Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Anno Accademico 2003-2004

Tesi di Laurea Specialistica

Transizioni chirali in QCD con fermioni nell'aggiunta

Candidato:
Francesco Basile

Relatore:
Prof. Ettore Vicari

Indice

Ringraziamenti

Volevo usare questa pagina per comunicare che sono stato felice in questi anni di vita universitaria. Mi sono trovato bene con le persone con cui ho vissuto, con quelle con cui ho lavorato. Non potendo citare per nomi tutti, parlerò solo di alcuni “rappresentanti”, sperando che basti ringraziarne uno per ringraziarne cento. Grazie ad Elisa, la mia ragazza, per ringraziare le persone a cui ho voluto bene, Francesco, il compagno di studi e di vita di questi anni, per le persone con cui ho vissuto, ed Ettore Vicari, il mio relatore, per le persone con cui ho lavorato e che mi hanno fatto gustare quello che ho fatto.

Soprattutto grazie ai miei genitori, perché se sono felice è perché “mi ci hanno disegnato”.

Grazie,
Francesco

Introduzione

All'avanzare della fisica le sue frontiere si espandono; una delle frontiere in cui l'esplorazione è ancora attiva è lo studio della materia in condizioni di densità o temperatura estrema. Analisi sperimentali e studi teorici hanno mostrato l'esistenza di diverse transizioni di fasi, lasciando intuire un diagramma di fase, nella densità e nella temperatura, tutt'altro che banale.

I dati riguardanti queste transizioni sono per ora molto difficili da ottenere: i dati sperimentali possono essere ricavati dallo studio delle stelle compatte o dagli esperimenti sugli acceleratori di ioni pesanti ad altissime energie, ma non sono molti, e riguardano solo alcuni punti del diagramma; altri dati possono essere ricavati tramite simulazioni numeriche su reticolo, queste simulazioni funzionano bene a densità nulle, ma quando quest'ultima viene fissata a valori diversi da zero i metodi messi a punto finora diventano computazionalmente proibitivi.

Questa difficoltà di ottenere i dati fa sì che la conoscenza che abbiamo di questo diagramma sia ancora frammentata: sappiamo che in certe condizioni di temperatura avviene il deconfinamento della simmetria di colore o che avviene la restorazione della simmetria chirale, sappiamo che a certe densità di materia è presente il fenomeno della superconduttività di colore, ma non conosciamo esattemente né le condizioni in cui avvengono questi fenomeni nè le modalità.

Queste premesse fanno capire che al momento attuale non è facile portare avanti la ricerca in questo settore, e si propongono sostanzialmente due linee di pensiero: confrontarsi in maniera diretta col problema e cercarlo di risolverlo per via analitica o numerica che sia (per quanto difficile sia) o prendere il problema alla larga, studiando delle teorie che hanno alcune caratteristiche in comune con quella di interesse ma sono più facilmente investigabili (toy model), e cercando successivamente di fare uso delle conoscenze messe a punto per capire il problema originale.

Questo lavoro segue la seconda teoria di pensiero. Il toy model che verrà studiato è la cromodinamica quantistica (QCD) con fermioni nella rappresentazione aggiunta della simmetria di colore. Il motivo che principalmente rende interessante lo studio di questa teoria è che non si incontra il problema che invalidava le analisi numeriche su reticolo a densità non nulla, anche se si pensa possa essere interessante anche per capire il rapporto tra la transizione di deconfinamento e quella di restorazione della simmetria chirale. Il problema che siamo interessati a studiare è quello di costruire una teoria effettiva per descrivere la transizione chirale a temperatura finita e capire se quest'ultima è una transizione di prima o di seconda specie.

Il risultato che otterremo è che la transizione chirale è una transizione di prima specie.

Lo schema del lavoro è il seguente.

- Il primo capitolo conterrà la parte introduttiva sulle problematiche e sugli strumenti: verrà introdotto il problema delle transizioni chirali, e delle transizioni a temperatura finita in generale; poi si spiegherà come mai si studia la QCD con fermioni nell'aggiunta e si scriverà una teoria effettiva per il condensato di diquark.

- Il secondo capitolo conterrà la parte originale del lavoro: verrà fatta un'analisi del gruppo di rinormalizzazione della teoria, primo il calcolo ad un loop, e poi un'estensione a 5 loop del calcolo precedente nel caso di anomalia trascurabile.Lo schema usato è quello della sottrazione minimale (MS) senza $varepsilon$-expansion. I dati a 5 loop verranno analizzati tramite resommazione di Padé-Borel.

Le appendici contengono dei calcoli specifici usati nel secondo capitolo.

Capitolo 1

Teorie QCD like e teorie effettive

1.1 Un po' di QCD

La cromodinamica quantistica è la teoria di gauge che descrive le interazioni forti; le particelle fondamentali sono i quark (fermioni di dirac di spin $\frac{1}{2}$), che sono i campi di materia, e i gluoni (bosoni di spin 1), che sono il campo di gauge della teoria. I campi spinoriali dei quark sono caratterizzati, oltre che dagli indici di Dirac, anche da un indice di sapore (o flavour) e uno di colore. Si indica con N_f il numero di sapori possibili e con N_c il numero di colori. La simmetria di gauge della teoria è $SU(N_c)$.

La lagrangiana di una teoria sì fatta è:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(x) F^{a\mu\nu}(x) + \overline{\psi}(x) \left(i\gamma^\mu D_\mu - M \right) \psi(x)$$

dove il primo termine è il tensore di curvatura, ed è funzione dei soli campi di gauge (a è l'indice di gauge)[1]:

$$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A_\mu b(x) A^c_\nu(x)$$

dove il termine D_μ è invece la covariata derivante definita da

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i g t_a A$$

[1]Gli f^{abc} sono le costanti di struttura del gruppo definite da $[t_a, t_b] = i f_{abc} t^c$, dove i t_a sono i generatori del gruppo di gauge. Queste ultime possono essere scelte in forma hermitiana $N_c \times N_c$ a traccia nulla, e con normalizzazione $Tr\ t_a t_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}$.Con g viene indicata la costante di accoppiamento.

La matrice M è la matrice di massa, essa è invariante rispetto alle simmetrie di gauge e di lorentz, e nel modello semplice di sola QCD (priva cioé di altre interazioni) può essere scelta diagonale negli indici di flavour senza perdere di generalità[2]. Nel caso in cui la matrice di massa sia proporzionale all'identità la teoria acquista una simmetria globale $U(N_f)$.

In natura sono presenti quark di 6 differenti flavour (up, down, strange, charm, bottom e top) e di 3 colori diversi. I quark sono descritti da una rappresentazione fondamentale del gruppo di gauge, e i bosoni invece da una rappresentazione aggiunta[3]:

$$\begin{aligned} &\psi(x) \to e^{igt_a \varepsilon^a(x) \psi(x)} \\ &A^a_\mu \to \left(e^{igt^A_\alpha \varepsilon^\alpha(x)}\right)^\alpha_\beta A^\beta_\mu + \partial_\mu \varepsilon^\alpha \end{aligned}$$

In alcuni casi può essere utile considerare anche teorie realistiche con un numero minore di quark, per esempio per descrivere solo interazione a bassa energia posso trascurare il contributo dei quark più pesanti e considerare solo up e down. Ha senso quindi considerare teorie con N_f generico. Per altri motivi può essere interessante anche lo studio di teorie con N_c generico.

Come prima avevo accennato, nel caso in cui la matrice di massa sia diagonale c'è un'ulteriore simmetria globale

$$\psi(x) \to e^{i\theta^a_V \tau_a} \psi(x)$$

cioé i fermioni sono invarianti sotto una $U(N_f)$ globale e sono in una rappresentazione fondamentale di questo gruppo di simmetria. L'indice V sta ad indicare che la corrente è di tipo vettoriale, in contrapposizione alla corrente assiale che verrà introdotta dopo. In questo caso si può scrivere la lagrangiana come:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu}(x) F^{a\mu\nu}(x) + \sum_{f=1}^{N_f} \left(\overline{\psi}_f i\gamma_\nu D_\nu \psi_f + m_q \overline{\psi}_f \psi_f\right)$$

[2]Questa scelta può non essere conveniente, per esempio abitualmente non viene fatta nel modello standard.

[3]I generatori dell'aggiunta sono

$$\left(t^A_\alpha\right)_{\beta\gamma} \equiv -if_{\alpha\beta\gamma}$$

Si può decomporre il gruppo $U(N_f) \to U_B(1) \otimes SU(N_f)$ dove $U_B(1)$ è il sottogruppo generato dall'identità, la cui carica associata conservata è per l'appunto il numero barionico.

Nel caso di fermioni di Dirac a massa nulla, esiste, apparentemente, un'altra simmetria:

$$\psi(x) \to e^{i\theta_V^\alpha \tau_\alpha + i\gamma_5 \theta_A^\alpha \tau_\alpha} \psi(x)$$

Apparentemente il gruppo di simmetria diventerebbe un $U_V(N_f) \otimes U_A(N_f)$. In realtà questa simmetria è presente nella lagrangiana solo a livello classico; essa non è presente nella teoria quantistica in quanto rotta da effetti non perturbativi. Quello che si ottiene è (per una trattazione cfr. [Wei96])

$$\begin{aligned} U_V(N_f) \otimes U_A(N_f) = U_B(1) \otimes U_A(1) \otimes SU_V(N_f) \otimes SU_A(N_f) \to \\ \to Z_A(N_f) \otimes U_B(1) \otimes SU_V(N_f) \otimes SU_A(N_f) \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.2 Rottura di simmetria chirale, un'introduzione storica

Tra la fine degli anni '50 e l'inizio degli anni '60 prese piede l'idea della rottura spontanea di simmetria chirale per spiegare la fisica dei pioni. Il discorso ebbe inizio nel 1957 quando Goldberger e Treiman ricavarono l'omonima legge che metteva in relazione i decadimenti elettrodeboli del pione con lo scattering pione-nucleone. Una spiegazione di questo fenomeno fu presentata solo nel '62 in un lavoro di Nambu e Jona-Lasinio, in cui proposero che la presenza di bosoni massless o quasi massless fosse sintomo di una rottura spontanea di simmetria. Quasi contemporaneamente ('61) Goldstone proponeva la congettura secondo cui la rottura spontanea di una simmetria globale genera sempre dei bosoni massless, congettura che fu provata l'anno successivo da Goldstone, Salam e Weinberg. Qualche anno dopo questo teorema fu anche dimostrato con un'impostazione puramente assiomatica[4].

Sempre nei primi anni '60, in seguito ai lavori di Gell-Mann e Ne'eman, prese piede l'idea di estendere la simmetria di $SU(2)$ di isospin ad una simmetria più grande, ma meno esatta, e di raggruppare quindi i barioni e i mesoni noti secondo rappresentazioni irriducibili di questo $SU(3)$. Dopo il successo della rottura spontanea di simmetria $SU(2) \otimes SU(2)$ chirale, fu naturale supporre che le interazioni forti fossero invarianti rispetto ad una

[4] Per una dimostrazione si veda [Swi70] e le referenze presenti.

simmetria approssimata $SU(3) \otimes SU(3)$ rotta spontaneamente al sottogruppo $SU(3)$ di Gell-Mann e Ne'eman. Il successo di questa teoria fu confermato dalla predizione dell'esistenza e della massa del mesone pseudoscalare η. Furono trovate anche relazioni che mettevano in relazione le masse dei mesoni (come la relazione di Gell-Mann Okubo $3m_\eta^2 + 2m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2 = 2m_{K^+}^2 + 2m_{K^0}^2$), o le masse dei mesoni con quelle dei quark.

Questa è un'introduzione storica al problema delle rotture spontanee di simmetrie in QCD. Tuttavia, benché i rusultati positivi fossero parecchi, mancavano (e tuttora mancano!) ancora alcuni tasselli per avere una conoscenza completa dell'argomento: nel discorso precedente è stata fatta l'assunzione che la simmetria chirale fosse rotta spontaneamente (nel caso di massa nulla), ma non si è spiegato perché questo fenomeno avvenga, né quali siano le condizioni in cui avviene. Altre questioni restarono aperte; per esempio se fosse possibile ricreare (o trovare in natura) delle situazioni in cui questa simmetria fosse restaurata, o ancora quale fosse il legame tra il confinamento e la simmetria chirale.

Alcune di queste domande sono ancora argomento di studio, altre hanno avuto risposte, anche grazie a strumenti provenienti da discipline diverse dalla fisica delle alte energie.

1.3 Teorie di campo a temperatura finita

In questo paragrafo introduco brevemente il discorso delle teorie di campo a temperatura finita (per una review cfr. [Zin00]). Questa può essere considerata come la naturale generalizzazione relativistica della meccanica quantistica non relativistica a temperatura finita.

