbe detto “rapporto competitivo” in particolar modo se riferito ad algoritmi on line.

### 3.3.2 Euristiche

Stabiliamo alcune convenzioni che utilizzeremo nel seguito:

- Chiameremo *item corrente* quello che l'euristica deve inserire in un bin.
- Un bin parzialmente riempito che un'euristica non può utilizzare per inserirvi un item, è detto *chiuso*. Al contrario se è ancora utilizzabile lo chiameremo *bin aperto*.

Vediamo in breve alcune delle euristiche più note e studiate.

### ***Euristiche on line***

#### *Next Fit (NF)*

Inserisce il primo item  $x_1$  nel bin  $B_1$ . Quando inserisce l'item corrente  $x_i$ , prova a metterlo nel bin  $B_j$  in cui ha messo l'item precedente  $x_{i-1}$ . Se in  $B_j$  c'è spazio a sufficienza per  $x_i$ , allora è inserito in  $B_j$  e passa al prossimo item. Se in  $B_j$  non c'è spazio per  $x_i$ , allora il bin  $B_j$  viene chiuso ed  $x_i$  è inserito nel un nuovo bin  $B_{j+1}$ .

La complessità dell'algoritmo è  $O(n)$  mentre l'APR non è molto buono, vale infatti il seguente teorema:

#### **Teorema 3.2** [BPGaJh74]

$$R_{NF}^{\infty}(\alpha) = \begin{cases} 2 & \text{se } 1/2 < \alpha \leq 1 \\ (1-\alpha)^{-1} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1/2 \end{cases}$$

Un difetto abbastanza evidente dell'algoritmo è il fatto che un bin possa essere chiuso anche quando potrebbe contenere ancora item. Una prima modifica all'euristica NF, nel tentativo di migliorarla, è quella di lasciare sempre aperti i bin che a mano a mano l'algoritmo crea. In questo caso, quando viene inserito un item  $x_i$ , può accadere che ci siano più bin aperti che possono contenerlo. Le successive euristiche si differenziano proprio rispetto alla politica adottata nella scelta del bin aperto dove inserire l'item  $x_i$ .

#### *Worst Fit (WF)*

Se non ci sono bin aperti che possano contenere l'item corrente  $x_i$ , WF ne crea uno nuovo dove inserirlo. Altrimenti, sceglie tra i bin aperti con il massimo dello spazio disponibile, quello con indice minore.

In [BPJhon74] si dimostra che nel caso pessimo WF si comporta come *Next Fit*, vale infatti il teorema:

#### **Teorema 3.3** [BPJhon74]

$$R_{NF}^{\infty}(\alpha) = R_{WF}^{\infty}(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0,1]$$



La prossime euristiche migliorano il valore dell'ARP.

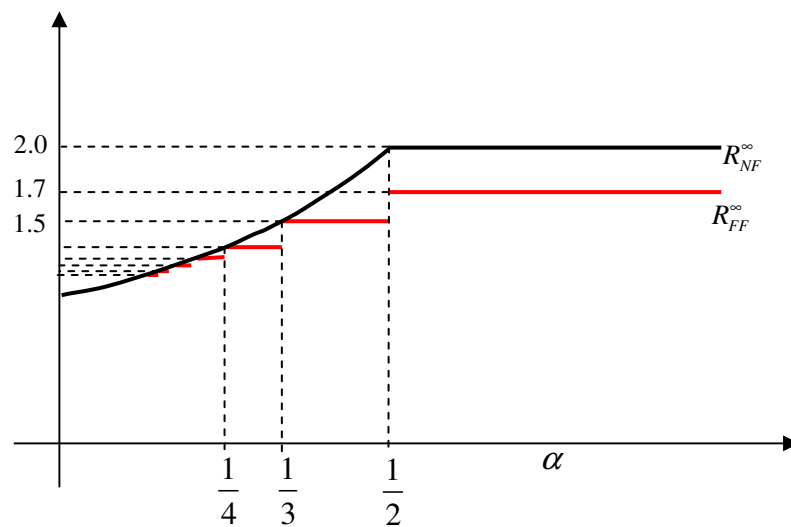
*First Fit* (FF)

Se esistono bin aperti capaci di contenere l'item corrente  $x$ , FF sceglie quello di indice minore. Altrimenti, ne utilizza uno nuovo.

**Teorema 3.4**[BPGaJh74]

$$R_{FF}^{\infty}(\alpha) = \begin{cases} 17/10 & \text{se } 1/2 < \alpha \leq 1 \\ 1 + \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor^{-1} & \text{se } 0 < \alpha \leq 1/2 \end{cases}$$

Il grafico seguente paragona i valori dell'ARP per l'euristiche FF e NF (in rosso il valore di  $R_{FF}^{\infty}(\alpha)$ , in nero  $R_{NF}^{\infty}(\alpha)$ )



*Best Fit* (BF)

Se non ci sono bin aperti che possano contenere l'item corrente, BF lo inserisce in uno nuovo. Altrimenti, sceglie tra i bin aperti con meno spazio disponibile, quello con indice minore.

**Teorema 3.5**[BPGaJh74]

$$R_{BF}^{\infty}(\alpha) = R_{FF}^{\infty}(\alpha) \quad \forall \alpha \in (0, 1]$$

Di seguito riportiamo per ogni euristica menzionata, la complessità ed il valore di  $R_E^\infty(1)$  [BPMart90].

<b>Euristica</b>	<b>Complessità</b>	$R_E^\infty(1)$
<i>Next Fit</i>	$O(n)$	2
<i>Worst Fit</i>	$O(n \log n)$	2
<i>First Fit</i>	$O(n \log n)$	17/10
<i>Best Fit</i>	$O(n \log n)$	17/10

### ***Euristiche off line***

Ricordiamo che un algoritmo off line in ogni istante “conosce” tutti gli item di  $l$ . Questo consente una preelaborazione di  $l$  prima di iniziare ad inserire gli item nei bin. Un modo classico di ottenere un algoritmo off-line è quello di ordinare in modo decrescente la lista  $l$  in base al peso degli item e poi applicare un’euristica on line. Sono un esempio di questa logica gli algoritmi *Next Fit Decreasing*, *First Fit Decreasing* e *Best Fit Decreasing*. Diamo alcuni risultati riguardanti le ultime due.

### ***First Fit Decreasing (FFD) e Best Fit Decreasing (BFD)***

Si può osservare con degli esempi che l’euristica FF ha il comportamento peggiore quando gli item sono ordinati in modo crescente rispetto al loro peso. Un’idea per migliorare l’algoritmo è stata dunque quella di ordinare  $l$  in modo decrescente. Il risultato ottenuto è stato un notevole miglioramento del valore di  $R_{FFD}^\infty$  portandolo a 1,2222.... Vale infatti il teorema:

**Teorema 3.6** [BPGaJh74]

$$R_{FFD}^\infty = \frac{11}{9}$$

Più precisamente Johnson in [BPGaJh74], con una dimostrazione molto lunga, determina il seguente limite superiore:

$$FFD(l) \leq \frac{11}{9} OTT(l) + 4 \quad \forall l$$

Tale limite è stato leggermente migliorato prima in [BPBake85] portandolo a  $FFD(l) \leq (11/9)OTT(l) + 3$  e successivamente da Yue in [BPYue91] nel 1991 ottenendo  $FFD(l) \leq (11/9)OTT(l) + 1$  che attualmente risulta essere il migliore conosciuto. Al di là del miglioramento sulla costante additiva, ciò che viene ritenuto importante è la notevole semplificazione della dimostrazione ottenuta.

Per quanto riguarda BFD sempre Jhonson, ha dimostrato il teorema:

**Teorema 3.7**[BPGaJh74]

$$R_{FFD}^{\infty} = R_{BFD}^{\infty}$$

Su BFD non c'è altro da dire, mentre FFD è stata ampiamente studiata e diversi sono i risultati ottenuti sul valore di  $R_{FFD}^{\infty}(\alpha)$  al variare di  $\alpha$ . Riassumiamo di seguito i principali:

**Teorema 3.8** [BPGaJh74]

$$R_{FFD}^{\infty}(\alpha) = \begin{cases} \frac{11}{9} & \text{per } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \\ \frac{71}{60} & \text{per } \frac{8}{29} < \alpha \leq \frac{1}{5} \\ \frac{7}{6} & \text{per } \frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{8}{29} \\ \frac{23}{20} & \text{per } \frac{1}{5} < \alpha \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Circa vent'anni dopo Xu in [BPXu00] ha migliorato questo risultato per  $\alpha \leq 1/4$ .

**Teorema 3.9** [BPXu00]

$$R_{FFD}^{\infty}(1/m) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+2} - \frac{2}{m(m+1)(m+2)} & \text{per } m \text{ pari} \\ 1 + \frac{1}{m+2} - \frac{2}{m(m+1)(m+2)} & \text{per } m \text{ dipari e } \frac{1}{m+1} < \alpha \leq d_m \\ 1 + \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m(m+1)(m+2)} & \text{per } m \text{ dispari e } d_m < \alpha \leq \frac{1}{m} \end{cases}$$

dove,

$m$  è un intero maggiore o uguale a 4

$$d_m = \frac{(m+1)^2}{m^3 + 3m^2 + m + 1}$$

Per diverso tempo FFD è stata l'euristica con il miglior APR. Nel 1980 Yao ha proposto un'euristica molto complicata (*Refined First-Fit Decreasing*) con un

APR pari a  $R_{RFFD}^{\infty} = \frac{11}{9} - 10^{-7}$ . L'euristica comunque ha una complessità di

$O(n^{10} \log n)$  che quindi la rende utilizzabile solo per bassi valori di  $n$ .