Il discorso può essere impostato in due modi, a seconda di cosa si è interessati a studiare: una teoria a tempo reale o a tempo immaginario. La prima porta il nome di tecnica di Matsubara (o Euclidea) la seconda invece di Keldysh (o a tempo reale). Le tecniche sono completamente equivalenti, ma si preferisce usare la seconda quando si è interessati alla dinamica dei sistemi, e la prima invece quando si è interessati solamente alle proprietà statiche del sistema. In questo contesto sono interessato solo a proprietà statiche e quindi non parlerò del formalismo di Keldysh (per una review cfr. [Smi96])

Descrivo ora brevemente il formalismo di Matsubara. Considero come esempio la teoria di un campo scalare reale descritto dall'hamiltoniana $H\left[\phi(x), \Pi(x)\right]$. La funzione di partizione a temperatura T può essere scritta come

$$Z = Tr\ \left[e^{-\beta H}\right] = \int \mathcal{D}\phi(x) \mathcal{K}\left[\phi(x), \phi(x), \beta\right] \tag{1.2}$$

dove $\mathcal{K}$ è l'evolutore temporale al tempo immaginario $\beta = \frac{1}{T}$:

$$\mathcal{K}\left[\phi'(x), \phi(x), \beta\right] = \sum_n \Psi_n^*[\phi(x)]\Psi_n[\phi(x)]e^{-\beta E_n}$$

dove Ψ_n sono gli autostati dell'hamiltoniana. Il lato destro della (1.2) può essere scritto come un path-integral euclideo:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi(x,\tau) exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int dx \mathcal{L}\left[\phi(x,\tau)\right]\right\} \tag{1.3}$$

sui percorsi con la condizione al contorno periodica nel tempo immaginario

$$\phi(x, \tau + \beta) = \phi(x, \tau) \tag{1.4}$$

Il valore di aspettazione di un operatore $\mathcal{O}$ a temperatura $T = \frac{1}{\beta}$ si scrive quindi come

$$\langle\mathcal{O}\rangle_T = Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi(x,\tau) \mathcal{O}\left[\phi(x,\tau)\right] exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int dx \mathcal{L}\left[\phi(x,\tau)\right]\right\} \tag{1.5}$$

Le regole per sviluppare la teoria perturbativa sono le stesse del caso a temperatura nulla, la differenza sostanziale sta nella (1.4), che quantizza la componente temporale degli impulsi[5]:

$$p_0^{(n)} = 2\pi i n T \tag{1.7}$$

[5] Le condizioni (1.4) e quindi 1.7 derivano dalle condizioni di Kubo Martin e Schwinger (KMS), che a loro volta derivano sostanzialmente da richiedere che in teoria di campo valga ciò che vale anche in meccanica quantistica, cioé che il generatore delle traslazioni temporali sia lo stesso operatore che compare nell'operatore di densità [Haa92]. In formule si richiede che le osservabili siano scrivibili come

$$\langle\mathcal{O}\rangle_T = \langle\mathcal{O}\rho\rangle$$

con ρ operatore di densità

$$\rho \equiv e^{(-\phi - \beta H)} \equiv \frac{e^{-\beta H}}{Tr\ e^{-\beta H}} \tag{1.6}$$

Per una trattazione più dettagliata si veda [Qui99].

con n intero, cioé bisogna sostituire all'integrale sugli impulsi una somma

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(p) \longrightarrow T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f\left(2\pi i n T, \mathbf{p}\right)$$

Questo ragionamento portato avanti sui campi scalari reali è esportabile su qualunque campo bosonico. Nelle teorie che coinvolgono fermioni bisogna invece imporre condizioni antiperiodiche sui loro campi, e per loro le condizioni di quantizzazione sugli impulsi diventano:

$$p_0^{(n)} = i\pi(2n+1)T \tag{1.8}$$

Dalla (1.7) si intuisce facilmente che nello scegliere una $T \neq 0$ si introduce una nuova scala di energie nella teoria: i modi di Matsubara fermionici e quelli bosonici $\psi^{(n)}$ con $n \neq 0$ avranno delle scale di energie separate per energie dell'ordine di T dal modo zero bosonico. Questo in alcuni casi può portare a trascurare tutti i modi tranne il modo zero, ottenendo così una riduzione dimensionale (DR) $d \to d-1$ a tutti gli effetti.

Un'altra maniera per vedere questo procedimento è quello di considerare l'accendersi della temperatura come un cambiamento dello spazio su cui è definita la teoria

$$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1} \times S_1 \tag{1.9}$$

dove la dimensione di S_1 è proporzionale a $1/T$, e la riduzione dimensionale consiste nel trascurare tutto quello che succede a dimensioni minori di $1/T$. Ci sono principalmente due situazioni in cui ciò si può fare:

- Quando la temperatura è molto maggiore di qualunque massa, e questo è il caso della high temperature dimensional reduction

- Quando il sistema è in prossimità di una transizione continua: la lunghezza di correlazione del sistema diverge, e la fisica è dominata dei modi a grande lunghezza d'onda. In queste condizioni sistemi che sono molto differenti gli uni dagli altri, ma con la stessa simmetria, possono essere descritti dallo stesso modello.

Il precedente discorso euristico può essere raffinato. Facendo un'espansione di fourier nel tempo immaginario delle funzioni d'onda si ottiene

$$\phi(x,t) = \phi(x) + \chi(x,t) \equiv \phi(x) + \sum_{n\neq 0} e^{i2\pi nTt}\phi_n(x)$$

Cioè vedo che una teoria ad un campo $d+1$ dimensionale è equivalente a una teoria d dimensionale con infiniti campi scalari. Posso definire la mia azione effettiva come l'azione reale integrata sui modi χ:

$$e^{-S_\beta[\phi_0]} \equiv \int \prod_n \mathcal{D}\phi(x) exp\left(-\int_0^{\frac{1}{\beta}} dx_0 \int d^{d-1}\mathbf{x}\mathcal{L}\left[\phi^{(0)}(x)+\chi(x,t)\right]\right) \tag{1.10}$$

L'integrazione può essere fatta in teoria perturbativa. Per una trattazione completa per esempio si guardi [Qui99]. Ad ordine zero in T il risultato è semplicemente

$$S_\beta^{(0)}[\phi_0] = \frac{1}{T}\int d^{d-1}x\mathcal{L}(\phi_0)$$

cioé la teoria $d-1$ dimensionale del modo zero. Ad ordini successivi invece in generale avrò una lagrangiana i cui coefficienti dipenderanno dal parametro β. Se per esempio considero il caso della teoria ϕ^4 con un solo campo scalare, integrando via la teoria non statica [Qui99] [Lan89] con un calcolo ad un loop[6]

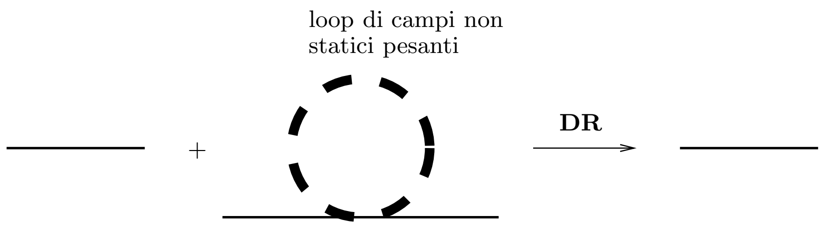

Figura 1.1: Integrazione dei modi non statici ad un loop

al primo ordine in T^2 ho che la massa della lagrangiana effettiva va cambiata

$$m^2 \longrightarrow m^2 + \frac{\lambda}{24\beta^2} \tag{1.11}$$

mentre il termine quartico resta invariato[7]. Questo risultato è estremamente

[6]Non viene effettuata l'integrazione dei campi statici perché può essere fatta anche dopo la riduzione dimensionale.

[7]La riduzione dimensionale che qui ho voluto introdurre è un risultato tutt'altro che banale, non basta infatti dire che i campi non statici hanno massa molto maggiore per dire che la dinamica si disaccoppia (teorema di Applequist-Carazzone), la condizione più forte che bisogna verificare è che effettivamente valga

$$\lim_{T\to\infty} \frac{G^R_{0\ldots0}(T; nonstatici)}{G^R_{0\ldots0}(statici)} = 0 \tag{1.12}$$

importante: il variare della temperatura può far addirittura cambiare il segno del termine di massa, guidando quindi una transizione di fase.

1.4 Transizioni di fase

Il discorso fatto nella precedente sezione ci permette di introdurre l'argomento delle transizioni di fase. In questo discorso farò uso del concetto di potenziale effettivo senza introdurlo, per una buona trattazione dell'argomento cfr. [Qui99].

Il punto fondamentale del problema delle transizioni di fase termiche è che a temperatura finita il valore di equilibrio di un campo ϕ può non corrispondere al minimo del potenziale effettivo $V^{T=0}$, bensì al minimo del potenziale effettivo a temperatura finita definito dalla azione (1.10). Così quello che succede è che anche se il minimo di $V^{T=0}$ è tale che $\langle\phi\rangle = \sigma \neq 0$, per temperature sufficientemente alte il minimo di V^T è $\langle\phi\rangle_T = 0$. Questo fenomeno è chiamato restorazione di simmetria ad alte temperature[8].

Le applicazioni di queste restorazioni di simmetria vanno dalla fisica della materia condensata ai problemi di natura cosmologica. Ovviamente lo studio delle transizioni chirali, della restorazione elettrodebole o eventualmente di una grande unificazione rientrano nella seconda area di interesse (per una review si veda [Lin90]). Indipendentemente dall'area di interesse, data una restorazione di simmetria è fondamentale sapere se è descritta da una transizione di fase di primo o di second'ordine. Illustro qui brevemente la differenza tra le due usando due classici esmpi.

- Inizio a considerare il caso di una teoria scalare con un potenziale effettivo descritto da[9]:

  $$V(\phi, T) = \alpha \left(T^2 - T_0^2\right) \phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

  dove α e T_0^2 sono termini costanti e λ è una teoria che dipende da T debolmente quanto basta per trascurarne la dipendenza . A $T = 0$

cioé che il contributo proveniente da tutti i diagrammi che coinvolgono campi non statici sia trascurabile. Questo problema è stato trattato in [Lan89]. Per una review più recente si veda p.es [And04]

[8] Una maniera euristica ma molto semplice per comprendere il fenomeno è: ad alte temperature il minimo di F=E-TS sarà fortemente favorito dagli stati ad S grande.

[9] Che per inciso è equivalente al caso già accennato in 1.11

il punto stazionario in $\phi = 0$ è instabile e il minimo si posizionerà in una delle configurazioni $\phi(T = 0) = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}}T_0$, rompendo così la simmetria originale. Per $0 < T < T_0$ il minimo sarà invece in $\phi(T) = \sqrt{\frac{2D\left(T_0^2-T^2\right)}{\lambda}}$ lasciando rotta la simmetria. Quando T raggiunge la temperatura critica T_0 il punto stazionario $\phi(T)$ collassa in $\phi = 0$ come una funzione continua in T. Una rappresentazione schematica del processo è data in figura 1.2.

Se risulta valida la approssimazione di campo medio, cioé se il comportamento del sistema è ben descritto dal potenziale effettivo la lunghezza di correlazione del sistema diverge[10] e la transizione viene detta del II ordine [Zin99]. Inoltre dal momento che le lunghezze divergono, la fisica a livello microscopico può essere integrata via e non considerata, e limitarsi a studiare la fisica macroscopica, che è dettata dalle sole simmetrie, semplificando notevolmente lo studio dei problemi. Questo è il ragionamento alla base della universalità à la Wilson e delle teorie efficaci.

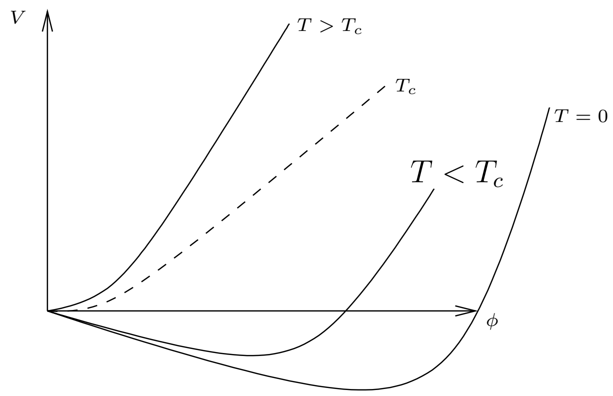

Figura 1.2: Potenziale effettivo per transizioni del II ordine

[10]Questo può non succedere; per esempio nel caso ci siano coefficienti quartici rilevanti le fluttuazioni del sistema diventano sempre più consistenti all'avvicinarsi alla temperatura critica. Il punto critico non viene raggiunto e la lunghezza di correlazione resta finita, la transizione diventa quindi del I ordine a causa delle fluttuazioni. Un esempio di questo comportamento è dato nel modello studiato approfonditamente nel capitolo 2.

- Considero adesso come esempio un potenziale effettivo del tipo[11].

$$V(\phi,T) = \alpha\left(T^2 - T_0^2\right)\phi^2 - ET\phi^3 + \frac{\lambda}{4}\phi^4$$

Nel caso precedente la transizione di fase era legata al passaggio da un minimo non banale ad $\phi = 0$ in questo caso la situazione è un po' più complicata. Una descrizione completa non è negli interessi di questo lavoro e può essere trovata su [Qui99]. Per somme linee si può dire che la differenza sostanziale sta nel fatto che la alla temperatura critica

$$T_c = \sqrt{\frac{\lambda\alpha T_0^2}{\lambda\alpha - E^2}}$$

c'è un passaggio da un minimo in

$$\phi_m^{(-)}(T_c) = \frac{2ET}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda}\sqrt{9ET_c^2 - 8\lambda\alpha(T_c^2 - T_0^2)} = \frac{2E}{\lambda}T_c$$

a quello in $\phi_m^{(+)}(T_c) = 0$, e questo passaggio non è continuo, anzi per $T = T_c$ c'è una barriera di potenziale tra i due minimi. Una rappresentazione schematica è riportata in figura 1.3. In questo caso

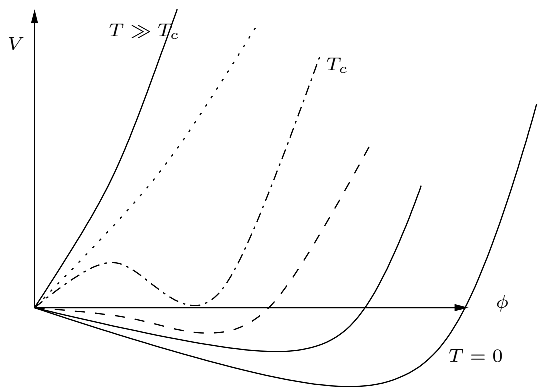

Figura 1.3: Potenziale effettivo per transizioni del I ordine

le lunghezze di correlazione restano finite (sono legate alla derivata seconda di V [Zin99]) e quindi può restare valida l'approssimazione di campo medio. La transizione da un minimo all'altro viene fatta tramite processi di tunnelling [Qui99]. La transizione in questo caso viene detta di I ordine.

[11] Un potenziale di questo tipo può essere incontrato per esempio nei calcoli ad un loop del modello standard [Qui99]

1.5 La QCD a densità barionica non nulla.

L'argomento studiato in QCD a densità barionica non nulla è il comportamento della materia ad alte densità. Le applicazioni di questa teoria sono da ricercare nella cosmologia, o nell'astrofisica (stelle compatte, in particolare stelle di neutroni [Raj00]) o ancora nella fisica delle particelle (nei collisori di ioni pesanti, come l'RHIC di New York [Kha02]).

Fissare la densità barionica equivale ad introdurre un termine tipo $\mu\overline{\psi}\gamma_0\psi$ nella lagrangiana, si ottiene quindi che questa teoria è descritta da[12] [Kog00]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}(x)F^{a\mu\nu}(x) + \sum_{f=1}^{N_f}\left(\overline{\psi}_f\gamma_\nu D_\nu\psi_f + \mu\overline{\psi}_f\gamma_0\psi_f + m_q\overline{\psi}_f\psi_f\right) \quad (1.13)$$

Secondo la QCD si può facilmente prevedere che ad altissime densità la materia deve essere nella forma di materia di quark e non di materia adronica, dal momento che i quark interagiscono sempre di meno al loro avvicinarsi.