Garey e Johnson nel 1985 presentano in [BPGaJh85] l'algoritmo Modified First-Fit Decreasing (MFFD) basato su una modifica di FFD, con  $R_{MFFD}^{\infty} = 71/60$  e complessità  $O(n \log n)$ .

### 3.4 Problema di riconfigurabilità ed algoritmi di routing

Presentiamo ora una serie di limiti superiori ad  $M(n,r)$  e gli algoritmi di routing per una  $C(n,m,r)$  riconfigurabile. Divideremo la presentazione rispetto ai casi continuo, discreto e  $k$ -rate.

#### 3.4.1 Caso Continuo

Ricordiamo che nell'ambiente multirate continuo, ogni connessione ha un peso  $w$  tale che  $w \in (b, B]$  con  $0 \leq b < B \leq 1$ .

In [MRMeTu89], R. Mellen e J. Turner, forniscono il primo algoritmo di routing per reti di Benès riconfigurabili in ambiente multirate. L'algoritmo è noto come CAP (*Constrained Alternating Path*) e si basa sull'algoritmo di edge coloring con cammini alternati che abbiamo già visto nel capitolo 2.

Diamo di seguito la descrizione di CAP:

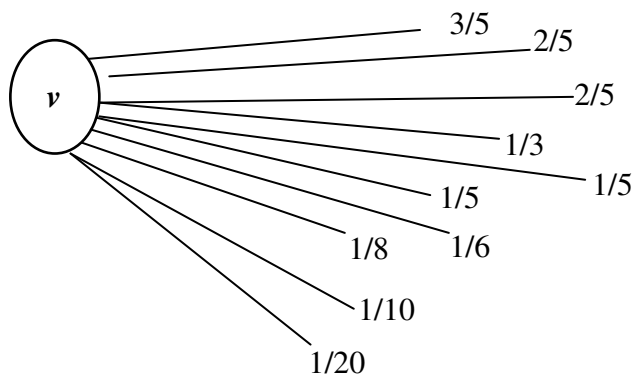
Sia  $C(n,m,r)$  una rete di Clos,  $F$  un suo frame e  $G_F$  il multigrafo delle connessioni associato:

1. Per ogni vertice  $v$ , ordina in modo decrescente rispetto al loro peso, tutti gli archi incidenti su  $v$ .
2. Partizioniamo gli archi incidenti su  $v$  in  $d = \lceil \text{deg}(v)/m \rceil$  gruppi ciascuno di dimensione  $m$ . Il primo gruppo  $g_1(v)$  contiene gli  $m$  archi più pesanti, il secondo  $g_2(v)$  i "successivi" più pesanti e così via. L'ultimo gruppo, cioè il  $d$ -esimo, potrà contenere meno di  $m$  archi.
3. Modifichiamo  $G_F$  scindendo in  $\lceil \text{deg}(v)/m \rceil$  nodi ogni vertice di  $G_F$  in modo che sull' $i$ -esimo vertice ottenuto incidano gli archi del gruppo  $g_i(v)$ . Osserviamo che ora  $\text{deg}(G_F) \leq m$  per costruzione.
4. Costruiamo un edge coloring minimo per  $G_F$  utilizzando l'algoritmo dei cammini alternati. Dal lemma di Konig, poiché  $\text{deg}(G_F) \leq m$ , segue che si possono utilizzare  $m$  colori.
5. Si "fondono" i nodi di  $G_F$  in modo da ottenere il multigrafo originale.

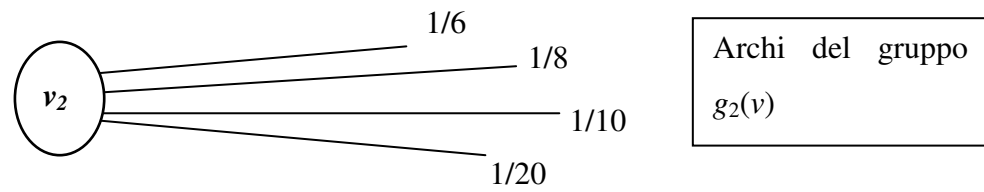
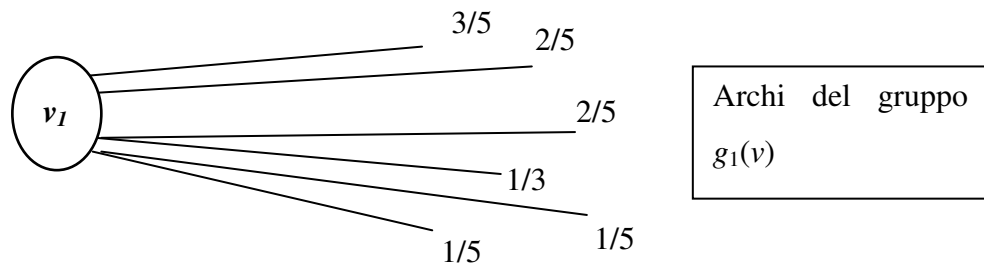
Questa appena riportata è la versione originale dell'algoritmo, osserviamo però che il passo quattro può essere sostituito da qualsiasi procedura di edge coloring o di TSA vista nel capitolo 2.

Illustriamo con un esempio, le operazioni principali effettuate dall'algoritmo su un generico vertice  $v$  di  $G_F$ , assumendo  $n=3$  ed  $m=6$ .

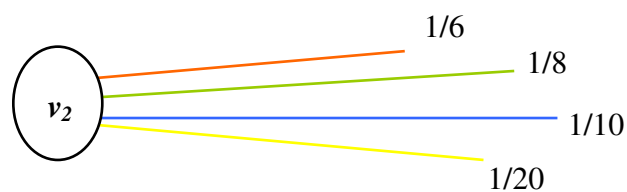
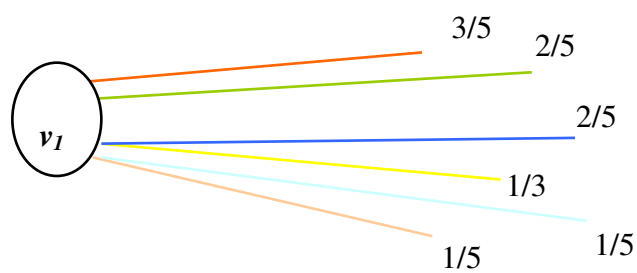
**Passo 1** : Ordina gli archi incidenti su  $v$  rispetto al loro peso .



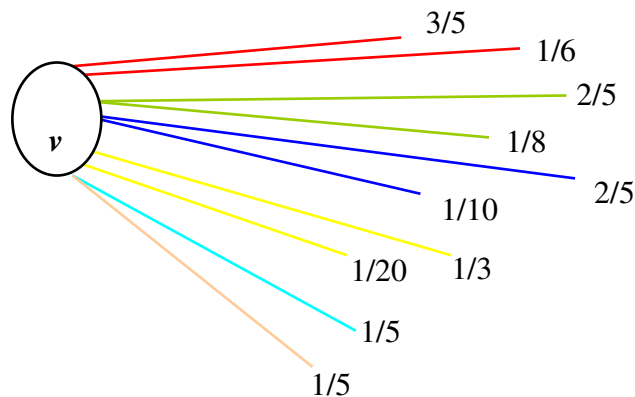
**Passi 2 e 3 :** Il vertice  $v$  è diviso nei vertici  $v_1$  e  $v_2$  ognuno con grado al più  $m$ .



**Passo 4 :** Costruisce un EC minimo di  $G_F$ .



**Passo 5** : Ricomponi i nodi fusi.



È facile verificare che la somma dei pesi degli archi dello stesso colore vale al più uno.

Il seguente lemma ci dà una condizione su  $m$  affinché CAP crei un WEC per un  $G_F$ : in altre parole, affinché CAP possa funzionare come algoritmo di routing per una rete  $C(n,m,r)$  riconfigurabile.

**Lemma 3.1** [MRGaHw98]

Sia data una  $C(n,m,r)$  e sia  $w \in (0, B]$  con  $0 < B < 1$ .

Se  $m \geq \left\lceil \frac{n-B}{1-B} \right\rceil$  allora  $C(n,m,r)$  è riconfigurabile e CAP può essere utilizzato come algoritmo di routing.

**Dimostrazione**

Dimostriamo che se  $m \geq \left\lceil \frac{n-B}{1-B} \right\rceil$ , CAP ottiene una WEC di  $G_F$  relativo a qualsiasi frame  $F$  di  $\Phi(n, r)$ .

Sia  $v$  un vertice qualsiasi di  $G_F$  e  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  l'insieme degli  $m$  colori utilizzati da CAP. Indichiamo con  $w_i(v, c_j)$  il peso dell'arco di colore  $c_j$  incidente su  $v$  ed appartenente al gruppo  $g_i(v)$ . Sia invece  $w(v, c_j) = \sum_{i=1}^d w_i(v, c_j)$  il peso di tutti gli archi di colore  $c_j$  incidenti su  $v$ .