Il limite $\mu \to \infty$, o più precisamente basta sia $\mu \gg \Lambda_{\mathrm{QCD}}$, può essere studiato tramite la teoria effettiva di alta densità (HDET [Hon04]). Benché le interazioni attrattive quark-quark siano ad alto impulso trasferito e quindi, secondo la libertà asintotica, deboli, saranno pur sempre presenti: ci si aspetta quindi la formazione di coppie di Cooper di tipo qq. Ovviamente, essendo combinazioni di solo due quark, queste non possono essere in singoletto di colore[13] ci si aspetta che la simmetria di colore venga rotta, dando quindi origine alla superconduttività di colore [Alf97]. Ovviamente questa condensazione nel canale di diquark qq è ben diversa dalla rottura di simmetria chirale tramite formazione di un condensato quark-diquark $q\overline{q}$ che avviene a $\mu = 0$.

Secondo quanto appena detto risulta evidente che la QCD dovrà avere delle transizioni di fase anche al variare di μ. In 1.5 è rappresentato un diagramma che riassume le conoscenze e le congetture attuali delle fasi della QCD. Tuttavia la conoscenza di questo grafico è solo approssimativa: infatti ci sono delle notevoli difficoltà dovute sia nel reperire dati sperimentali fisici, che nell'ottenere dati dalle simulazioni numeriche (come vedremo meglio nella sezione 1.6).

[12] Da adesso in poi per comodità lavorerò esclusivamente nell'euclideo.

[13] Per lo meno nei modelli $SU(N_c)$ con $N_c \geq 3$ e fermioni nella rappresentazione fondamentale

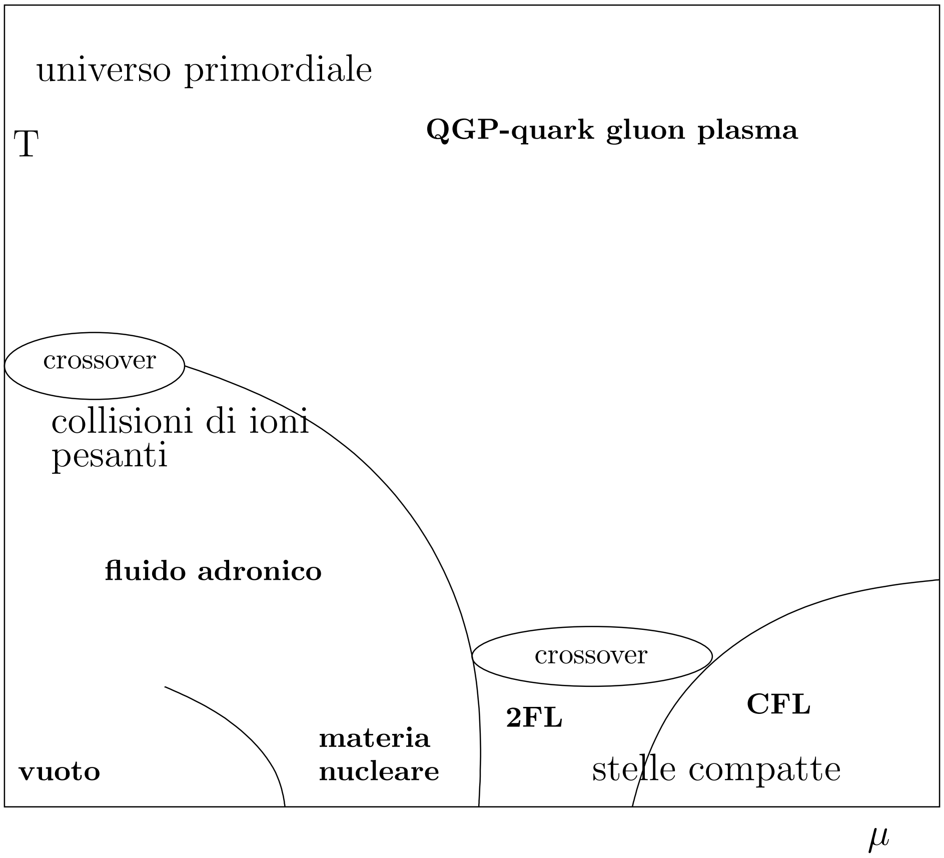

Figura 1.4: Diagramma di fase schematico della qcd: la materia come la conosciamo è nell'angolo in basso a sinistra; sono segnate le zone relative all'universo primordiale, alle collisioni di ioni pesanti e alle stelle di neutroni. $2FL$ indica la zona in cui la condensazione in coppie di Cooper interessa solo i due quark più leggeri, CFL quella in cui condensano sia u, d che s; in queste due zone si dovrebbe poter vedere la superconduttività di colore. Si è anche ipotizzata la presenza di due fasi distinte CFL e di una fase che separi le $2FL$ e CFL. Per una review sull'argomento si veda [Raj00] [Sch03] [Ste04].

Quello della QCD a $\mu \neq 0$ è un problema della fisica ancora aperto.

1.6 Il problema del segno: $SU_c(2)$ e $aQCD$

Tramite i funzionali generatori data una lagrangiana posso ricavare tutte le informazioni dalla funzione di partizione:

$$Z = \int \mathcal{D}A \prod_i \mathcal{D}\overline{\psi}_i \mathcal{D}\psi_i e^{-S[A,\overline{\psi}_i,\psi_i]} \tag{1.14}$$

e in una lagrangiana come la (1.13), in cui gli N_f fermioni di Dirac compaiono solo in termini quadratici, l'integrazione dei gradi di libertà fermionici è facile:

$$Z = \int \mathcal{D}Ae^{-S[A]} \left(\mathcal{D}et\ \mathcal{D}_A\right)^{N_f} \tag{1.15}$$

Dove ho introdotto l'operatore di Dirac

$$\mathcal{D} = \not{\partial} + i\not{A} + \mu\gamma_0 + m_q \tag{1.16}$$

In assenza di potenziale barionico posso usare la simmetria chirale di quest'ultimo per concludere [Leu92][Nus99]:

$$\gamma_5 \mathcal{D}(0)\gamma_5 = \mathcal{D}^\dagger(0) \Rightarrow \mathcal{D}et\ \mathcal{D}(0) \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$

Purtroppo la relazione (1.17) non è più valida nel caso di $\mu \neq 0$, vale invece la più generale $\gamma_5\mathcal{D}(\mu)\gamma_5 = \mathcal{D}^\dagger(-\mu)$. Da questa relazione segue che la misura $\mathcal{D}A \times (\mathcal{D}et\ \mathcal{D}_A(\mu))^{N_f}$ non è più una misura semi-definita positiva, e ciò genera alcune complicazioni: non sono più valide le QCD-inequalities (cfr. [Kog99])[14] e soprattutto nasce il cosiddetto problema del segno, la comparsa di una fase davanti alla misura invalida l'*importance sampling* rendendo computazionalmente impossibili le simulazioni su reticolo [Han01][Ste04]).

In alcune teorie QCD-like però questo problema si riesce a raggirare, trovando delle relazioni sostituitive alla (1.17). A questo gruppo appartengono la QCD con simmetria $SU_c(2)$ di colore e la aQCD, cioé la QCD con fermioni in rappresentazione nell'aggiunta del gruppo di Gauge. Ovviamente questi

[14] Queste si ricavano a partire da alcune disuguaglianze su operatori fermionici, considerando i campi di gauge come fissi. La disuguaglianza resta valida anche dopo l'integrazione sui campi di gauge grazie alla positività della misura di integrazione. Per una review si veda [Nus99]

due sono toy-model e non modelli realistici. In questo lavoro sono interessato principalmente alla aQCD, tuttavia le due teorie hanno caratteristiche molto simili, e non crea problemi portare avanti i due discorsi in parallelo.

Caratteristica comune ad entrambe le teorie è che sono due rappresentazioni reali del gruppo di colore, la prima pseudoreale e la seconda strettamente reale. Questo provoca un'allargamento della simmetria globale(cfr. [Kog00]). Come precedentemente detto la QCD in assenza di masse ha una simmetria globale[15] $U(N_f)_L \otimes U(N_f)_R$

$$\psi^\dagger \gamma_0 \left(\gamma_\nu D_\nu\right) \psi = \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \psi_R^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sigma_\nu^\dagger D_\nu & 0 \\ 0 & \sigma_\nu D_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Faccio una trasformazione e invece di considerare il campo ψ_R considero il campo left-handed definito da

$$\tilde{\psi} \equiv \begin{cases} \sigma_2 \tau_2 \psi_R^* \text{ in } SU_C(2) \\ \sigma_2 \psi_R^* \quad \text{in aQCD} \end{cases} \tag{1.19}$$

Indico con T_a un generatore del gruppo di colore, e vale:

- in $SU(2)_C$ vale $T_a = \tau_a = -\tau_2 \tau_a^T \tau_2$ (dove $\tau = \frac{\sigma_2}{2}$)
- in aQCD $T_{(a)bc} = f_{abc}$ dove a è l'indice del generatore e b, c sono gli indici nella rappresentazione. Per l'antisimmetria delle costanti di struttura $T_a = -T_a^T$

e usando che vale pure (a meno di derivate totali) per due fermioni di Wiel generici $\phi^T \sigma_\nu \partial_\nu \varphi = \varphi^\dagger \sigma_2 \sigma_\nu \partial_\nu \sigma_2 \phi^*$ ottengo

$$\psi_R^\dagger \sigma_\nu D_\nu \psi_R = \tilde{\psi}^\dagger \sigma_\nu^\dagger D_\nu \tilde{\psi} \tag{1.20}$$

$$\Longrightarrow \overline{\psi} \not{D} \psi = \begin{pmatrix} \psi_L^* \\ \tilde{\psi}^* \end{pmatrix} \sigma_\nu^\dagger D_\nu \begin{pmatrix} \psi_L \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \equiv \Psi^\dagger \sigma_\nu^\dagger D_\nu \Psi \tag{1.21}$$

Dove abbiamo introdotto il campo left-handed $\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_R \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}$. In questa notazione l'allargamento $U(N_f) \otimes U(N_f) \to U(2N_f)$ è evidente.

[15] Tralasciamo per ora la presenza dell'anomalia assiale

1.6.1 Ancora sulla aQCD

Oltre alla realità della rapresentazione di colore che permette lo studio delle transizioni a densità barionica non nulla, la QCD in rappresentazione dell'aggiunta presenta un'altra caratteristica interessante legata alla relazione tra il confinamento e la transizione chirale.

Uno dei problemi tutt'ora irrisolti della QCD è quale sia la relazione tra la transizione di deconfinamento e quella di restorazione della simmetria chirale. Entrambi i fenomeni sembrano essere legati a meccanismi non perturbativi a priori indipendenti. L'idea che esistano due temperature distinte T_c, T_d in cui avvengono le due transizioni non è tuttavia confermata dalle simulazioni su reticolo: i due processi sembrano essere fortemente connessi. Comunque le due transizioni hanno con sicurezza delle caratteristiche indipendenti, infatti sono ben descritte, anche analiticamente, in limiti opposti della teoria [Hat03]: il deconfinamento nel limite di $m_q \to \infty$, la transizione chirale in $m_q \to 0$. Bisogna quindi comprendere come i due fenomeni siano connessi (alcuni studi p.es. in [Hat03],[Fuk03] o [Moc03] e le referenze indicate). Uno strumento utile per capire questa relazione può essere trovato nella QCD con fermioni nell'aggiunta: in questo toy model nelle simulazioni su reticolo [Kog85][Kar98] si riconoscono due temperature di transizione diverse, con $T_d < T_c$. In [Kar98] dicono di aver riconosciuto nelle simulazioni una transizione di prima specie in T_d e una di seconda specie in T_c[16].

1.7 Il condensato e la teoria effettiva

Come preannunciato nella sezione 1.6 anche in queste teorie esistono delle QCD-inequalities che mi danno un'indicazione su quali siano i mesoni più leggeri della teoria. Così come in per $\mu = 0$ vale la (1.17) esiste un analogo valido per μ arbitrario[Kog00]:

- per $SU_C(2)$ di colore

$$\tau_2 C\gamma_5 \mathcal{D}(\mu)\tau_2 C\gamma_5 = \mathcal{D}^*(\mu) \tag{1.22}$$

- per aQCD

$$C\gamma_5 \mathcal{D}(\mu) C\gamma_5 = \mathcal{D}^*(\mu) \tag{1.23}$$

[16] Come si vedrà nel capitolo 2 questo lavoro prevede un sisultato diverso

dove $C = i\gamma_0\gamma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & \\ & \sigma_2 \end{pmatrix}$. Quindi si può concludere che i mesoni più leggeri delle teorie dovranno essere rispettivamente $\Psi^T C T_2 \gamma_5 \Psi$ e $\Psi^T C \gamma_5 \Psi$. Essendo interessato a scrivere una teoria effettiva, i cui gradi di libertà sono quelli delle fluttuazioni a lungo range, dovrò scrivere una teoria di un condensato di diquark

$$\Sigma \sim \begin{array}{c} \Psi\Psi^T\sigma_2\tau_2 \\ \Psi\Psi^T\sigma_2 \end{array} \tag{1.24}$$

che, come era logico è aspettarsi, è un singoletto di colore e di lorentz. Il campo Σ è quindi una matrice complessa antisimmetrica (rispettivamente simmetrica) $2N_f \times 2N_f$. Sotto trasformazioni di flavour esteso $\psi \to U\psi$ con $U \in U(2N_f)$ si trasforma come

$$\Sigma \to U\Sigma U^T \tag{1.25}$$

La più generale lagrangiana invariante sotto $U(2N_f)$ scrivibile in funzione dei campi Σ è[17]

$$\mathcal{L} = Tr\ \partial_\mu\Sigma^\dagger\partial_\mu\Sigma + \tilde{m}^2 Tr\ \Sigma^\dagger\Sigma + \frac{v}{4}\left(Tr\ \Sigma^\dagger\Sigma\right)^2 + \frac{u}{4}Tr\ \left(\Sigma^\dagger\Sigma\right)^2 \tag{1.26}$$

a cui posso aggiungere un termine che mimi l'anomalia assiale, cioé che rompa esplicitamente[18]

$$\begin{aligned} U(2N_f) &\longrightarrow SU(2N_f) \oplus Z_{N_f} \\ \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} + c\left(\mathcal{D}et\ \Sigma + \mathcal{D}et\ \Sigma^\dagger\right) \end{aligned} \tag{1.28}$$

e ancora un campo esterno proporzionale alla massa dei quark m_q che guidi la transizione di fase chirale:

- In $SU_C(2)$:

$$m_q\overline{\psi}\psi = -\frac{1}{2}m_q\psi^T\sigma_2\tau_2 M\psi + h.c. \longrightarrow -m_q Tr\ M\Sigma + h.c. \tag{1.29}$$

  con $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

[17] La $\tilde{m}$ non va confusa con la m_q massa dei quark.