Vale la relazione

$$w(v, c_j) - B \leq w(v, c_i) \quad \forall c_i \neq c_j \quad (1).$$

Infatti, per come sono stati definiti i gruppi di archi sappiamo che  $B \geq w_1(v, c_j)$  e che

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(v, c_i) \geq w_2(v, c_j) \\ w_2(v, c_i) \geq w_3(v, c_j) \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{d-1}(v, c_i) \geq w_d(v, c_j) \end{array} \right.$$

sommando nella (1) rispetto agli  $m-1$  colori diversi da  $c_j$  otteniamo:

$$\sum_{j \neq i}^d (w(v, c_i) - B) \leq \sum_{j \neq i}^d w(v, c_j) = \sum_{j=1}^d w(v, c_j) - w(v, c_i)$$

ma  $\sum_{j=1}^d w(v, c_j)$  è il peso totale degli archi incidenti su  $v$  che, per definizione di frame, al più vale  $n$

$$(m-1)(w(v, c_i) - B) \leq n - w(v, c_i)$$

da cui semplificando:

$$w(v, c_i) \leq \frac{n}{m} + \frac{n-1}{m} B$$

Affinché la colorazione sia un WEC dovrà essere che  $w(v, c_i) \leq 1$ , quindi,

$$\frac{n}{m} + \frac{n-1}{m} B \leq 1,$$

da cui segue la tesi:

$$m \geq \left\lceil \frac{n-B}{1-B} \right\rceil$$

La tesi del lemma si può anche leggere come limite superiore ad  $M(n, r)$  quando il peso  $w$  delle connessioni appartiene all'intervallo  $(0, B]$  con  $0 < B < 1$ .



In particolare, per  $B=1/2$ , otteniamo che  $M(n,r) \leq 2n-1$  che va nella direzione della congettura di *Chung & Ross*.

Nella dimostrazione precedente non abbiamo sfruttato l'ipotesi secondo cui la capacità di ogni inlet (outlet) è uno. Questo implica che su ciascuna porta d'ingresso (uscita) della rete, possono arrivare al più  $n \lfloor 1/b \rfloor$  richieste. Il multigrafo  $G_F$  avrà così grado al più  $n \lfloor 1/b \rfloor$  e, per il lemma di König, può essere colorato con  $n \lfloor 1/b \rfloor$  colori. Segue il lemma:

**Lemma 3.2** [MRGaHw98]

$$M(n,r) \leq n \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor \text{ per } w \in [b,1]$$

Il lemma 3.1 non c'è molto d'aiuto nel caso  $B \rightarrow 1$  mentre il lemma 3.2 non lo è per  $b \rightarrow 0$ . I due risultati possono però essere combinati in modo da ottenere un primo limite superiore ad  $M(n,r)$  per  $w \in (0,1]$ .

**Teorema 3.10** [MRGaHw98]

$$M(n,r) \leq 3n-1$$

### **Dimostrazione**

Partizioniamo gli switch centrali in due insiemi. Il primo è riservato a soddisfare solo le richieste con peso non maggiore di  $1/2$ , il secondo solo quelle con peso strettamente maggiore di  $1/2$ .

Il lemma 3.1 ci assicura che tutte le connessioni con peso inferiore a  $1/2$  possono essere realizzate da CAP con  $2n-1$  switch centrali (basta porre  $B=1/2$ ). Dal lemma 3.2 segue invece che le richieste con peso maggiore di  $1/2$  ( $b=1/2$ ) sono realizzabili con  $n$  switch centrali. In totale quindi sono sufficienti  $2n-1+n=3n-1$  switch intermedi per rendere la rete riconfigurabile.

Tale limite superiore di  $M(n,r)$  è ulteriormente migliorato nello stesso articolo [MRGaHw98]. Come vedremo tra breve infatti, il coefficiente di  $n$  viene portato a circa 2.56 che ad oggi rappresenta il miglior upper bound di  $M(n,r)$  indipendente dal valore di  $r$ . La dimostrazione di questo importante risultato utilizza i due seguenti lemma:

(Con *multigrafi disconnessi*, intendiamo senza archi in comune).

**Lemma 3.3** [MRLasz79]

Sia  $G=(V,E)$  un multigrafo bipartito e  $k \geq 1$  un intero. Allora  $G$  è l'unione di  $k$  multigrafi *disconnessi*  $G_1=(V,E_1), \dots, G_k=(V,E_k)$  tali che:

$$\left\lfloor \frac{\deg(v)}{k} \right\rfloor \leq \deg(G_i) \leq \left\lceil \frac{\deg(v)}{k} \right\rceil \quad \forall v \in V .$$

**Lemma 3.4** [MRGaHw98]

Sia  $G_F$  il multigrafo delle connessioni associato ad un frame  $F$ . Supponiamo che tutti gli archi di  $E$  aventi peso strettamente maggiore di  $1/f$  siano colorati con l'insieme  $C$  di colori, dove  $f$  è un intero positivo e  $|C|=c \geq 2n$ . Allora, per colorare tutti gli archi con peso  $\leq 1/f$ , sono necessari altri  $\lceil ((c-2)/f) - c + 2n \rceil$  colori.

Il primo lemma ci consente di applicare una tecnica di divide et impera per colorare il multigrafo delle connessioni  $G_F$  decomponendolo in più multigrafi  $G_1, \dots, G_k$ . Il secondo invece ci permette di utilizzare uno stesso insieme di colori per ottenere un WEC di alcuni dei  $G_i$ .

**Teorema 3.11** [MRGaHw98]

$$M(n,r) \leq \left\lceil \frac{(41n - E_n)}{16} \right\rceil \quad \text{dove, } E_n = \begin{cases} 8 & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 5 & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 6 & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4} \\ 3 & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

### Dimostrazione

Dimostriamo solo il caso con  $n \equiv 0 \pmod 4$ , gli altri casi si dimostrano in modo simile.

Sia  $G_F = (I, O, E)$  il multigrafo delle connessioni associato ad un frame  $F$ .

Partizioniamo  $E$  in 3 gruppi così definiti:

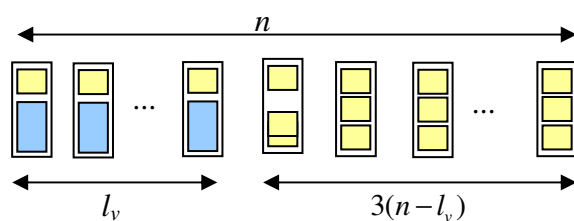
$$E_L = \left\{ e \mid e \in E \wedge w(e) > \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{archi/connessioni } \textit{pesanti})$$




$$E_M = \left\{ e \mid e \in E \wedge \frac{1}{4} < w(e) \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (\text{archi/connessioni } \textit{medi})$$

$$E_S = \left\{ e \mid e \in E \wedge 0 < w(e) \leq \frac{1}{4} \right\} \quad (\text{archi/connessioni } \textit{leggeri})$$

A tali multinsiemi corrispondono i tre multigrafi  $L = (I, O, E_L)$ ,  $M = (I, O, E_M)$  e  $S = (I, O, E_S)$ .

Siano  $l_v$  e  $m_v$  rispettivamente il numero degli archi pesanti e di quelli medi che incidono su un vertice  $v \in I \cup O$ . Determiniamo un limite superiore ad  $m_v$ : poiché ognuno degli  $n$  inlet (o outlet) dello switch d'ingresso (uscita) corrispondente a  $v$  può avere al più una connessione pesante ed una media, segue che  $m_v \leq l_v + 3(n - l_v)$ .



-  rappresenta una porta (inlet/outlet) dello switch  $I_v$  (o  $O_v$ )
-  rappresenta una connessione *media*
-  rappresenta una connessione *pesante*

Applicando il lemma 3.3,  $M$  può essere decomposto in due multigrafi  $M_1$  e  $M_2$  tali che  $\deg(M_i) \leq \lceil \deg(M)/2 \rceil$   $i=1,2$ . Ma abbiamo appena visto che ogni nodo di  $M$  ha grado al più  $l_v + 3(n-l_v)$  quindi:

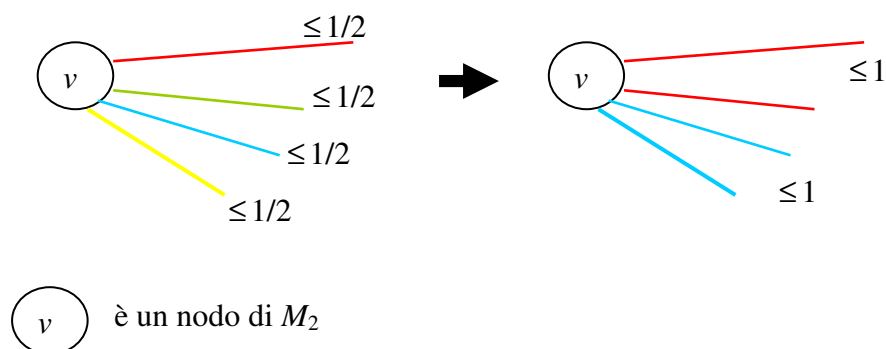
$$\deg(M_i) \leq \lceil \deg(M)/2 \rceil \leq \left\lceil \frac{3n-2l_v}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n}{2} - l_v \right\rceil \quad i=1,2$$

Per ipotesi, quattro divide  $n$ , quindi,

$$\deg(M_i) \leq \frac{3n}{2} - l_v \quad i=1,2.$$

Consideriamo ora il multigrafo  $L'=(I,O,E')$  ottenuto da  $L$  aggiungendo gli archi di  $M_1$ . Il grado di  $L'$  quindi vale  $\deg(L)+\deg(M_1)$  che, per quanto appena visto, possiamo maggiorare con  $l_v + \frac{3n}{2} - l_v = \frac{3n}{2}$ . Dunque  $L'$  per il lemma di Konig può essere colorato con  $3n/2$  colori.

Determiniamo un WEC sul multigrafo  $M_2$ . Per quanto osservato prima, il suo grado vale al più  $3n/2$ . Per il lemma di Konig un EC minimo impiegherebbe  $3n/2$  colori ma, poiché ogni arco pesa al più  $1/2$ , per il WEC possiamo utilizzarne la metà. Quindi per un WEC su  $M_2$  sono sufficienti  $3n/4$  colori.



Non rimane che risolvere il problema di edge coloring con archi pesati su  $S$ , cioè sul multigrafo delle connessioni leggere. Sia  $C$  l'insieme dei colori utilizzati per colorare  $L'$  e  $M_2$ . Per quanto dimostrato in precedenza, sappiamo che  $|C| \leq 3n/2 + 3n/4 = 9n/4$ . Aggiungiamo, se necessario, a  $C$  tanti colori quanti ne servono per arrivare ad ottenere  $|C|=9n/4$ . Poiché ogni arco di  $S$  pesa al più  $1/4$ , possiamo applicare il lemma 3.4 con  $f=4$  ed ottenere che servono

$$\left\lceil \frac{9n/4}{4} - (9/4 - 2)n \right\rceil = \left\lceil \frac{5n-8}{16} \right\rceil$$

colori in più a quelli di  $C$  per colorare  $S$ .

In totale quindi per un WEC su  $G_F$  sono sufficienti:

$$\frac{9n}{4} + \left\lceil \frac{5n-8}{16} \right\rceil = \left\lceil \frac{41n-8}{16} \right\rceil$$

colori, che è quanto volevamo dimostrare.

Il prossimo risultato è stato presentato in [MRLiZh99] come ulteriore conferma alla tesi di Chung e Ross.

**Lemma 3.5** [MRLiZh99]

Sia data una  $C(n,m,r)$  e sia  $w \in (1/3, 1]$ . Allora

$$M(n,r) \leq 2n-1$$

**Dimostrazione**

Poiché ogni connessione ha un peso più grande di  $1/3$ , dal lemma 3.2 segue che il multigrafo delle connessioni  $G_F$  ha grado al più  $2n$  per qualsiasi frame  $F$ . Per il lemma di Konig  $G_F$  ammette un EC con  $2n$  colori.

Consideriamo un vertice  $v$  con esattamente  $2n$  archi incidenti. Sia  $e$  l'arco con il peso minimo  $w_{min}$ : possiamo "ricolorare"  $e$  con uno dei  $2n-1$  colori utilizzati per gli altri archi. Infatti, nel caso in cui da uno switch d'ingresso arrivino  $2n$  richieste, allora ogni inlet/outlet "contiene" esattamente due connessioni di peso

$w_1$  e  $w_2$ , tali che  $w_1+w_2 \leq 1$  e  $w_1 \leq w_{min}$ ,  $w_2 \leq w_{min}$ . Quindi, la somma del peso di  $e$  con quello di qualsiasi altro arco incidente su  $v$  è sempre minore o uguale ad uno.

Il prossimo limite superiore di  $M(n,r)$  che vediamo, differisce dai precedenti poiché dipende dal valore di  $r$ , cioè il numero di switch d'ingresso/uscita della rete. Più precisamente, F. K. Liotopoulos in [MRLiot02] dimostra che  $M(n,r) \leq 2n+r(1-2b)$  fornendo un algoritmo di routing che, fissato un frame  $F$ , determina una configurazione  $R$  che realizza  $F$  ed è compatibile con  $C(n, 2n+r(1-2b),r)$ .

L'algoritmo di routing proposto (*Routing\_Solid\_Connection*) è costituito da due parti principali. Nella prima, le connessioni sono "raggruppate" in modo che ogni gruppo abbia un peso totale minore o uguale ad uno. Nella seconda è deciso il routing, cioè si stabilisce quale cammino deve seguire ogni singolo gruppo di connessioni. Vediamo più nel dettaglio l'algoritmo.

Sia  $T$  una qualsiasi matrice di traffico associata ad un frame  $F$ .

*Algoritmo Routing\_Solid\_Connection( T )*

1. Su ogni  $t_{i,j}$  di  $T$  risolviamo il problema del bin packing, con un'euristica  $E$ , rispetto al peso di ciascuna delle connessioni di  $t_{i,j}$ . Sia  $u_{i,j}$  il numero di bin prodotti.
2. Costruiamo la matrice d'interi  $U$  ottenuta da  $T$  sostituendo ogni elemento  $t_{i,j}$  con il valore  $u_{i,j}$  determinato al passo precedente.
3. Risolviamo problema TSA su  $U$ . Sia  $p_1M_1+\dots+p_qM_q$  la decomposizione della matrice  $U$  ottenuta. Costruiamo la decomposizione  $S$  prendendo le matrici  $M_i$  con la loro molteplicità:

$$S = ( M_1, M_1, \dots, M_1, M_2, \dots, M_2, \dots, M_q, \dots, M_q )$$

4. return  $S$ ;

Osserviamo che i bin prodotti al passo uno (per definizione stessa del problema di bin packing) sono tali che la somma dei pesi delle connessioni presenti in ogni bin vale al più uno. Tutte le connessioni presenti in un singolo bin possono dunque

"passare" attraverso un link poiché quest'ultimo ha capacità uno. Il passo tre non fa altro che decidere attraverso quale switch centrale far passare le connessioni di ogni bin.

Per quanto riguarda la scelta dell'euristica  $E$ , l'autore non dice quale utilizzare. In ogni modo, si richiede che sia "sufficientemente intelligente" a garantire che produca al più un bin  $B$  con peso  $w(B) \leq 1/2$ .

Rispetto alle euristiche viste nel paragrafo 3.3, è facile verificare che tutte, tranne la Next First, soddisfano questo requisito. Infatti, escludendo NF, non potrà mai accadere che due bin pesino meno di  $1/2$ , altrimenti il contenuto di uno sarebbe stato messo nell'altro. Next Fit, non ha questa caratteristica perché può chiudere un bin anche se ancora "mezzo vuoto".

Il prossimo teorema dimostra che *Routing\_Solid Connection* è utilizzabile come algoritmo di routing per una  $C(n,m,r)$  con  $m \geq 2n+r(1-2b)$ .

**Teorema 3.12** [MRLiot02]

Sia  $C(n,m,r)$  una rete di Clos simmetrica e  $w \in [b,1]$ . Se  $m \geq 2n+r(1-2b)$  allora utilizzando l'algoritmo *Routing\_Solid\_Connection*,  $C(n,m,r)$  è riconfigurabile.

In altre parole,

$$M(n,r) \leq 2n+r(1-2b) \text{ con } b \leq 1/2$$

**Dimostrazione**

Dimostriamo prima che la matrice di interi  $U$  prodotta dall'algoritmo è tale che la somma di ogni sua generica linea (riga o colonna), vale al più  $2n+r(1-2b)$ . Successivamente vedremo come ricavare un WEC, per un qualsiasi  $G_F$ , che usa al più  $2n+r(1-2b)$  colori, partendo da una soluzione del problema di TSA su  $U$ .

Stabiliamo alcune notazioni:

- $E$  è un euristica che risolve il BPP.
- Sia  $t_i = t_{i,1} \cup t_{i,2} \cup \dots \cup t_{i,r-1} \cup t_{i,r}$  la lista di tutte le connessioni relative alla riga  $i$ -esima di  $T$ .

- $E(t_{i,j}) = \{B_1, \dots, B_k\}$  la soluzione ottenuta applicando l'euristica  $E$  alla lista  $t_{i,j}$ .  $B_s$  è un generico bin. ( $1 \leq s \leq k$ )
- $B(t_i)$  tutti i bin prodotti dall'applicazione di  $E$  alle  $r$  liste di connessioni contenute nella riga  $i$  di  $T$ . Ad esempio per una riga  $t_i$  di  $T$  vale

$$B(t_i) = E(t_{i,1}) \cup E(t_{i,2}) \cup \dots \cup E(t_{i,r-1}) \cup E(t_{i,r}). \text{ Da cui } |B(t_i)| = \sum_{j=1}^r |E(t_{i,j})|$$

- indichiamo con  $\{H_i, L_i\}$  una partizione di  $B(t_i)$  così definita:
 
$$H_i = \{B_j \mid B_j \in B(t_i) \wedge w(B_j) > 1/2\}$$
 detto insieme dei bin "pesanti"
 
$$L_i = \{B_j \mid B_j \in B(t_i) \wedge w(B_j) \leq 1/2\}$$
 detto insieme dei bin "leggeri".
 Essendo  $\{H_i, L_i\}$  una partizione di  $B(t_i)$  vale
  - $|B(t_i)| = |H_i| + |L_i|$
  - $w(B(t_i)) = w(t_i) = w(H_i) + w(L_i)$