[18] Nel caso di matrici antisimmetriche, cioé $SU_C(2)$, va aggiunto anche un termine $Pf(\Sigma) + Pf(\Sigma^\dagger)$, dove ([Smi94])

$$Pf(\Sigma) = \frac{1}{2^{N_f}N_f!}\sum_P (-1)^P \Sigma_{i_1 i_2}\cdots\Sigma_{i_{(2N_f-1)}i_{2N_f}} = \sqrt{\mathcal{D}et\ \Sigma} \tag{1.27}$$

Nel caso di matrici simmetriche questo termine è identicamente nullo.

- in aQCD:

$$m_q\overline{\psi}\psi = -\frac{1}{2}m_q\psi^T\sigma_2 M\psi + h.c. \longrightarrow -m_q Tr\ M\Sigma + h.c. \tag{1.30}$$

con $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e le restrizioni al gruppo di simmetria dettate da questi accoppiamenti sono rispettivamente

$$U(2N_f) \begin{array}{l} \nearrow Sp(2N_f) \\ \\ \searrow O(2N_f) \end{array}$$

Nel caso che la rottura permanga per $m_q \to 0$ avrò $2N_f^2 \mp N_f$ bosoni[19]. Tra questi si troveranno ovviamente i vettori e lo scalare di $SU(N_f)$, come previsto dal teorema di Vafa-Witten [Vaf84][Nus99][Smi00].

Nel caso in cui la simmetria assiale venga rotta in maniera non spontanea $U(2N_f) \to SU(2N_f)$ il gruppo residuo resta invariato.

Ovviamente posso introdurre anche un termine di potenziale barionico

$$\mu\overline{\psi}\gamma_0\psi = \psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi \rightsquigarrow \mu^2 Tr\ \Sigma B^T \Sigma^\dagger B \tag{1.31}$$

Con $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. In questo caso cambiano sostanzialmente sia il gruppo rotto che quello residuo e il contenuto in particelle della teoria. In questo lavoro non svilupperemo questo settore della teoria. Una review sull'argomento è dato in [Kog00].

Ricapitolo la situazione che si delinea riguardo lo studio delle lagrangiane del tipo (1.26,1.28), tenendo conto dell'anomalia[20]:

[19] Questi saranno N_f^2 (o $N_f^2 - 1$ se si considera il modello con anomaila) stati mesonici, e $N_f^2 \mp N_f$ diquark. Particolare interesse hanno suscitato le teorie $SU_c(2)$ con un solo flavour (p.es. [Sku00]), in quanto sono le sole a non avere stati di diquark; questo le rende un po' più simili alla QCD reale.

[20] Ricordo nella notazione usata in questo lavoro che N_f è il numero di fermioni di Dirac presenti nella teoria, in alcuni lavori invece usano una notazione diversa e indicano cno N_f il numero di fermioni di Wiel

- $SU_C(2)$, $N_f > 4$: La lagrangiana è descritta dalla sola (1.26), i termini che rompono esplicitamente la simmetria assiale sono irrilevanti in $4-\varepsilon$ dimensioni. Il flusso di rinormalizzazione di questo modello ad un loop è stato studiato in [Wir00], e il risultato è l'esistenza di un unico punto critico non banale e instabile.

- $SU_C(2)$, $2 \leq N_f \leq 4$: In queste lagrangiane bisogna inserire anche il termine anomalo (1.28). Anche qui flusso di GR è stato studiato in [Wir00] e si prevede sempre un solo punto fisso (non banale) instabile. Nel caso $N_f = 2$ il pattern di rottura di simmetria è $O(6) \to O(5)$.

- $SU_C(2)$, $N_f = 1$: In questo caso non è presente una transizione di fase, dal momento che $SU(2) \sim Sp(2)$. Invece nel caso in cui non si tenga conto dell'anomalia la transizione è un $U(2) \to Sp(2)$, che si dimostra essere del II ordine (cfr. [Wir00])

- aQCD, $N_f > 2$: Il termine di $\mathcal{D}et\ \Sigma$ non è rilevante, e la lagrangiana è descritta dalla sola (1.26). Uno studio accurato di questo modello sarà presentato nel capitolo 2.

- aQCD, $N_f = 2$: Alla (1.26) bisogna aggiungere il termine (1.28) che è quartico nei campi. Un'analisi è presentata nella sezione 2.2.

- aQCD, $N_f = 1$[21]: In assenza di anomalia è descritta dalla (1.26) ed è valido lo studio generale fatto in 2.2. La rottura di fase è $U(2) \to O(2)$.

  Se si prende in considerazione anche l'anomalia ho una riduzione della simmetria della teoria $U(2) \to SU(2) \oplus Z_2 \equiv O(3)$, che a sua volta verrà rotto in O(2). L'analisi della sezione 2.2 non può andare bene perché in questo caso il termine di determinante è quadratico, e andrebbero inseriti altri due vertici quartici. Un'analisi del problema è presentata nell'appendice B.

Anche se esula un po' da questo contesto vale la pena citare il caso abbastanza simile della gluodinamica supersimmetrica, cioè una teoria Super Yang-Mills (SYM) pura con $\mathcal{N} = 1$. Questa è una teria di gauge con simmetria di colore $SU(N_c)$ e un fermione di wiel in rappresentazione dell'aggiunta

[21]Nella QCD reale in questo caso non è presente alcuna rottura di spontanea di simmetria chirale, infatti l'unica simmetria globale (non anomala) è $U_V(1)$, che resta intatta dopo la formazione del condensato chirale.

del gruppo di colore. In questa classificazione potrebbe rientrare come un caso $N_f =''\frac{1}{2}''$. Questo modello è stato ampliamente studiato in letteratura (per un introduzione al problema [Tou00]); la simmetria classica iniziale è una $U(1)$, che però viene ridotta a livello quantistico ad una Z_{2N_C}, si può dimostrare che la simmetria è spontaneamente rotta, e il condensato di gluini λ assume un VEV ([Pes97]):

$$\langle\lambda\lambda\rangle = -\frac{32\pi^2}{N_c} c M^3 e^{-\frac{8\pi^2}{N_c g^2}} \tag{1.32}$$

dove g è la costante di accoppiamento definita alla scala di massa M, c è una costante. La formazione del condensato rompe la simmetria $Z_{2N_C} \to Z_2$, individuando uno degli N_C vuoti inequivalenti.

1.8 L'argomento di Peskin

Una maniera meno contosa della precedente e abbastanza generale per ricavare il pattern di rottura e la forma della lagrangiana effettiva ce la fornisce Peskin in [Pes80]. La presento qui in forma leggermente rivisitata.

Non terremo conto per ora dell'anomalia assiale.

La teoria che sono interessato a studiare(QCD o QCD-like) ha le simmetrie del gruppo di lorentz del gruppo di colore e di quello di flavour. Detta $\underline{r}$ la rappresentazione del flavour e $\underline{c}$ quella di colore, la rappresentazione dei fermioni è

$$\left(\left(0,\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2},0\right)\right) \otimes \underline{r} \otimes \underline{c} \tag{1.33}$$

scelgo poi di fare una trasformazione e rappresentare tutto in funzione puramente left-handed

$$\longrightarrow \left(0,\frac{1}{2}\right) \otimes (\underline{r} \otimes \underline{c} \oplus \overline{r} \otimes \overline{c}) \tag{1.34}$$

Usando la notazione $\psi_{\alpha i c}$ dove l'indice α è quello di lorentz dello spinore di wiel, i è l'indice della simmetria globale (i va da uno a due volte la dimensione della rappresentazione di $\underline{r}$) e c è quello della simmetria di colore.

Ricordo che la mia lagrangiana effettiva dovrà descrivere una rottura spontanea di simmetria globale, e quest'ultima in generale dovrà essere caratterizzata da un valore di aspettazione sul vuoto non nullo di qualche operatore scalare di lorentz e di gauge[22].

Un operatore sì fatto dovrà avere una forma del tipo:

$$\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\alpha ic}\psi_{\beta jd}T^{ijcd} \tag{1.35}$$

dove il termine $\varepsilon^{\alpha\beta}$ deriva dalla pseudorealità della rappresentazione di wiel, e a causa della natura fermionica di ψ dovrà essere

$$T^{ijcd} = T^{jidc} \tag{1.36}$$

Senza perdere di generalità posso prendere T non singolare.

Considero separatamente i casi di rappresentazione di colore non reale, strettamente reale e pseudo-reale.

- Inizio dal caso non reale (come è la QCD con $N_C \neq 2$ e fermioni nella fondamentale). La simmetria è il quadrato della simmetria di flavour, cioé nei casi di interesse $U_R(N_f)\otimes U_L(N_f)$. La forma di T dovrà essere quindi[23]

  $$T^{ijcd} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{ij} \delta_{cd} \tag{1.37}$$

  La simmetria quindi si romperà necessariamente col pattern

  $$U_R(N_f) \otimes U_L(N_f) \longrightarrow U_V(N_f) \tag{1.38}$$

- Considero il caso di una rappresentazione strettamente reale (aQCD), cioé la combinazione simmetrica di due rappresentazione contiene un tensore simmetrico invariante b_{cd}. Come precedentemente detto la simmetria globale della teoria, nei casi di interesse, è $SU(2N_f)$ La forma di T dovrà essere in in questo caso:

  $$T^{ijcd} = A_{ij}b_{cd} \tag{1.39}$$

[22] In questo contesto sono interessato a descrivere sistemi a densità barionica nulla, o comunque condizioni in cui le interazioni sono forti (cfr. 1.5).

[23] Sembrerebbe per quanto detto precedentemente che la forma di T debba essere della forma meno restrittiva $\begin{pmatrix} & A \\ A^t & \end{pmatrix}$. Per concludere Peskin utilizzava un'ipotesi quasi ad hoc, cioè che la simmetria residua fosse massima in consistenza con la generazione di massa. Noi possiamo invece utilizzare il teorema di Vafa-Witten, successivo all'articolo di Peskin (cfr. [Vaf84] [Smi00]), che ci assicura che la simmetria $U_V(N_f)$ deve restare conservata, per concludere che $A = 1$.

La simmetria $ic \leftrightarrow jd$ di T quindi mi assicura che A deve essere simmetrico. Dopo aver sommato sugli indici di colore e di Lorentz il condensato sarà espresso come una matrice $2N_f \times 2N_f$ simmetrica complessa. La simmetria $\psi_i \rightarrow U_{ii'}\psi_{i'}$ che lascia invariato un condensato di questo tipo è $\Sigma_{cd}B_{cd} = \Sigma_{cd}B_{c'd'}U_{cc'}U_{dd'}$, cioè $O(2N_f)$[24]. La simmetria quindi si romperà necessariamente col pattern

$$U(2N_f) \longrightarrow O(2N_f) \tag{1.40}$$

- Considero infine una rappresentazione pseudoreale ($SU_C(2)$), cioé la combinazione antisimmetrica di due rappresentazioni contiene un tensore antisimmetrico invariante e_{cd}[25]. Anche in questo caso la simmetria globale è $SU(2N_f)$. La forma di T sarà:

$$T^{ijcd} = A_{ij}e_{cd} \tag{1.41}$$

dove però questa volta A un tensore antisimmetrico. In maniera del tutto analoga a prima si conclude che il condensato dovrà essere una matrice $2N_f \times 2N_f$ antisimmetrica, e che la simmetria residua sarà quella che lascia invariato un tensore antisimmetrico, cioè

$$U(2N_f) \longrightarrow Sp(2N_f) \tag{1.42}$$

Riassumendo in uno schema:

$$\begin{array}{ccccc} & U(2N_f) & & \supset & U(N_f)\otimes U(N_f) \\ & \swarrow\ \searrow & & & \downarrow \\ O(2N_f) & o & Sp(2N_f) & \supset & U(N_f) \end{array} \tag{1.43}$$

[24]In questo punto si usa la non degenerazione di T, che si traduce con $\mathcal{D}et\ A \neq 0$

[25]Nella fattispecie essendo la rappresentazione bidimensionale dovrà essere $e_{cd} \propto \varepsilon_{cd}$

Capitolo 2

La aQCD

2.1 Impostazione del calcolo

In questo capitolo focalizzeremo l'attenzione sulla aQCD, e in particolar modo su $N_f = 2$, che, come chiarito precedentemente, ha la peculiarità di avere il termine che rompe la simmetria assiale quartico nei campi. La teoria sarà caratterizzata quindi da tre interazioni e da un termine di massa. Nei casi $N_f > 2$ avremo invece solo due accoppiamenti quartici.

Ricordo che la simmetria continua della teoria è $SU(2N_f)$ che si rompe in $O(2N_f)$, nel caso $N_f = 2$ ricordo che vale $SU(4) \equiv O(6)$. Nel seguito, per brevità si userà $N \equiv 2N_f$.

La lagrangiana che siamo interessati a studiare è la seguente

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& Tr\ \partial_\mu \Phi_B^\dagger \partial^\mu \Phi_B + m_B^2 Tr\ \Phi_B^\dagger \Phi_B + \\ &+ \frac{v_B}{4}(Tr\ \Phi_B^\dagger \Phi_B)^2 + \frac{u_B}{4} Tr\ (\Phi_B^\dagger \Phi_B)^2 + c_B(\mathcal{D}et\ \Phi_B + \mathcal{D}et\ \Phi_B^\dagger)\end{aligned} \tag{2.1}$$

I campi Φ sono delle matrici complesse simmetriche $N \times N$. Si svilupperanno in parallelo i due casi, usando per il caso $N_f = 2$ la condizione $N = 4$ solo dove realmente necessario, cioé nei calcoli che coinvolgono direttamente il determinante.

Per quanto riguarda la massa la (2.1) è consistente, infatti, come si vedrà più avanti in (2.15) e (2.16), è verificata la regola di traccia. Più delicata è la verifica della consistenza per quanto riguarda gli accoppiamenti quartici, cioé vedere sotto quali condizioni siano limitati inferiormente e sotto quali condizioni il pattern di rottura sia quello desiderato. Qui riporto solo i risultati, i procedimenti sono descritti nell'appendice A Le condizioni di stabilità sono:

$$
\begin{aligned}
&u + v \geq 0 \\
&u + Nv \geq 0 \\
&u + v \geq |c| \\
&u + 4v \geq 2|c|
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

dove le prime due sono per $c = 0$ e N pari generico, le ultime due sono nel caso con anomalia. Una condizione sufficiente[1] che mi assicura che il pattern di rottura sia quello desiderato è:

$$u \geq 0 \tag{2.3}$$

Dopo aver fissato le condizioni di validità della mia lagrangiana sviluppo il formalismo necessario per eseguire i calcoli perturbativi.