**Dimostriamo che**  $R_i = \sum_{j=1}^r u_{ij} \leq 2n + r(1 - 2b)$ ,  $C_j = \sum_{i=1}^r u_{ij} \leq 2n + r(1 - 2b) \forall i, j = 1, \dots, r$

Per costruzione di  $U$ , segue che la somma degli elementi di una sua riga  $i$  vale

$$R_i = \sum_{j=1}^r u_{ij} = |B(t_i)| = |H_i| + |L_i|.$$

Sia  $\min_{H_i} = \min \{w(B) \mid B \in H_i\}$ , vale la seguente maggiorazione di  $|H_i|$ :

$$|H_i| \leq w(H_i) / \min_{H_i} \quad (1)$$

ma per definizione di  $H_i$ , segue che  $\forall B_j \in H_i, (w(B_j) > 1/2)$  e quindi  $\min_{H_i} > 1/2$  da cui:

$$|H_i| \leq 2w(H_i) \quad (2)$$

(**nota:** l'uguaglianza vale nel caso  $w(H_i) = 0$ )

Poiché gli insiemi  $H_i$  e  $L_i$  costituiscono una partizione di  $B(t_i)$  segue che  $w(t_i) = w(B(t_i)) = w(H_i) + w(L_i)$ , quindi per la (2):

$$|B(t_i)| = |H_i| + |L_i| \leq 2[w(t_i) - w(L_i)] + |L_i| \quad (3)$$



Osserviamo che ogni bin in  $L_i$  contiene almeno una connessione il cui peso  $w$  per ipotesi appartiene all'intervallo  $[b,1]$  e dunque  $w(L_i) \geq |L_i|b$ . Possiamo così maggiorare il secondo membro della (3):

$$|H_i| + |L_i| \leq 2[w(t_i) - w(L_i)] + |L_i| \leq 2[w(t_i) - |L_i|b] + |L_i| = 2w(t_i) + |L_i|(1-2b) \quad (4)$$

Quindi, più è grande  $b$ , e minore è il numero di bin pesanti prodotti.

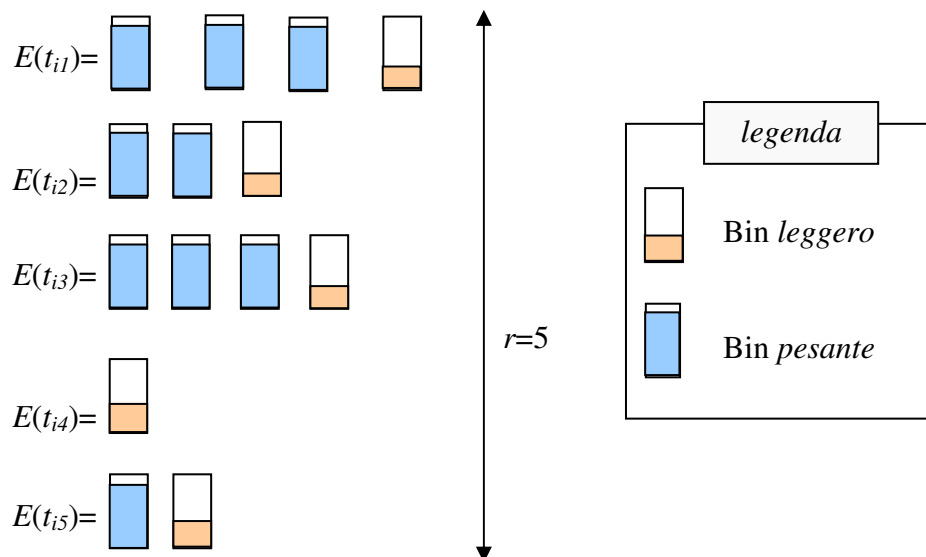
Per l'ipotesi fatta su  $E$ , cioè che ad ogni applicazione produce al più un bin leggero, segue che  $0 \leq |L_i| \leq r$ . Inoltre, per definizione di frame  $0 \leq w(t_i) \leq n$  e per ipotesi iniziale  $b \leq 1/2$ . Quindi :

$$|B(t_i)| = R_i = \sum_{j=1}^r u_{ij} = |H_i| + |L_i| \leq 2w(t_i) + |L_i|(1-2b) \leq 2n + r(1-2b) \quad (4)$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Allo stesso modo si dimostra che  $C_j = \sum_{i=1}^r u_{ij} \leq 2n + r(1-2b)$ .

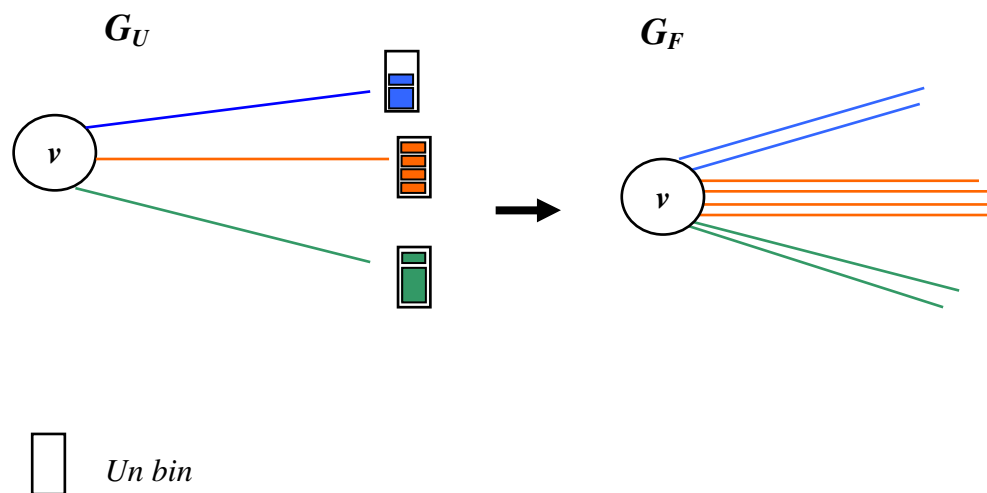
In figura sono rappresentati i bin prodotti dall'applicazione di  $E$  alle  $r$  liste  $t_{ij}$  della riga  $t_i$  di una generica matrice di traffico  $T$  con  $r=5$ .



$$t_i = \{ t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, t_{i4}, t_{i5} \}$$

Sia  $M$  il valore massimo della somma degli elementi di una linea (riga o colonna) di  $U$ . Per il teorema 2.3 segue che  $U$  può essere decomposta con  $M$  matrici di permutazione. Per quanto osservato nel capitolo precedente, a tale decomposizione corrisponde un edge coloring, con  $M$  colori, del multigrafo bipartito  $G_U=(I,O,E_U)$  di cui  $U$  è la matrice di incidenza. Vediamo ora come determinare da un EC su  $G_U$ , un WEC sul multigrafo delle connessioni  $G_F=(I,O,E)$ .

Sia  $v$  un vertice di  $G_U$ : poiché il multigrafo è stato colorato con un EC, segue che tutti gli archi incidenti su  $v$  hanno un colore diverso. Osserviamo che ad ogni arco  $a \in E_U$  colorato con  $c_a$  corrisponde esattamente un bin  $B$ . Coloriamo tutti gli archi  $e$  di  $G_F$  appartenenti a  $B$  con  $c_a$ . Poiché tali archi appartengono ad un bin, segue che la somma dei loro pesi è al più uno. Ripetendo il procedimento per tutti gli archi di  $G_U$  otteniamo un WEC per  $G_F$ .



*WEC di  $G_F$  indotto da un EC su  $G_U$*

Visto che i colori utilizzati per il WEC su  $G_F$  sono gli stessi utilizzati per l'EC di  $G_U$  segue che  $G_F$  ammette un WEC con  $M$  colori. Inoltre, avendo dimostrato che  $M \leq 2n+r(1-2b)$ , segue la tesi.

Dal teorema deriva il corollario:

**Corollario 3.1** [MRLiot02]

Se  $b > 1/2$  allora utilizzando l'algoritmo *Routing\_Solid\_Connection*,  $C(n,m,r)$  è riconfigurabile per  $m \geq n$ .

Questo risultato si ottiene subito dalla dimostrazione precedente. Infatti, se  $b > 1/2$ , per definizione di frame, ad ogni switch  $i$  d'ingresso giungono al più  $n$  richieste. Poiché ognuna pesa più di  $1/2$  l'euristica  $E$  che risolve il BPP porrà ogni connessione in un bin diverso, dunque

$$|B(t_i)| = R_i = \sum_{j=1}^r u_{ij} \leq n$$

(dove  $t_i$  sono le connessioni che arrivano allo switch  $i$ )

Lo stesso vale per un qualsiasi switch d'uscita e quindi la tesi è dimostrata.

Il corollario dimostra che l'algoritmo *Solid\_Connection* funziona anche per reti di Clos riconfigurabili in ambiente circuit switching, utilizzando il minimo numero possibile di switch centrali ( $m = M(n,r) = n$ ).

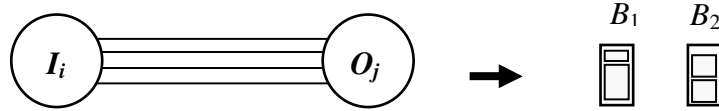
Seguono alcune nostre considerazioni sull'algoritmo *Routing\_Solid\_Connection*.