Il determinante di una generica matrice 4×4 può essere scritto come

$$\mathcal{D}et\ \Phi = \frac{1}{24}\varepsilon_{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon_{a_2b_2c_2d_2}\Phi_{a_1a_2}\Phi_{b_1b_2}\Phi_{c_1c_2}\Phi_{d_1d_2} \tag{2.4}$$

Per la teoria descritta dalla (2.1) calcolata però su matrici A generiche (non simmetriche) i vertici sono:

$$F^v \equiv \frac{\partial^4 \frac{1}{4}(Tr\ A^\dagger A)^2}{\partial A^\dagger_{a_1a_2}\partial A_{b_1b_2}\partial A^\dagger_{c_1c_2}\partial A_{d_1d_2}} = \frac{\delta_{a_1b_1}\delta_{a_2b_2}\delta_{c_1d_1}\delta_{c_2d_2} + \delta_{a_1d_1}\delta_{a_2d_2}\delta_{c_1b_1}\delta_{c_2b_2}}{2} \tag{2.5}$$

$$F^u \equiv \frac{\partial^4 \frac{1}{4}Tr\ (A^\dagger A)^2}{\partial A^\dagger_{a_1a_2}\partial A_{b_1b_2}\partial A^\dagger_{c_1c_2}\partial A_{d_1d_2}} = \frac{\delta_{a_1b_1}\delta_{b_2c_2}\delta_{c_1d_1}\delta_{d_2a_2} + \delta_{a_1d_1}\delta_{d_2c_2}\delta_{c_1b_1}\delta_{b_2a_2}}{2} \tag{2.6}$$

$$C \equiv \frac{\partial^4 \mathcal{D}et\ A}{\partial A_{a_1a_2}\partial A_{b_1b_2}\partial A_{c_1c_2}\partial A_{d_1d_2}} = \varepsilon_{a_1b_1c_1d_1}\varepsilon_{a_2b_2c_2d_2} \tag{2.7}$$

Questi tuttavia non sono i vertici di interazione della mia teoria, devo trovare una maniera per descrivere soltanto i gradi di libertà relativi alle matrici simmetriche.

Detta $\psi^{(a_1a_2)}$ la matrice con tutti zeri tranne che un uno in posizione $a \equiv (a_1a_2)$, una scelta conveniente per descrivere le matrici simmetriche può essere:

$$\phi^{(\tilde{a})} \equiv B_{\tilde{a}}(\psi^{(\tilde{a})} + \psi^{(\tilde{a}^T)}) \tag{2.8}$$

[1] Il perché manchi una doppia implicazione è spiegato nell'appendice A

con $B_a \equiv \frac{1-\delta_{a_1a_2}}{\sqrt{2}} + \frac{\delta_{a_1a_2}}{2}$. In seguito si userà la convenzione che per le coppie di numeri tildate varrà $\tilde{a}_1 \leq \tilde{a}_2$. La scelta di normalizzazione è

$$Tr\ \phi^\dagger_{\tilde{a}}\phi_{\tilde{b}} = \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \tag{2.9}$$

Scrivo quindi

$$\Phi = \sum_{\tilde{a}} \alpha_{\tilde{a}}\phi^{\tilde{a}} \tag{2.10}$$

e dato un generico operatore F vale

$$F(\Phi) = F_{ab\cdots}\Phi_a\Phi_b\cdots = F_{ab\cdots}\alpha_{\tilde{a}}B_{\tilde{a}}(\delta_{a\tilde{a}} + \delta_{a^T\tilde{a}})\alpha_{\tilde{b}}B_{\tilde{b}}(\delta_{b\tilde{b}} + \delta_{b^T\tilde{b}})\cdots \tag{2.11}$$

Con questo formalismo la scrittura dei vertici è evidente. I vertici relativi all'operatore F li indicherò con $\tilde{F}$. Per fare dei calcoli perturbativi noi siamo interessati a calcolare ampiezze di grafici tipo quello rappresentato in fig. 2.1

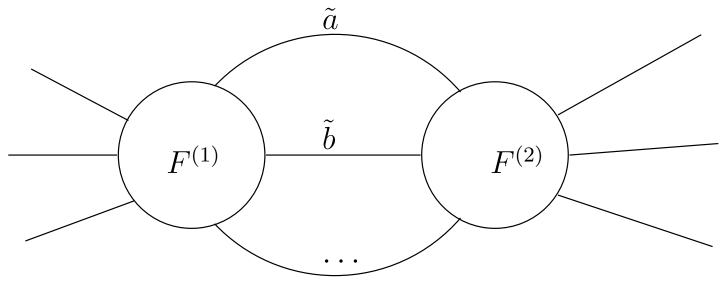

Figura 2.1: Contrazione di due vertici generici

cioè

$$\sum_{ab\cdots\bar{a}\bar{b}\cdots} \tilde{F}^{(1)}_{ab\cdots}\tilde{F}^{(2)}_{\bar{a}\bar{b}\cdots}B^2_{\tilde{a}}B^2_{\tilde{b}}(\delta_{a\tilde{a}}+\delta_{a^T\tilde{a}})(\delta_{\bar{a}\tilde{a}}+\delta_{\bar{a}^T\tilde{a}})(\delta_{b\tilde{b}}+\delta_{b^T\tilde{b}})(\delta_{\bar{b}\tilde{b}}+\delta_{\bar{b}^T\tilde{b}})\cdots \tag{2.12}$$

L'espressione si semplifica notevolmente usando

$$\sum_{\tilde{a}} B^2_{\tilde{a}}(\delta_{a\tilde{a}} + \delta_{a^T\tilde{a}})(\delta_{\bar{a}\tilde{a}} + \delta_{\bar{a}^T\tilde{a}}) = \frac{\delta_{a\bar{a}} + \delta_{a^T\bar{a}}}{2} \tag{2.13}$$

$$\sum_{ab\cdots\bar{a}\bar{b}\cdots} \tilde{F}^{(1)}_{ab\cdots ij}\frac{\delta_{a\bar{a}} + \delta_{a^t\bar{a}}}{2}\frac{\delta_{b\bar{b}} + \delta_{b^t\bar{b}}}{2}\cdots\tilde{F}^{(2)}_{\bar{a}\bar{b}\cdots kl} \tag{2.14}$$

o espresso graficamente in fig.2.2:

Adesso ho gli strumenti necessari per fare i calcoli perturbativi.

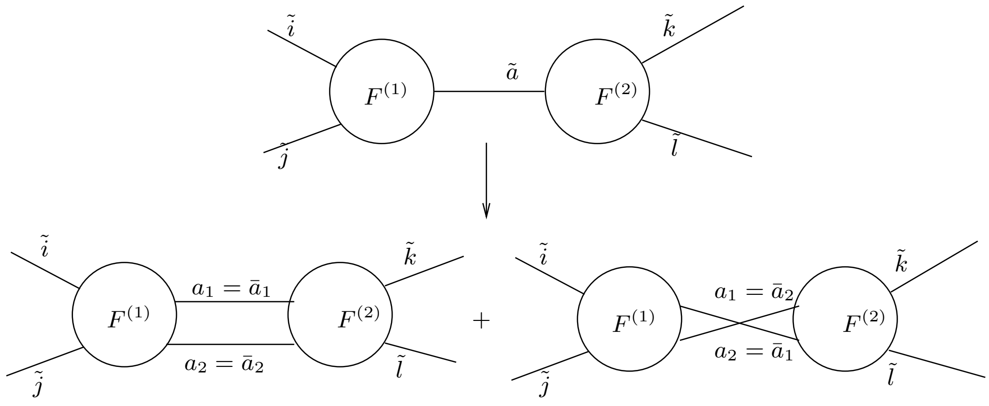

Figura 2.2: Somma solo sulle matrici simmetriche

Per prima cosa verifico che, come preannunciato, vale la condizione di traccia, cioè

$$\sum_{\tilde{a}} (F^{(u)} + F^{(v)})_{\tilde{a}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \propto \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \tag{2.15}$$

ed in effetti, facendo esplicitamente il calcolo, risulta

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{a}} F^{(u)}_{\tilde{a}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} &= \frac{N^2+N+2}{4}\delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \\ \sum_{\tilde{a}} F^{(v)}_{\tilde{a}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} &= \frac{N+1}{2}\delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Il vertice C non dà contributo alla massa ad un loop. Il risultato ottenuto, cioè che non esistono nuovi termini di massa, si può estendere ad ogni loop in teoria perturbativa.

I diagrammi utili nei calcoli ad un loop che danno contributo non nullo alle funzioni a 4 vertici sono rappresentati in figura 2.3.

A questi bisogna aggiungere quelli che correggono la massa, rappresentati in 2.4

I risultati della contrazione dei vertici sono:

(a): $F^{(u)} \times F^{(u)} \equiv F^{(u)}_{\tilde{a}\tilde{i}\tilde{c}\tilde{j}} F^{(u)}_{\tilde{i}\tilde{b}\tilde{j}\tilde{d}} = \frac{1}{2}F^{(u)} + \frac{1}{2}F^{(v)}$
$F^{(v)} \times F^{(u)} = F^{(u)}$
$F^{(v)} \times F^{(v)} = F^{(v)}$

$(b) + (c)$: $F^{(u)} \times F^{(u)} = \frac{N+2}{2}F^{(u)} + \frac{1}{2}F^{(v)}$
$F^{(v)} \times F^{(u)} = F^{(u)} + \frac{N+1}{2}F^{(v)}$
$F^{(v)} \times F^{(v)} = \frac{N^2+N+6}{4}F^{(v)}$

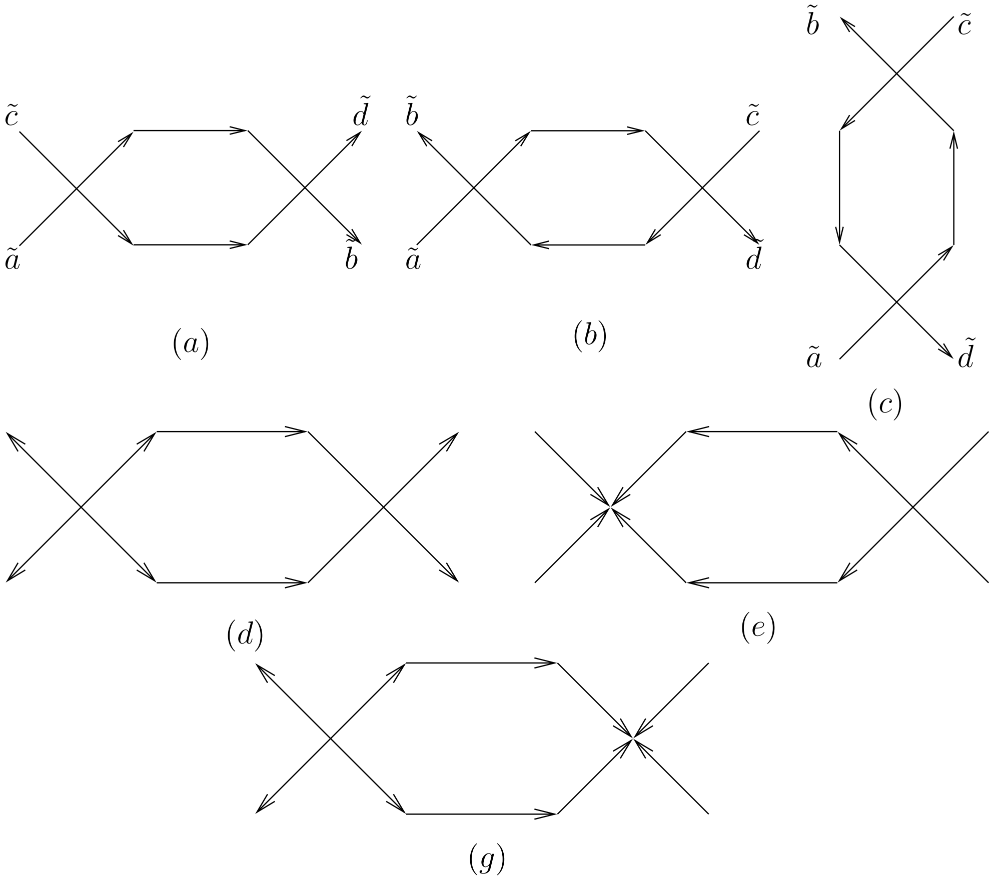

Figura 2.3: Diagrammi ad un loop

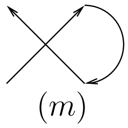

Figura 2.4: Correzione alla massa

$(e) = (d)^*$: $F^{(u)} \times C^* = -\frac{1}{2}C^*$
$F^{(v)} \times C^* = C^*$

(f): $C^* \times C = 8F^{(v)} - 8F^{(u)}$

(m): $F^{(u)} \times \delta = \dfrac{N^2+N+2}{4}\delta$
$F^{(v)} \times \delta = \dfrac{N+1}{2}\delta$

2.2 Rinormalizzazione a un loop

Essendo interessato a studiare i punti fissi e la loro stabilità imposto un calcolo nello schema della ε-expansion massivo [Zin02] [Wei96], come prima cosa impongo le condizioni di regolarizzazione dimensionale, con $\varepsilon = 4 - d$:

$$\begin{cases} \Phi_B = \sqrt{Z}\Phi \\ m_B^2 = \dfrac{Z_2}{Z}m^2 \\ u_B = \dfrac{Z_u}{Z^2}u\mu^\varepsilon \\ v_B = \dfrac{Z_v}{Z^2}v\mu^\varepsilon \\ c_B = \dfrac{Z_c}{Z^2}c\mu^\varepsilon \end{cases} \tag{2.17}$$

A livello albero ho

- $\Gamma_2^{(0)} = (p^2+m^2)\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}$

- $\Gamma_4^{(0)} \equiv \dfrac{\partial^4}{\partial\alpha_{\tilde{a}}\partial\alpha^*_{\tilde{b}}\partial\alpha_{\tilde{c}}\partial\alpha^*_{\tilde{d}}}\Gamma = uF^{(u)}_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}} + vF^{(v)}_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}}$

- $\tilde{\Gamma}_4^{(0)} \equiv \dfrac{\partial^4}{\partial\alpha_{\tilde{a}}\partial\alpha_{\tilde{b}}\partial\alpha_{\tilde{c}}\partial\alpha_{\tilde{d}}}\Gamma = cC_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}}$

Ad <u>un loop</u> ho invece:

- $\Gamma_2^{(1)} = \Gamma_2^{(0)} + ((Z_2-1)m^2 + (Z-1)p^2)\delta_{\tilde{a}\tilde{b}} - (m)$

- $\Gamma_4^{(1)} = \Gamma_4^{(0)} + (Z_u-1)uF^{(u)} + (Z_v-1)vF^{(v)} - \frac{1}{2}(a) - (b) - (c) - \frac{1}{2}(f)$