**Considerazioni sull'algoritmo *Routing\_Solid\_Connection*.**

Una prima osservazione è sull'euristica  $E$  che risolve il BPP. Essa ha il compito di far passare quante più connessioni possibili attraverso un medesimo link interno. Come abbiamo visto nella dimostrazione,  $E$  è applicata ad ogni lista di item  $t_{ij}$  cioè solo a connessioni tra gli switch  $i$  e  $j$ . Questo, in termini del multigrafo delle connessioni  $G_F$ , comporta che la somma del peso degli archi appartenenti ad un certo bin sia minore di uno su *entrambi* i nodi  $I_i$  e  $O_j$ .

Esempio:

$$t_{ij} = \{ (i,j,w_1), (i,j,w_2), (i,j,w_3), (i,j,w_4) \} \quad E(t_{ij}) = \{ B_1, B_2 \}$$



E' proprio grazie a questa caratteristica che l'algoritmo al passo 3 può risolvere il problema di TSA su  $U$  senza "preoccuparsi" dei pesi delle singole connessioni.

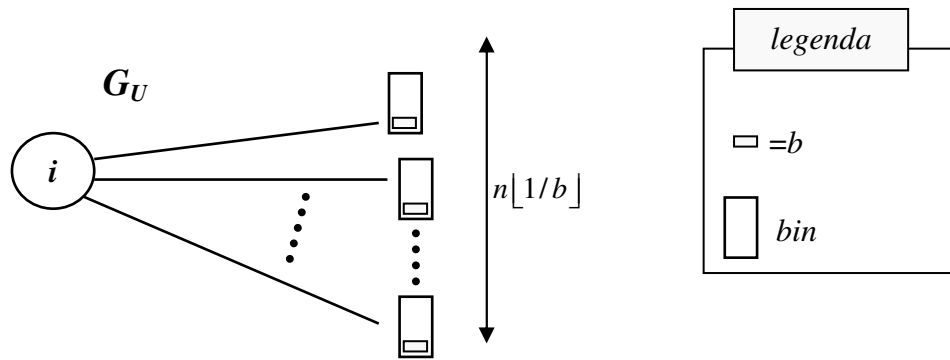
Lo svantaggio di tale modo di procedere sta nel limitare il "packing" a connessioni che coinvolgono gli stessi switch d'ingresso ed uscita, escludendo così altri "raggruppamenti" che potrebbero essere più efficienti. Questo "difetto", come visto nella dimostrazione, si manifesta tra l'altro, ad ogni applicazione di  $E$  con la produzione di un bin leggero che potenzialmente può contenere altre connessioni. Nel prossimo capitolo vedremo un modo per migliorare questo comportamento.

Una seconda osservazione è sulla dimostrazione del teorema 3.12. Come abbiamo già detto con il lemma 3.2, fissato  $b$  (il peso minimo che può assumere una connessione) il numero massimo di connessioni che possono arrivare ad uno switch  $i$  d'ingresso (uscita) sono al più  $n \lfloor 1/b \rfloor$ . L'algoritmo, nella peggiore delle ipotesi, utilizzerà per ogni connessione un bin, dunque, per il generico switch  $i$  un totale di  $n \lfloor 1/b \rfloor$  bin. Combinando questa considerazione con la tesi del teorema 3.12 si ottiene che se  $m \geq \min\{n \lfloor 1/b \rfloor, 2n+r(1-2b)\}$  allora  $C(n,m,r)$  è riconfigurabile vale a dire:

$$M(n,r) \leq \min\{n \lfloor 1/b \rfloor, 2n+r(1-2b)\} \quad (6)$$

Valutiamo quando la (6) vale  $n \lfloor 1/b \rfloor$ .

Se  $r \geq n \lfloor 1/b \rfloor$ , allora può accadere che un frame  $F$  contenga  $n \lfloor 1/b \rfloor$  connessioni tra uno switch  $i$  ed  $n \lfloor 1/b \rfloor$  switch d'uscita. In questo caso l'euristica inserirebbe ciascuna connessione in un bin diverso ottenendone  $n \lfloor 1/b \rfloor$ .



Sempre a riguardo della dimostrazione, notiamo che se  $E$  produce almeno un bin pesante, nella relazione (2) vale il minore stretto da cui deriva:

$$M(n,r) < 2n + r(1-2b) \quad (7)$$

La (7) non è vera quando non esistono bin pesanti, in altre parole quando ci sono solo  $|L_i|$  bin leggeri. Abbiamo già visto che  $0 \leq |L_i| \leq r$ , quindi dalla (6) e (7) segue:

$$M(n,r) \leq \min\{ n \lfloor 1/b \rfloor, \max(\lfloor 2n + r(1-2b) \rfloor, r) \} \quad (8)$$

Quest'ultimo risultato è utile nella successiva considerazione, in cui cercheremo di stabilire il legame con la congettura di Chung e Ross.

Nel paragrafo 3.1 abbiamo asserito che per dimostrare vera la tesi di Chung e Ross, è sufficiente verificare che, per qualsiasi frame, l'algoritmo di routing faccia sì che ogni link interno abbia un carico maggiore di  $1/2$ . Dalla dimostrazione del teorema 3.12 si evince che *Routing\_Solid\_Connection* è capace di soddisfare questo requisito solo per alcuni link e più precisamente, per quelli che

corrispondono ai bin pesanti. Purtroppo, per ogni switch del primo e terzo stadio, nel caso pessimo, rimangono  $r$  link con un carico che al più vale  $\frac{1}{2}$ . La congettura quindi è in qualche misura confermata se  $n$  assume valori “sufficientemente” più grandi di  $r$ . Per meglio evidenziare quanto detto, consideriamo due esempi particolari: il primo con  $b \rightarrow 0$  mentre il secondo con  $b=1/2$ .

### **Esempio $b \rightarrow 0$**

Nel caso  $E$  crei almeno un bin pesante, dalla (7) segue che  $M(n,r) \leq 2n+r-1$ .

Inoltre, poiché  $n \geq 2$  e  $n \lfloor 1/b \rfloor \rightarrow \infty$ , dalla (8) si ottiene

$$M(n,r) \leq (2n-1)+r$$

In conclusione se  $b=0$ , sono necessari esattamente  $r$  switch centrali in più rispetto a quanto suggerito dalla congettura

### **Esempio $b=1/2$**

In questa situazione ogni bin leggero pesa esattamente  $\frac{1}{2}$ . Utilizzando la (8) otteniamo che

$$M(n,r) \leq \min\{n \lfloor 1/b \rfloor, \max(\lfloor 2n+r(1-2b) \rfloor, r)\} = 2n$$

Per  $b=1/2$  lo “spreco” dovuto agli  $r$  bin leggeri si fa sentire poco ed il numero di switch centrali che solid connection richiede è molto vicino a quello “sperato” .

### **Confronto dei teoremi 3.11 e 3.12**

Consideriamo il caso  $b=0$ . I limiti superiori di  $M(n,r)$  forniti dai due teoremi sono:

$$M(n,r) \leq \left\lceil \frac{(41n - E_n)}{16} \right\rceil \text{ dove, } E_n = \begin{cases} 8 & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 5 & \text{se } n \equiv 1 \pmod{4} \\ 6 & \text{se } n \equiv 2 \pmod{4} \\ 3 & \text{se } n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \quad (1)$$

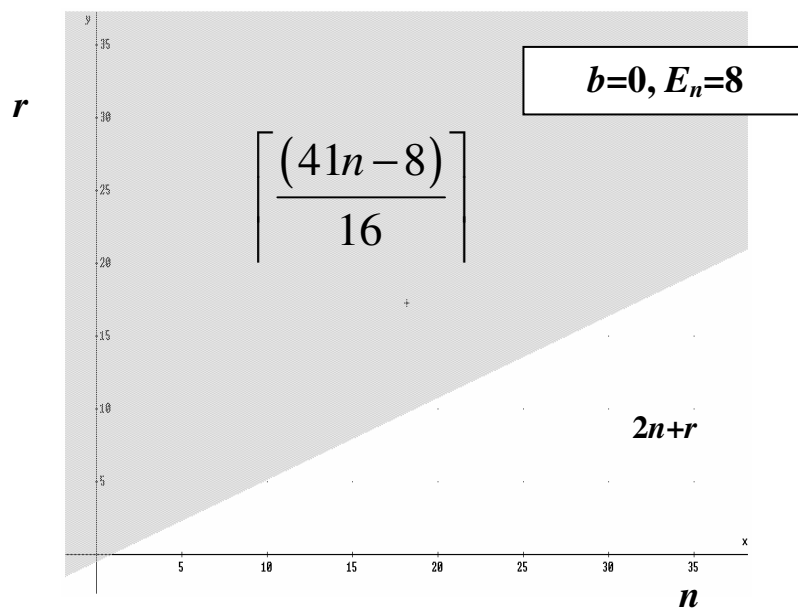
$$M(n,r) \leq 2n+r \quad (2)$$

Come si vede dalle formule, la (2) aumenta con  $r$  mentre la (1) ne è indipendente. D'altra parte nella (1) il parametro  $n$  ha un coefficiente maggiore rispetto alla (2). La (1) quindi dà un limite superiore ad  $M(n,r)$  migliore nel caso di reti di Clos con molti switch d'ingresso (uscita) e "pochi" inlet (outlet). Un tipico esempio di una rete con queste caratteristiche è quella di Benes che ricordiamo essere caratterizzata dai parametri  $n=2$  ed  $r=2^k$  (con  $k$  intero positivo). Viceversa la (2) offre una migliore approssimazione di  $M(n,r)$  per reti con  $n$  grande ed  $r$  piccolo come ad esempio le reti di Benes complementari.

Più precisamente, confrontando analiticamente le due formule, otteniamo che il primo upper bound è migliore quando:

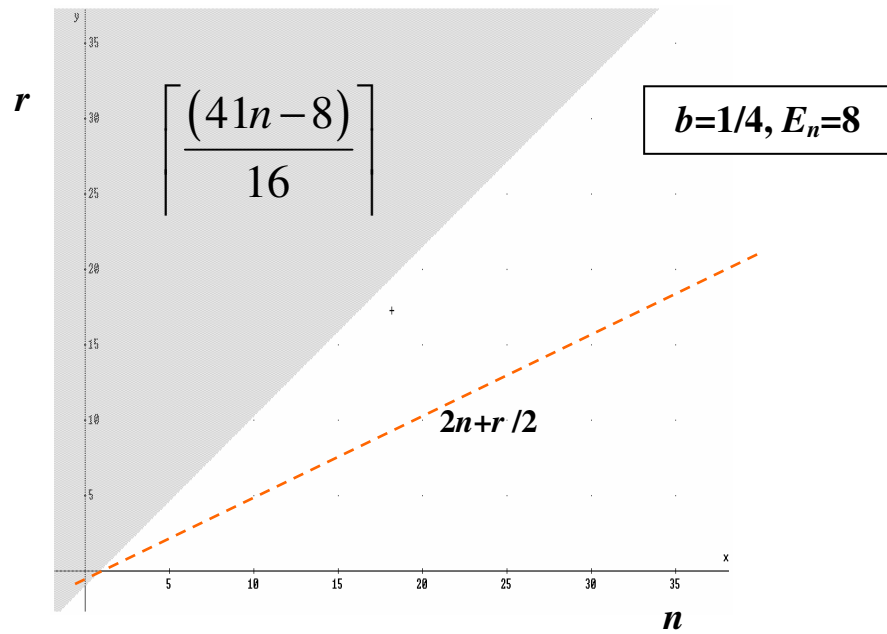
$$\left\lceil \frac{(41n - E_n)}{16} \right\rceil \leq 2n+r$$

Di seguito riportiamo graficamente il risultato del confronto: in grigio ed in bianco sono evidenziate le coppie  $(n,r)$  in cui rispettivamente la (1) e la (2) rappresentano il miglior upper bound ad  $M(n,r)$  (per semplicità, abbiamo ipotizzato che  $E_n=8$ ).



**Nota:** Per avere un “effetto più visibile” abbiamo considerato i parametri  $n$  ed  $r$  come se fossero numeri reali invece che interi.

Come abbiamo già osservato all’aumentare di  $b$ , la (2) ottiene dei vantaggi. Nella seguente figura mostriamo il confronto tra i due limiti per il caso con  $b=1/4$ . La retta rossa evidenzia la “frontiera” del caso precedente con  $b=0$



Per gli altri possibili valori di  $E_n$  (5,6,3) si ottengono risultati molto simili che non riportiamo.

### 3.4.2 Casi discreto e $k$ -rate.

Vediamo ora alcuni risultati riguardanti i casi discreto e  $k$ -rate. Per quanto riguarda il caso discreto non se ne conoscono di specifici. Esiste comunque un suo sottocaso, chiamato *discreto ristretto* e definito in [MRLiZh99], che ancora una volta conferma la congettura di Chung e Ross.

#### **Definizione 4.4 Ambiente multirate discreto ristretto**

Se il peso di ogni connessione appartiene all’insieme finito  $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  tale che

- $w_{h+2} | w_{h+1}, w_{h+3} | w_{h+2}, w_k | w_{k-1}$
- $1 \geq w_1 > w_2 > \dots > w_h > 1/2 \geq w_{h+1} > w_{h+2} > \dots > w_k > 0$ .



parliamo di *ambiente discreto ristretto*.

In [MRLiZh99] si è determinato che in questo caso particolare il valore di  $M(n,r)$  è limitato superiormente da  $2n-1$ . Più precisamente si dimostra che vale il teorema:

**Teorema 3.14** [MRLiZh99]

Nel caso discreto ristretto la rete di Clos  $C(n,2n-1,r)$  è riconfigurabile.

**Dimostrazione**

Sia  $F$  un frame per una rete di Clos simmetrica con  $2n-1$  switch centrali. Dividiamo la dimostrazione in due casi :  $k=h$  e  $k \geq h+1$

*Caso  $k=h$*

Ogni connessione ha un peso strettamente maggiore di  $1/2$ . Il caso è equivalente a quello circuit switching, quindi la rete  $C(n,2n-1,r)$  è sicuramente riconfigurabile, visto che basterebbero  $n$  switch centrali.

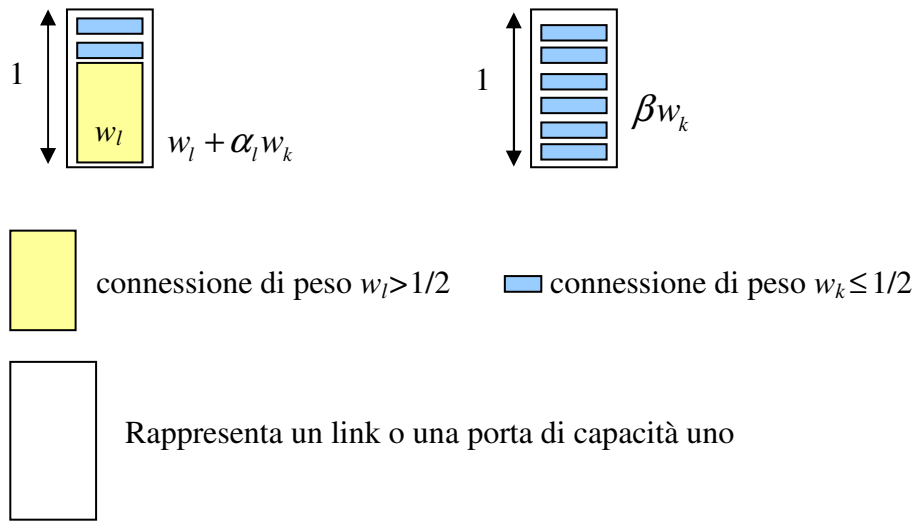
*Caso  $k \geq h+1$*

La dimostrazione è effettuata per induzione su  $k$ . L'ipotesi induttiva è che se le connessioni assumono un peso appartenente all'insieme  $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$  allora  $C(n,2n-1,r)$  è riconfigurabile. Prima di procedere stabiliamo alcune notazioni:

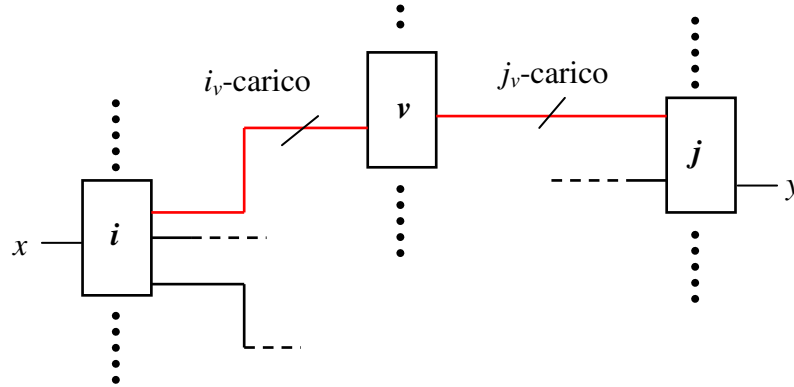
Siano  $\alpha_l$  e  $\beta$  due interi tali che:

$$\begin{cases} w_l + \alpha_l w_k \leq 1 < w_l + (\alpha_l + 1) w_k \\ \beta w_k \leq 1 < (\beta + 1) w_k \end{cases} \quad (1)$$

Sai  $F$  un frame per  $C(n,m,r)$ : dalla definizione di ambiente discreto ristretto segue che il carico *massimo* di una porta  $x$  vale  $w_l + \alpha_l w_k$  se in  $x$  è presente una connessione di peso  $w_l > 1/2$ , oppure  $\beta w_k$  in tutti gli altri casi. Ricordando che anche i link interni hanno capacità uno, analogamente a quanto appena detto per le porte, il massimo carico di un link vale  $w_l + \alpha_l w_k$  o  $\beta w_k$ .



Siano  $i$ ,  $j$  e  $v$  rispettivamente uno switch d'ingresso, uno di uscita ed uno intermedio. Indichiamo con  $i_v$ -carico il carico del link  $(i,v)_1$  e con  $j_v$ -carico quello del link  $(v,j)_2$



Sia  $R$  una configurazione compatibile con  $C(n,m,r)$ , diremo che  $v$  è  $i(w)$ -saturato, se  $i_v$ -carico  $> (1-w)$ . In questo caso significa che il link  $(i,v)_1$  non può essere attraversato da nessun cammino con capacità maggiore o uguale a  $w$ . Inoltre dalle (1) segue che se  $v$  è  $i(w_k)$ -saturato vale:

$$i_v\text{-carico} = \begin{cases} w_l + \alpha_l w_k & \text{nel caso sia presente un cammino con peso } w_l > 1/2 \\ \beta w_k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In modo analogo definiamo che  $v$  è  $j(w)$ -saturato.