- $\tilde{\Gamma}_4^{(1)} = \tilde{\Gamma}_4^{(0)} + (Z_c-1)cC - \dfrac{4!}{(2!)^2}\dfrac{(d)+(d)^T}{2}$

e i termini lasciati indicati sono

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a)+(b)+(c) = \mu^{\varepsilon}\Bigg[\left(\frac{2N+5}{4}u^2+3uv\right)F^{(u)}+ \\ +\left(\frac{3}{4}u^2+(N+1)uv+\frac{N^2+N+8}{4}v^2\right)F^{(v)}\Bigg]\times \text{fattore integrale}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Il fattore integrale dipende dallo schema di rinormalizzazione. In questo lavoro verrà usato lo schema di **sottrazione minimale** (MS), cioé il controtermine sarà una funzione divergente in $\varepsilon \to 0$ senza residuo in 0. In questo caso particolare il fattore è la parte divergente proveniente dallo scambio di due campi scalari a impulso trasferito nullo, indicato da $I\,(2)$, dove

$$I\,(n) \equiv \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+m^2)^n} = \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)m^{d-2n}}{(4\pi)^{d/2}} \tag{2.19}$$

considero quindi il limite $\varepsilon \to 0$ e ne prendo la parte divergente:

$$I\,(2) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma+\ln 4\pi\right)m^{-\varepsilon} \Longrightarrow I^{MS}(2) = \frac{1}{8\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}m^{-\varepsilon} \tag{2.20}$$

Il termine che proviene dall'anomalia è invece

$$\frac{1}{2}(f) = \mu^{\varepsilon}4c^2\left(F^{(v)}-F^{(u)}\right)I^{MS}\,(2) \tag{2.21}$$

Le correzioni al termine di anomalia invece sono date da:

$$\frac{4!}{(2!)^2}\frac{(d)+(d)^T}{2} = 3c\mu^{\varepsilon}\left(v-\frac{u}{2}\right)CI^{MS}\,(2) \tag{2.22}$$

Il termine di massa invece viene corretto da

$$(m) = \mu^{\varepsilon}\left(\frac{N^2+N+2}{4}u+\frac{N+1}{2}v\right)I^{MS}\,(1) \tag{2.23}$$

Tirando le somme posso scrivere le funzioni di rinormalizzazione ad un loop[2,3]

$$G_u \equiv uZ_u = u+\mu^{\varepsilon}\left(\frac{2N+5}{4}u^2+3uv-4c^2\right)I^{MS}\,(2)+O\left(g^3\right) \tag{2.24}$$

$$G_v \equiv vZ_v = v+\mu^{\varepsilon}\left(\frac{3}{4}u^2+(N+1)uv+\frac{N^2+N+8}{4}v^2+4c^2\right)I^{MS}\,(2)+O\left(g^3\right) \tag{2.25}$$

[2]Per semlicità indicherò con g^n una qualunque funzione di ordine n negli accoppiamenti u, v, c

[3]Nello schema MS scelto le correzioni ad ordini superiori saranno comunque divergenti in ε senza residuo in 0.

$$G_c \equiv cZ_c = c + 3c\mu^{\varepsilon}\left(v - \frac{u}{2}\right) I^{MS}(2) + O\left(g^3\right) \tag{2.26}$$

Essendo $G_{u,v,c} \times \mu^{\varepsilon} = (u_B, v_B, c_B)$, ed essendo le costanti nude indipendenti dalla sliding scale μ scelta, derivando rispetto a quest'ultima ho un sistema di equazioni:

$$\partial_\mu \left(G_i \mu^{\varepsilon}\right) = 0 \Longrightarrow \partial_i G_j \cdot \beta_i = -\varepsilon G_j \tag{2.27}$$

dove le $\beta-$function sono definite da $\beta_{u,v,c} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial_\mu}(u, v, c)$.

Posso scrivere poi $(\partial G) = I + A + O(g^2)$[4], con $A = O(g)$, e ancora $G = G^1 + G^2 + O(g^3)$ con $G^{(1)} = O(g)$ e $G^{(2)} = O(g^2)$.

$$\beta_i = -\varepsilon\left(\delta_{ij} - A^T_{ij}\right) G_j = -\varepsilon\left(G^{(1)}_i - A^T_{ij} G^{(1)}_j + G^{(2)}_i\right) \tag{2.28}$$

Alla fine scrivendo esplicitamente le $\beta-$function di (2.28) si ha[5]

$$\begin{aligned}
\beta_u &= -\varepsilon u + \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{2N+5}{4}u^2 + 3uv - 4c^2\right) + O\left(g^3\right) \\
\beta_v &= -\varepsilon v + \frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{3}{4}u^2 + (N+1)uv + \frac{N^2+N+8}{4}v^2 + 4c^2\right) + O\left(g^3\right) \\
\beta_c &= -\varepsilon c + \frac{1}{8\pi^2}\left(3c\left(v - \frac{u}{2}\right)\right) + O\left(g^3\right)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Si può calcolare anche la $\beta-$function dell'accoppiamento quadratico di massa, e usando le (2.17) e (2.23) ho che

$$\beta_{m^2} \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{m^2}{\mu^2} = \frac{m_b^2}{\mu^2}\left(-2 - \frac{2}{(4\pi)^2}\left(\frac{N^2+N+2}{4}u + \frac{N+1}{2}v\right) + O(g^2) + O(g\varepsilon)\right) \tag{2.30}$$

2.2.1 I punti fissi

Studio adesso quali sono i punti fissi del sistema (2.29) nei vari casi:

[4] uso la definizione $(\partial G)_{ij} = \partial_i G_j$

[5] Potrebbe sembrare che ci sia anche un termine $O\left(g^2\varepsilon\right)$, ma così non è:

- le β devono essere finite per $\varepsilon \to 0$, quindi saranno presenti solo termini in $O(\varepsilon)$ e $O\left(\varepsilon^0\right)$, i termini in $\frac{1}{\varepsilon}^n$ con $n \geq 1$ si cancelleranno reciprocamente.
- avendo scelto lo schema MS tutti i controtermini saranno divergenti in ε, l'unico termine proporzionale a ε sarà quello dato dall'accoppiamento ad albero, cioé $-\varepsilon g$.

questo ci assicura che la β-function in questo schema è effetivamente definita a meno di $O\left(g^3\right)$.

Inizio a considerare l'unico caso in cui l'accoppiamento anomalo è rilevante al punto critico.Ricordo che $N = 2N_f = 4$.

Imponendo che per gli accopiamenti quartici valga $\beta_i = 0$ e risolvendo il sistema si verifica l'esistenza di solo due zeri reali delle $\beta-$function[6]:

$$\begin{aligned} &(0,0,0) \\ &\left(0, \varepsilon\frac{8\pi^2 4}{8+20}, 0\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Per studiare la natura dei due punti critici studio lo jacobiano $\partial_i\beta_j$ (qui espresso nel caso $v = c = 0$)

$$\partial_i\beta_j = \begin{pmatrix} -\varepsilon + \frac{3v}{8\pi^2} & \frac{N+1}{8\pi^2}v & 0 \\ 0 & -\varepsilon + \frac{N^2+N+8}{2\times 8\pi^2}v & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon + \frac{3}{8\pi^2}v \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

gli autovalori calcolati nei due punti fissi sono rispettivamente $(-\varepsilon, -\varepsilon, -\varepsilon)$ e $\left(-\frac{4}{7}\varepsilon, \varepsilon, -\frac{4}{7}\varepsilon\right)$. Questi punti hanno rispettivamente 4 e 3 operatori rilevanti (almeno ad un loop), e quindi <u>sono entrambi punti fissi instabili</u>. Ci aspettiamo quindi una transizione di fase del prim'ordine guidata dalle fluttuazioni.

Passo adesso a considerare i casi in cui si può considerare $c = 0$, cioé $N_f = \frac{N}{2} = 2$ in assenza di anomalia e $N_f \geq 3$. Come prima impongo $\beta_i = 0$ ma adesso solo per $i = u, v$ e ottengo che gli unici punti fissi reali sono[7]:

$$\begin{aligned} &(0,0) \\ &\left(0, \varepsilon\frac{8\pi^2 4}{8+N(N+1)}\right) \end{aligned} \tag{2.33}$$

E gli autovalori della matrice $\partial_i\beta_j$ sono

$$\begin{aligned} &(-\varepsilon, -\varepsilon) \\ &\left(-\frac{N^2+N-4}{N^2+N+8}\varepsilon, \varepsilon\right) \end{aligned}$$

Quindi i due punti fissi sono entrambi instabili per $N \geq \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, quindi per tutti i casi con $N_f \geq 1$ presi in considerazione da questa teoria.

[6]Faccio uso del fatto che $N = 4$ per verificare che gli altri zeri delle β-function non sono reali

[7]Ci sono altri due punti fissi reali nel caso $N = 1$, solo che come chiarito nella sezione 1.7 per quel caso la lagrangiana usata non è valida.

2.3 Analogia col caso $O(\tilde{N})$

L'esistenza di quei due punti fissi si poteva prevedere anche senza sviluppare interamente i calcoli; il fatto di averli trovati con quelle caratteristiche può essere considerato una efficace verifica dell'esattezza dei passaggi. Quello che non si poteva predire era che i due punti fissi instabili trovati sono i soli zeri delle β-function.

Vado a considerare la lagrangiana effettiva di (2.1), nel caso particolare di $u = c = 0$, e la vado a scrivere in funzione degli $\frac{N(N+1)}{2}$ campi complessi definiti in (2.10):

$$\mathcal{L} = \partial_\nu \alpha_i^* \partial_\nu \alpha_i + m^2 \alpha_i^* \alpha_i + \frac{v}{4}(\alpha_i^* \alpha_i)^2 \tag{2.34}$$

e passando a $\tilde{N} \equiv N(N+1)$ campi reali $\tilde{\alpha}$, normalizzando i campi $\alpha \to \alpha/2$ e definendo $g = \frac{3}{2}v$ mi riconduco perfettamente al caso ben studiato di una lagrangiana scalare con simmetria $O(N^2 + N)$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\nu \tilde{\alpha}_i \partial_\nu \tilde{\alpha}_i + \frac{m^2}{2}\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_i + \frac{g}{4!}(\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_i)^2 \tag{2.35}$$

E come volevasi dimostrare i punti fissi non banali nelle due teorie coincidono:

$$\frac{g^*}{4!} = \frac{\varepsilon 2\pi^2}{N^2 + N + 8} = \frac{v^*}{16} \tag{2.36}$$

La stabilità del punto fisso non banale di $O(\tilde{N})$ è stata già abbondantemente studiata in letteratura (per es. [Cal02] [Cal03]). Se perturbo la lagrangiana (2.34) con delle perturbazioni polinomiali nei campi (polinomiali di grado m), non invarianti rispetto a $O(\tilde{N})$, si può dimostrare che queste perturbazioni sono scrivibili come somme di rappresentazioni $P_{m,l}$ del gruppo $O(\tilde{N})$ di spin $l \leq m$. Questa scrittura è particolarmente comoda perché rappresentazioni con spin diverso non si mischiano rinormalizzando, e la $P_{m,l}$ si mischia solo con $P_{m',l}$ con $m' \leq m$. Gli auto-operatori del flusso di rinormalizzazione saranno per tanto scrivibili come $\sum_m P_{m,l}$. Per ovvie ragioni dimensionali per dimensioni $3 < D \leq 4$ sono certamente irrilevanti tutti gli operatori con $m \geq 4$[8]

Il problema si è quindi ridotto soltanto allo studio delle perturbazioni $P_{2,2}$, $P_{4,2}$ e $P_{4,4}$ (oltre ovviamente ai termini non perturbativi invarianti per $O(\tilde{N})$, cioé $P_{2,0}$ e $P_{4,0}$). Per quanto detto sopra il primo e il terzo

[8]In ([Cal02]) lo si assume valido fino anche in D=3.

saranno certamente auto-operatori di GR, per il secondo invece bisognerà considerare una combinazione $P_{4,2} + zP_{2,2}$. Ricordando che i termini $P_{2,0}$ e $P_{4,0}$ sono rispettivamente rilevante e non rilevante ci basterà trovare un altro operatore rilevante per concludere sulla instabilità del punto fisso. E per l'appunto questo è il caso: la rilevanza dell'operatore $P_{4,4}$ è stata studiata sia nell'ambito della ε-expansion (a 5 loop in [Cal02] e [Kle94]) che in quello della fixed dimension-expansion (a 6 loop in [Car99]) e gli studi concordano nel dire che l'operatore di spin 4 in tutti i casi con $\tilde{N} \geq 3$ è rilevante.

Ritornando al nostro problema e ricordando che $\tilde{N} = N^2 + N \geq 6$ possiamo concludere che il punto fisso (2.36) (e quindi quello non banale di (2.31)) è instabile in $D = 3$.

Quello che si può ancora chiarire estendendo il numero di loop del calcolo fatto in sezione 2.2 è l'esistenza o meno di altri zeri delle β-function che non compaiono ad $O(\varepsilon)$. Questo è appunto l'argomento della sezione 2.4.

2.4 Rinormalizzazione a 5 loop

Le funzioni di correlazione Γ_2 e Γ_4 nel caso di assenza di anomalia ($c = 0$) sono state calcolate fino all'ordine di 5 loop in teoria perturbativa. Gli integrali che necessari per calcolare i contributi dei vari diagrammi di Feynmann sono stati calcolati in [Kle89], i fattori di molteplicità invece sono stati calcolati tramite una package scritta in Mathematica. A differenza di quanto fatto nella sezione 2.2 i calcoli sono stati fatti nel caso di teoria mass-less; si può vedere infatti che le divergenze ultraviolette di una teoria massiva sono le stesse di una teoria mass-less [Kle89], quindi i controtermini. Le definizioni delle costanti di rimonrmalizzazione sono le stesse di 2.17[9] e le β-function si ricavano come vengono ricavate in (2.27).

Le β-function fino all'ordine 5 di teoria perturbativa sono

$$\begin{aligned}\beta_u &= -\varepsilon u + \sum_{k=1}^{5} \sum_{s=0}^{k+1} \beta^{(u)}_{k+1-s,s} u^s v^{k+1-s} \\ \beta_v &= -\varepsilon v + \sum_{k=1}^{5} \sum_{s=0}^{k+1} \beta^{(v)}_{k+1-s,s} u^s v^{k+1-s} u^s\end{aligned} \tag{2.37}$$

dove i coefficienti $\beta^{(u,v)}_{i,j}$ sono riportati nelle tabelle 2.1 e 2.2. Per semplicità di notazione in questa sezione i coefficienti u, v sono normalizzati in

[9]Ovviamente saranno assenti i termini in m e quelli nell'accoppiamento C.

maniera diversa: vecchia normalizzazione $\rightarrow$ nuova,

$$(u,v)_{vecchia} \rightarrow (u,v)_{nuova} = \frac{1}{8\pi^2}(u,v)_{vecchia} \tag{2.38}$$

Il procedimento sopradescritto era quello della ε-espansion nello schema di sottrazione minimale. In realtà lo schema di sottrazione minimale è stato dimostrato essere consistente anche nel caso in cui ε resta finito[10] [Sch89], la regolarizzazione è la stessa (cioé sottrazione dei poli in $\varepsilon = 0$) e il risultato è lo stesso di (2.37), l'unica differenza è che <u>non va considerato il limite</u> $\varepsilon \rightarrow 0$. Nel nostro caso le β-function verranno calcolate in $\varepsilon = 1$ [Str98].

Si può verificare la consistenza delle serie (2.37) con i risultati già noti. Il confronto con i risultati ad un loop di (2.2) è positivo. Per quanto detto nella sezione 2.3, può essere una buona verifica anche controllare che le (2.37) contengano le β-function del modello $O(\tilde{N})$ ϕ^4. Quest'ultime calcolate nello schema di MS in ε-expansion sono riportate in [Kle91][11], e valgono

$$\begin{aligned}
\beta_{O(\tilde{N})} = &- \frac{1}{2}\varepsilon g + g^2\frac{(\tilde{N}+8)}{6} - g^3\frac{(3\tilde{N}+14)}{6} + g^4\frac{1}{432}\Big(33\tilde{N}^2 + 922\tilde{N} + 2960 + \zeta(3)96(5\tilde{N}+22)\Big)\\
&- g^5\frac{1}{7776}\Big(-5\tilde{N}^3 + 6320\tilde{N}^2 + 80456\tilde{N} + 196648 + \zeta(3)96(63\tilde{N}^2 + 764\tilde{N} + 2332)\\
&- \zeta(4)288(5\tilde{N}+22)(\tilde{N}+8) + \zeta(5)1920(2\tilde{N}^2 + 55\tilde{N} + 186)\Big)\\
&+ g^6\frac{1}{124416}\Big(13\tilde{N}^4 + 12578\tilde{N}^3 + 808496\tilde{N}^2 + 6646336\tilde{N} + 13177344\\
&+ \zeta(3)16(-9\tilde{N}^4 + 1248\tilde{N}^3 + 67640\tilde{N}^2 + 552280\tilde{N} + 1314336)\\
&+ (\zeta(3))^2 768(-6\tilde{N}^3 - 59\tilde{N}^2 + 446\tilde{N} + 3264)\\
&- \zeta(4)288(63\tilde{N}^3 + 1388\tilde{N}^2 + 9532\tilde{N} + 21120) + \zeta(5)256(305\tilde{N}^3 + 7466\tilde{N}^2 + 66986\tilde{N} + 165084)\\
&- \zeta(6)(\tilde{N}+8)9600(2\tilde{N}^2 + 55\tilde{N} + 186) + \zeta(7)112896(14\tilde{N}^2 + 189\tilde{N} + 526)\Big)
\end{aligned}$$

ed effettivamente si vede che vale

$$\beta_{O(\tilde{N})}(g) = \frac{3}{8}\beta_u\left(u = 0, v = \frac{4}{3}g\right)$$

e quindi fissando $v = 0$ si ritrova la teoria $O(N)$ ϕ^4.

[10] Benché sia una espansione in dimensione fissa questo metodo viene chiamato MS senza ε-expansion, e il nome di fixed-dimension-expansion viene riservato ad altro [Zin02]

[11] La normalizzazione è quella di

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a + \frac{m^2}{2}\phi^a\phi^a + \frac{16\pi^2}{4!}g\,(\phi^a\phi^a)^2 \tag{2.39}$$

i,j	β^v_{ij}
2,0	$2. + 0.25N + 0.25N^2$
1,1	$1. + N$
0,2	0.75
3,0	$-2.625 - 0.5625N - 0.5625N^2$
2,1	$-2.75 - 2.75N$
1,2	$-2.875 - 0.46875N - 0.15625N^2$
0,3	$-0.75 - 0.375N$
4,0	$10.7397 + 2.92770N + 2.99216N^2 + 0.128906N^3 + 0.0644531N^4$
3,1	$17.5092 + 18.1264N + 1.23437N^2 + 0.617187N^3$
2,2	$25.2599 + 9.50698N + 3.95252N^2 + 0.0117187N^3 + 0.00292968N^4$
1,3	$13.4014 + 8.45267N + 0.626953N^2 + 0.117187N^3$
0,4	$3.61949 + 1.54627N + 0.301169N^2$
5,0	$-63.5743 - 21.0606N - 22.3638N^2 - 2.60592N^3 - 1.30194N^4$
	$+0.00122070N^5 + 0.000406901N^6$
4,1	$-140.774 - 153.387N - 25.2352N^2 - 12.6425N^3 - 0.0298321N^4$
	$-0.00994404N^5$
3,2	$-260.744 - 143.388N - 66.5772N^2 - 2.01164N^3 - 0.526260N^4$
2,3	$-212.910 - 157.262N - 23.2253N^2 - 5.14407N^3 - 0.0223761N^4$
	$-0.00344248N^5$
1,4	$-107.874 - 60.8991N - 15.9106N^2 - 0.709064N^3 - 0.0784548N^4$
0,5	$-20.6853 - 12.8827N - 2.21799N^2 - 0.215929N^3$
6,0	$475.552 + 183.011N + 200.1526N^2 + 34.5561N^3 + 17.9613N^4 + 0.818270N^5$
	$+0.269906N^6 - 0.00244287N^7 - 0.000610718N^8$
5,1	$1339.84 + 1524.75N + 373.269N^2 + 195.251N^3 + 10.3200N^4 + 3.40600N^5$
	$-0.0291545N^6 - 0.00728864N^7$
4,2	$3025.04 + 2080.71N + 1065.77N^2 + 97.1136N^3 + 29.0928N^4 + 0.178866N^5$
	$+0.0283466N^6$
3,3	$3355.06 + 2824.44N + 654.568N^2 + 172.564N^3 + 4.47104N^4 + 0.769792N^5$
2,4	$2471.77 + 1715.81N + 548.534N^2 + 48.2367N^3 + 6.77586N^4 + 0.0200149N^5$
	$+0.00195671N^6$
1,5	$944.177 + 692.287N + 168.563N^2 + 25.2091N^3 + 0.760372N^4 + 0.0526262N^5$
0,6	$157.642 + 109.278N + 29.0944N^2 + 2.78840N^3 + 0.163781N^4$

Tabella 2.1: I coefficienti β^v_{ij} nella equazione (2.37).

i,j	β^u_{ij}
2,0	0
1,1	3
0,2	$1.25 + 0.5N$
3,0	0
2,1	$-5.125 - 0.3125N - 0.3125N^2$
1,2	$-5 - 2.75N$
0,3	$-1.875 - 0.65625N - 0.09375N^2$
4,0	0
3,1	$25.4497 + 2.33904N + 2.288N^2 - 0.101562N^3 - 0.0507812N^4$
2,2	$39.1784 + 23.3634N - 0.0214843N^2 - 0.136718N^3$
1,3	$29.5574 + 12.9326N + 2.32341N^2$
0,4	$7.12024 + 3.75368N + 0.486716N^2 + 0.0253906N^3$
5,0	0
4,1	$-177.097 - 22.3032N - 22.5027N^2 - 0.392090N^3 - 0.178529N^4$
	$+0.0210195N^5 + 0.00700652N^6$
3,2	$-374.999 - 241.790N - 14.5218N^2 - 4.72881N^3 + 0.179072N^4$
	$+0.0584779N^5$
2,3	$-422.833 - 232.645N - 55.3180N^2 + 0.1763229N^3 + 0.137500N^4$
1,4	$-209.997 - 132.747N - 23.9377N^2 - 2.37050N^3$
0,5	$-42.8890 - 25.8808N - 5.72264N^2 - 0.396930N^3 - 0.0136094N^4$
6,0	0
5,1	$1513.47 + 243.234N + 250.177N^2 + 13.8095N^3 + 6.71436N^4$
	$-0.228540N^5 - 0.0762733N^6 - 0.0000799564N^7 - 0.0000199891N^8$
4,2	$4108.25 + 2830.72N + 327.369N^2 + 121.934N^3 - 0.955058N^4$
	$-0.471074N^5 - 0.00569730N^6 - 0.00109038N^7$
3,3	$6155.99 + 3929.91N + 1110.53N^2 + 33.3855N^3 + 4.60723N^4$
	$+0.0693464N^5 + 0.00888516N^6$
2,4	$4661.51 + 3367.08N + 766.260N^2 + 98.8345N^3 - 0.0328212N^4$
	$-0.0247545N^5$
1,5	$1909.14 + 1333.31N + 360.926N^2 + 37.1082N^3 + 2.38066N^4$
0,6	$317.910 + 228.597N + 59.1341N^2 + 7.38414N^3 + 0.318597N^4 + 0.00727653N^5$

Tabella 2.2: I coefficienti β^u_{ij} nella equazione (2.37).

2.4.1 Risommazione delle serie

Le espansioni perturbative in teoria dei campi [LeG90], e tra queste le funzioni di (2.37), sono divergenti; si vede anche dai primi ordini dei risultati numerici che l'andamento è oscillatorio e non si stabilizza. Per ottenere dei risultati numerici è quindi necessario risommare le serie. Userò qui la resummazione di Padé-Borel.

Per semplicità considero per ora una funzione ad una sola variablile $\beta(g)$. Introduco la trasformata di Borel-Leroy di parametro b $B(t)$ di $\beta(g)$

$$\beta(g) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-t} t^b B(gt) \equiv \sum_k \beta_k g^k \tag{2.40}$$

dove si può scrivere un'espansione di B

$$B \to B_{exp}(t) = \sum_k \frac{\beta_k}{\Gamma(k+b+1)} t^k \tag{2.41}$$

Nei casi di interesse fisico si può dimostrare che l'andamento per $k \to +\infty$ delle espansioni perturbative in teorie di campo è del tipo

$$\beta_k \sim c k^b (-a)^k k! [1 + O(1/k)] \tag{2.42}$$

per andamenti di questo tipo si vede subito che l'espansione della trasformata di Borel converge in un raggio $|g| < |\frac{1}{a}|$, ed è presente una singolarità in $-\frac{1}{a}$. Per fare l'integrale in (2.40) è necessaria la conoscenza di B su tutto l'asse reale positivo, conoscenza che non si ha a causa della convergenza solo in un raggio finito. Bisogna quindi cercare una continuazione analitica, e in questo lavoro userò come continuazione un'approssimazione di Padè $[M/N]$ (cfr. [Bak77]):

$$B^{M,N} \equiv \frac{a_0 + a_1 g + \ldots + a_M g^m}{1 + b_1 g + \ldots + b_N g^N} = B_{exp} + O\left(g^{M+N+1}\right) \tag{2.43}$$

attuando la trasformata di Laplace (2.40) della $B^{M,N}$ ottengo così la β_{res} resommata.

Riassumendo in uno schema

$$\beta \xrightarrow{\text{trasf. di Borel}} B_{exp} \xrightarrow{\text{appr. di Pade}} B^{M,N} \xrightarrow{\text{trasf. di Laplace}} \beta_{res} \tag{2.44}$$

Nel nostro caso bisogna fare qualche modifica al ragionamento precedente che tenga conto del fatto che le mie serie asintotiche sono serie in due parametri. Per fare questo utilizzeremo l'idea proposta in [Car99], di fissare il rapporto v/u e di fare la risommazione per una funzione definita su un una linea nel piano (u, v). Introduco[12]

$$\beta_{u,v}(l) \equiv \frac{1}{l}\beta(lu, lv) = \sum_{k=0} l^k \sum_{s=0}^{k+1} \beta_{k+1-s,s} u^{k+1-s} v^s \equiv \sum_{k=0} g_k l^k \Gamma\left(k+b+1\right) \tag{2.45}$$

dove si è definito

$$g_k \equiv \frac{1}{\Gamma\left(k+b+1\right)} \sum_{s=0}^{k+1} \beta_{k+1-s,s} u^{k+1-s} v^s \tag{2.46}$$

e $\sum_k g_k(u,v) l^k$ è l'espansione della trasformata di Borel-Leroy della $\beta_{u,v}(l)$. Così facendo mi sono ricondotto precisamente al caso precedente di risommazione di serie ad una sola variabile; come prima attuo la approssimazione di Padé (2.43), e faccio la trasformata di quest'ultima calcolandola in $l = 1$

$$\beta_{res}(u,v) = \int_0^{+\infty} dt e^{-t} \frac{a_0 + a_1 t + \ldots + a_M t^M}{1 + b_1 t + \ldots + b_N t^N} t^b \tag{2.47}$$

La dipendenza dalle variabili (u, v) è nei parametri a_i, b_j

2.4.2 Risultati

Applico adesso gli strumenti messi a punto nel paragrafo precedente alle β-function di (2.37). Determino i coefficienti g_k per vari valori di b nella (2.46) e successivamente faccio un'approssimazione di Padé $[4, 1]$; alla fine calcolo numericamente l'integrale di (2.47).

Avendo già descritto per somme linee il procedimento mi limito a riportare i risultati: nelle figure sono stati riportati gli zeri delle β-function,

Per quanto chiarito nella 2.3 siamo sicuri che la teoria conterrà almeno i punti fissi di $O(N^2 + N)$. Tramite il conto a 5-loop vogliamo verificare che resti valido il risultato della 2.2, cioé che i punti fissi sono solo quelli della teoria $O(N^2 + N)$, ed è effettivamente così. Questo si può vedere dai grafici in figura 2.5. I grafici sono stati fatti calcolando le β-function trasformate

[12] Per semplicità di notazione non indico se si tratti della $\beta^{(u)}$ o della $\beta^{(v)}$, ma va inteso come fatto per entrambe.

su un reticolo 81×81, e individuando uno zero all'interno di una placchetta ogni volta che i valori della funzione ai 4 vertici non hanno lo stesso segno. Ottengo così due cuve che individuano gli zeri delle funzioni, e queste due curve si intersecano solo nei due punti fissi di $O(N^2 + N)$.

Si può anche controllare che effettivamente i risultati sono robusti rispetto al cambiamento dei parametri della trasformazione di Borel-Leroy; in figura 2.6 vengono presentati come esempio i grafici relativi al caso $N = 2$ per vari valori di b; si vede che il grafico non cambia sostanzialmente al variare di b.