Osserviamo che se una rete è in una configurazione  $R$  per cui uno switch intermedio  $v$  è  $i(w)$ -saturato e  $j(w)$ -saturato,  $v$  non potrà essere attraversato da nessun cammino  $(i, v, j, w)$ .

*Caso base,  $k=1$*

Tutte le connessioni hanno il medesimo peso  $w_k$ . Ci siamo ricondotti al caso 1-rate. Si può dimostrare (si veda il prossimo teorema) che anche in questo caso sono sufficienti  $n$  switch intermedi.

*Caso induttivo*

Sia  $F'$  la lista di connessioni di  $F$  con pesi appartenenti all'insieme  $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ . Per ipotesi induttiva segue che  $F'$  è realizzabile da una configurazione  $R'$  compatibile con la rete  $C(n, 2n-1, r)$ . Rimangono da realizzare le connessioni di peso minimo  $w_k$ . Dimostriamo che, in questa situazione, possiamo determinare un cammino  $p$  che realizzi una connessione  $(x, y, w_k)$  e tale che  $R' \cup p$  sia ancora compatibile con  $C(n, 2n-1, r)$ .

La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che nella configurazione  $R'$  esistano  $n$  switch centrali  $i(w_k)$ -saturi.

Allora il frame  $F'$  è tale che lo switch  $i$  ha gli  $n$  inlet ciascuno con carico  $w_l + \alpha_l w_k$  o  $\beta w_k$ . In questa situazione però il frame originale  $F$  non sarebbe più compatibile con la rete poiché dalla (1) segue che la connessione  $(x, y, w_k)$  non può appartenere a nessuno degli inlet senza contraddire il vincolo di compatibilità. Abbiamo così ottenuto una contraddizione poiché  $F$  è un frame per ipotesi iniziale e dunque sicuramente compatibile con  $C(n, 2n-1, r)$ . Analogamente possiamo dimostrare che non possono esistere  $n$  switch centrali  $j(w_k)$ -saturi.

In conclusione nella configurazione  $R'$  possono esistere al più  $n-1$  switch intermedi  $i(w_k)$ -saturi ed altrettanti  $j(w_k)$ -saturi, dunque tra i  $2n-1$  ne rimane sempre uno disponibile per la connessione  $(x, y, w_k)$ .

Presentiamo di seguito alcuni limiti superiori ad  $M(n,r)$  in ambiente  $k$ -rate. In questo ambiente  $M(n,r)$  viene indicato con  $M^k(n,r)$ .

Il primo che vediamo riguarda il caso 1-rate ed è dovuto a Chung e Ross [MRChRo91]. Gli autori dimostrano che se le connessioni possono assumere un solo un valore, qualunque esso sia, il problema è riconducibile al caso CS: in altre parole,  $M(n,r)=n$ .

**Teorema 3.15**[MRChRo91]

$C(n,n,r)$  è 1-rate riconfigurabile.

**Dimostrazione**

Sia  $w$  il peso delle connessioni. Sappiamo che ogni inlet (outlet) ha capacità uno. Poiché uno switch d'ingresso (uscita) ha  $n$  inlet, allora il grado massimo del multigrafo  $G_F$  è  $n \lfloor 1/w \rfloor$ . Utilizziamo CAP dividendo ogni nodo di  $G$  in  $\lfloor 1/w \rfloor$  vertici ciascuno di grado al più  $n$ . Per il lemma di Konig si può costruire un EC minimo sul multigrafo splittato con  $n$  colori. Osserviamo che la colorazione ottenuta induce un WEC sul multigrafo delle connessioni originale. Infatti su ogni vertice  $v$  di  $G$  incidono al più  $\lfloor 1/w \rfloor$  archi di uno stesso colore per un peso totale di  $w \lfloor 1/w \rfloor$  che è minore o uguale ad uno.

Dal teorema 3.14 segue il corollario:

**Corollario 3.2**[MRLiZh99]

$C(n,2n-1,r)$  è 2-rate riconfigurabile.

L'ultimo risultato che presentiamo riguarda il caso  $k=3$ .

**Teorema 3.16**

$C(n, \lceil 7n/3 \rceil, r)$  è 3-rate riconfigurabile.

La dimostrazione, che è abbastanza lunga, si articola in più casi distinguendo in che relazione stanno i tre possibile valori che può assumere il peso di ogni connessione. Per i dettagli si veda [MRLiZh99].

Dal teorema precedente segue il corollario:

**Corollario 3.3** [MRLiZh99]

$C(n,2n,r)$  è riconfigurabile se il peso delle connessioni appartiene all'insieme  $\{w_1, w_2, w_3\}$  con  $w_1 > w_2 > w_3 > 1/4$ .

### 3.4.3 Limite inferiore

Il problema della determinazione di un limite inferiore a  $M(n,r)$  non è stato molto studiato. L'unico risultato è il seguente:

**Teorema 3.17** [MRGaHw98]

$$M(n,r) \geq \frac{11}{9}n$$

A tale limite si è arrivati dimostrando con un controesempio che  $M^3(n,r) \geq (11/9)n$ . Osserviamo infatti che se una rete di Clos  $C(n,m,r)$  realizza ogni frame di un certo insieme  $A$  di frame, allora a maggior ragione realizzerà anche quelli di un suo qualsiasi sottoinsieme  $B \subseteq A$ . Poiché  $\forall k \geq 1$  intero vale  $\Phi(n,r) \supseteq \Phi^{k+1}(n,r) \supseteq \Phi^k(n,r)$ , segue che  $M(n,r) \geq M^{k+1}(n,r) \geq M^k(n,r)$  e che  $M(n,r) \geq M^3(n,r) \geq (11/9)n$ . Dove con  $\Phi^k(n,r)$  intendiamo i frame per una  $C(n,m,r)$  nel caso  $k$ -rate.

### 3.4.4 Sintesi dei risultati

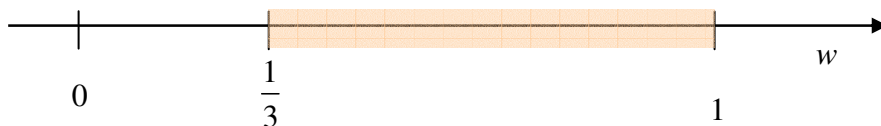
Riassumiamo di seguito i principali risultati che abbiamo presentato.

<b>Autori, anno pubblicazione</b>	<b>Limite superiore <math>M(n,r)</math></b>	<b>Peso delle connessioni</b>
<i>R. Mellen J. Turner, 1989</i>	$3n-1$	$w \in (0,1]$
<i>D. Z. Du, B. Gao, F.K,Hwang, J.H. Kim 1998</i>	$\left\lceil \frac{(41n - E_n)}{16} \right\rceil$ $E_n=8,5,6,3$	$w \in (0,1]$
<i>Liopoulos, 2002</i>	$2n+r(1-2b)$	$w \in [b,1]$ con $0 < b \leq 1/2$
<i>S. P. Chung K. W. Ross, 1991</i>	$n$	1-rate
<i>G. H. Lin D. Z. Du, X. D. Du, G. Xue, 1999</i>	$2n-1$	2-rate
<i>G. H. Lin D. Z. Du, X. D. Du, G. Xue, 1999</i>	$\lceil 7n/3 \rceil$	3-rate
<i>G. H. Lin D. Z. Du, X. D. Du, G. Xue, 1999</i>	$2n-1$	Discreto ristretto

Come si vede dalla tabella sia il caso 2-rate che quello discreto ristretto confermano la congettura di Chung e Ross. Per quanto riguarda il caso continuo, esistono due sottoinsiemi di  $(0,1]$  in cui è verificata:  $(1/3,1]$  e  $(0,1/2]$ .

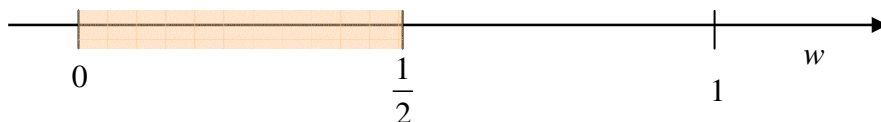
(Dal lemma 3.5)


(*G. H. Lin D. Z. Du, X. D. Du, G. Xue, 1999*)



(Dal lemma 3.1)

(*D. Z. Du, B. Gao, F.K,Hwang, J.H. Kim 1998*)



 Valori di  $w$  per cui è vera la congettura

Notiamo che nel caso più generale in cui  $w \in (0,1]$ , i limiti superiori trovati sono tutti strettamente maggiori di  $2n-1$ . In particolare sottolineiamo che nessuno ad oggi è riuscito a dimostrare che esiste almeno una coppia di valori  $\bar{n}, \bar{r}$  per cui la rete  $C(\bar{n}, 2\bar{n}-1, \bar{r})$  sia riconfigurabile nel caso continuo.

Nel prossimo capitolo presenteremo un nuovo algoritmo che, tra l'altro, ci consentirà di dimostrare che esistono infinite  $C(n,m,r)$  riconfigurabili con  $m < 2n-1$ ; questo suggerirà una critica all'ipotesi di Chung e Ross.