Tramite una routine scritta in Mathematica è stato possibile trovare la posizione dei punti fissi in forma più precisa, affinando di volta in volta il reticolo; i risultati sono riportati in tabella:

b	$N = 2$	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	Passo del reticolo
0	4.17×10^{-1}	1.76×10^{-1}	8.95×10^{-2}	5.35×10^{-2}	$< 2 \times 10^{-5}$
2	3.91×10^{-1}	1.74×10^{-1}	8.93×10^{-2}	5.35×10^{-2}	$< 1 \times 10^{-5}$
4	3.81×10^{-1}	1.74×10^{-1}	8.93×10^{-2}	5.35×10^{-2}	$< 1 \times 10^{-5}$
6	3.75×10^{-1}	1.73×10^{-1}	8.92×10^{-2}	5.35×10^{-2}	$< 1 \times 10^{-5}$
8	3.72×10^{-1}	1.73×10^{-1}	8.92×10^{-2}	5.34×10^{-2}	$< 1 \times 10^{-5}$

Posso mediare rispetto al valore di b e ottenere quindi il risultato di un v^* critico:

N	v^*	Δv^*	g^*	$N^2 + N$
2	3.87×10^{-1}	1.62×10^{-2}	14.6	6
4	1.74×10^{-1}	1.19×10^{-3}	6.55	20
6	8.93×10^{-2}	1.20×10^{-4}	3.37	42
2	5.35×10^{-2}	2.05×10^{-5}	2.02	72

dove ho riportato anche il risultato del punto critico con la normalizzazione standard di g nella lagrangiana 2.35 invariante $O(N^2 + N)$.

Purtroppo i calcoli del punti fissi $O(4N_f^2 + 2N_f)$ presenti in letteratura sono fatti in schemi diversi da questo [But04], quindi non è possibile fare un controllo numerico.

2.5 Conclusioni e possibili sviluppi

Il risultato finale ottenuto è che la transizione chirale della QCD con fermioni nell'aggiunta che è associata ad una rottura di simmetria del tipo $U(2N_f) \to$

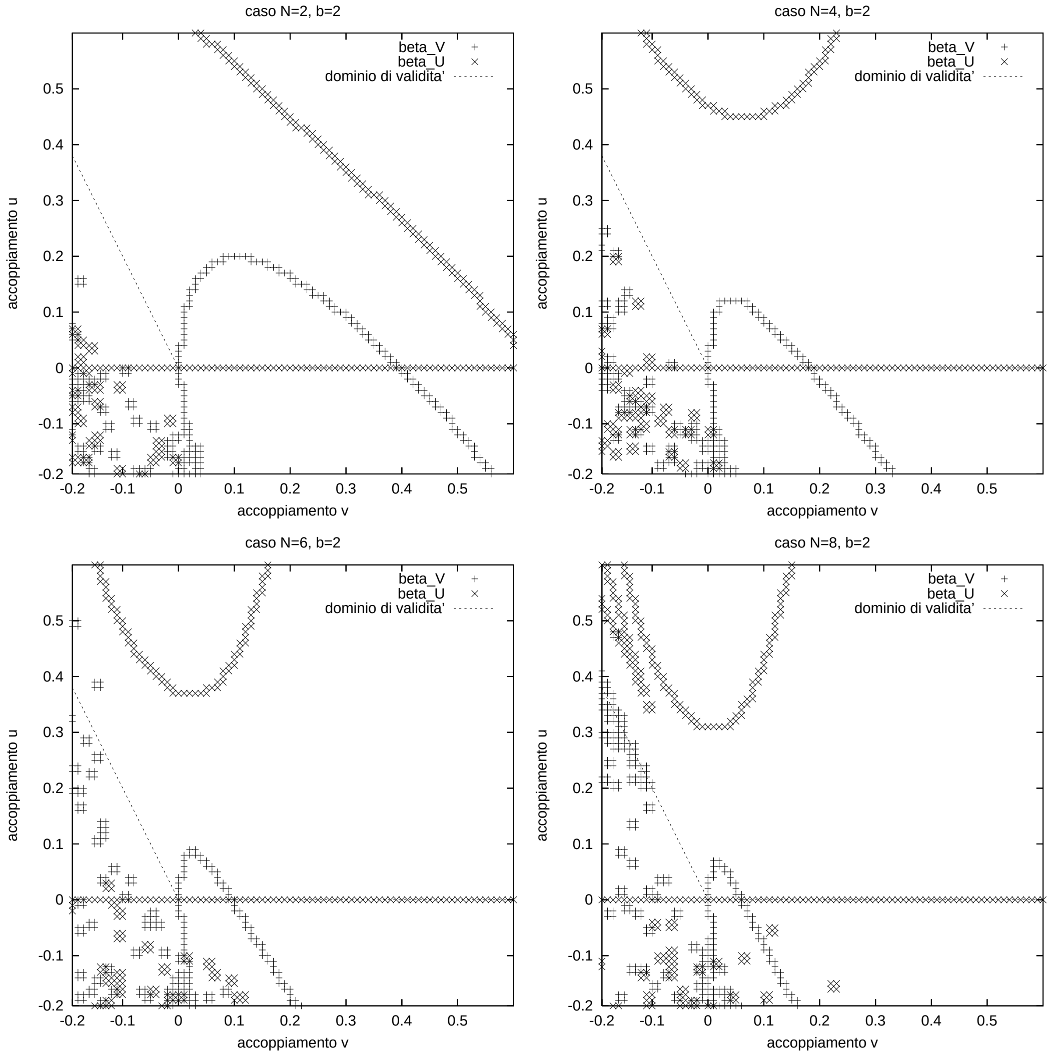

Figura 2.5: Zeri delle β-function, al variare di N_f ma tenendo fisso il parametro b di Leroy.

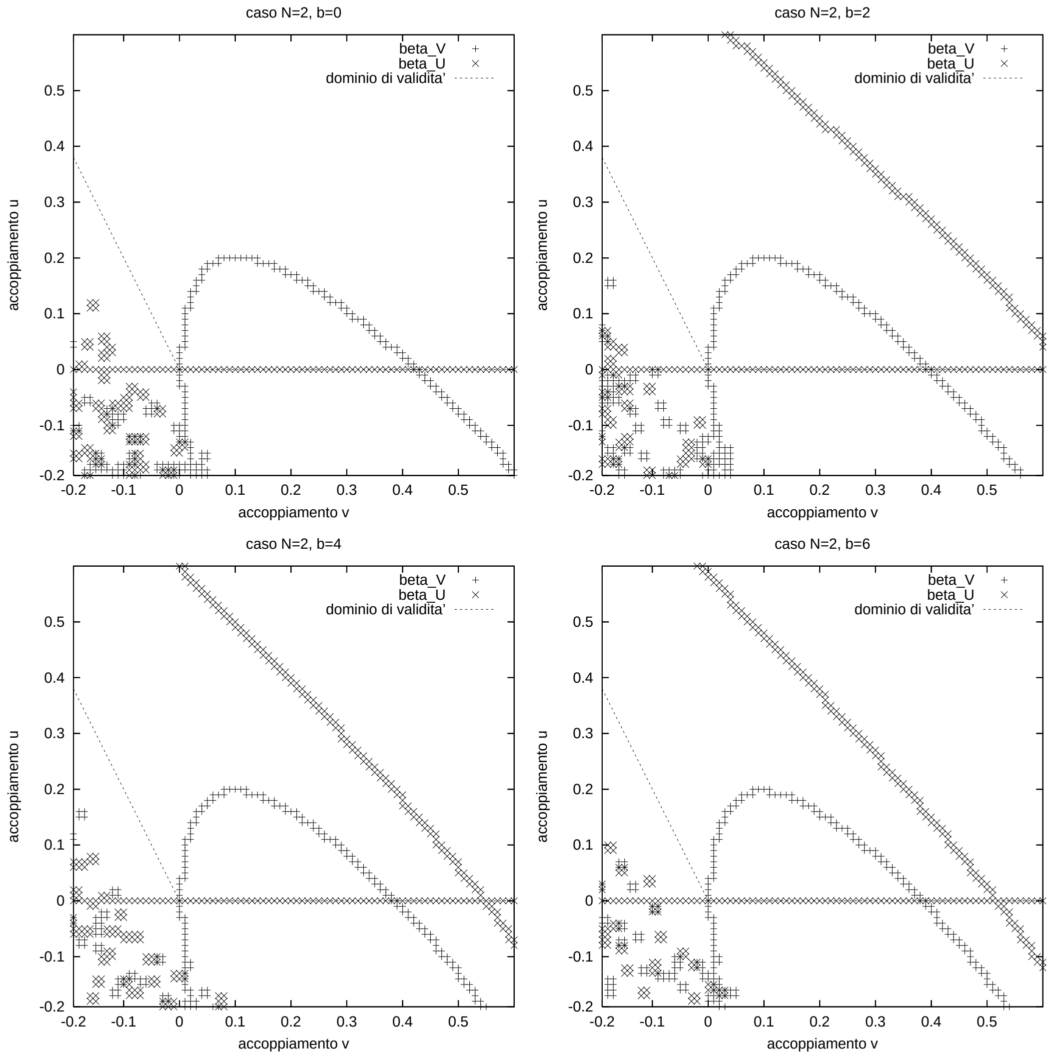

Figura 2.6: Fissato un N vario il parametro b di della 2.46.

$O(2N_f)$ (o $SU(2N_f) \to O(2N_f)$ a seconda che si consideri una teoria in cui è presente o meno l'anomalia assiale) non è una transizione della seconda specie. Questo risultato invalida le descrizioni della transizione giustificate da argomenti di universalità[13]. Il calcolo è stato fatto a 5 loop[14] nei casi in cui si può trascurare il termine anomalo, cioé per $N_f > 2$.

A parte va considerato il caso di $N_f = 2$, in questo caso sono presenti tre interazioni quartiche e il calcolo è stato fatto ad un loop[15]. La rottura di simmetria è $SU(4) \simeq O(6) \to O(4)$, e il risultato prevede una transizione di prima specie. Il nostro risultato è in contrapposizione con quello presentato in [Kar98], qui viene simulata su reticolo questa teoria[16] e gli autori dicono di aver riconosciuto una transizione continua con i coefficienti di $O(6)$[17]. Pensiamo che il disaccordo sia dovuto al fatto che la simulazione presentata in quel lavoro è su un reticolo relativamente piccolo, $8^3 \times 4$, non abbastanza per individuare l'ordine della transizione.

Il lavoro fatto lascia aperte alcune questioni, alcune fortemente legate al risultato ottenuto, altre dal respiro un po' più ampio. Sarebbe utile estendere il calcolo fatto nella sezione 2.2 a più loop anche nel caso $N_f = 2$ in cui si considera l'anomalia, e rifare la simulazione su un reticolo più grosso per cercare una misura che confermi i risultati ottenuti. Un altro lavoro interessante sarebbe estendere questi risultati anche al caso di densità barionica $\mu \neq 0$.

[13] A posteriori non è valida nemmeno la trattazione presente in questo lavoro, dal momento che è un'analisi di una teoria effettiva giustificata da universalià. Ma questo non è un problema: qui si è dimostrato che vale universalità $\Rightarrow \neg$vale universalità, quindi abbiamo dimostrato che non valgono gli argomenti di universalità per *consequentia mirabilis*.

[14] Nello schema di rinormalizzazione massless di sottrazione minimale senza ε-expansion

[15] Schema massivo, sottrazione minimale senza ε-expansion

[16] All'interno di uno studio sul rapporto tra transizione chirale e deconfinamento.

[17] Si intende $O(6) \to O(5)$, transizione che è comunque diversa dalla nostra.

Appendice A

Stabilità e pattern in (2.1)

Siamo interessati solo alla parte statica di (2.1), cioé

$$\mathcal{V} = -m^2 Tr\ \Phi^\dagger\Phi + \frac{v}{4}(Tr\ \Phi^\dagger\Phi)^2 + \frac{u}{4}Tr\ (\Phi^\dagger\Phi)^2 + c(\mathcal{D}et\ \Phi + \mathcal{D}et\ \Phi^\dagger) \quad \text{(A.1)}$$

dove per semplicità ho cambiato $m^2 \to -m^2$, così da avere condensazione per valori positivi di m^2. Per semplificare questa scrittura parto dalla considerazione che la matrice $\Phi^\dagger\Phi$ è reale e semidefinita positiva, quindi

$$\exists\ U,\ \text{t.c. } UU^\dagger = 1,\ U^\dagger\Phi^\dagger\Phi U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{pmatrix} \quad \text{(A.2)}$$

con $\lambda_i \geq 0$. Posso riscrivere i primi tre termini come

$$-m^2\sum_i^N \lambda_i + \frac{v}{4}\left(\sum_i^N \lambda_i\right)^2 + \frac{u}{4}\sum_i^N \lambda_i^2 \quad \text{(A.3)}$$

per il termine anomalo invece uso che

$$\prod_i \lambda_i = \mathcal{D}et\ \Phi^\dagger\Phi = |\mathcal{D}et\ \Phi|^2 \Rightarrow \mathcal{D}et\ \Phi = \prod_i \sqrt{\lambda_i} \times e^{i\theta} \quad \text{(A.4)}$$

quindi possiamo riscrivere la (A.1) in funzione di $N+1$ variabili, invece delle $N(N+1)$ iniziali:

$$\mathcal{V} = -m^2\sum_i^N \lambda_i + \frac{v}{4}\left(\sum_i^N \lambda_i\right)^2 + \frac{u}{4}\sum_i^N \lambda_i^2 + 2c\prod_i \sqrt{\lambda_i}\cdot\cos\theta \quad \text{(A.5)}$$

questa scrittura è assolutamente funzionale sia per studiare la stabilità del potenziale che per studiare il pattern. Infatti la condizione che mi serve assicurarmi di descrivere la giusta rottura di simmetria è che, detto Φ_0 il minimo del potenziale, esista una matrice A invertibile tale che $A^T A = \Phi_0$, e l'unica limitazione che ho è che quindi $\mathcal{D}et\ \Phi_0 \neq 0$.

Inizio a considerare il caso notevolmente più semplice di $c = 0$; in questo caso infatti mi riconduco ad una forma bilineare da massimizzare all'interno del dominio $\lambda_i \geq 0$.

$$\mathcal{V} = -m^2\eta \cdot \lambda + \frac{1}{4}\lambda^T \begin{pmatrix} u+v & v & \cdots & v \\ v & u+v & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & v \\ v & \cdots & v & u+v \end{pmatrix} \lambda \tag{A.6}$$

Dove si è usato $\eta = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, \ldots, 1)$ e $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_N)$. Per le condizioni di stabilità studio l'andamento a $+\infty$ della parte quadratica e impongo che sia sempre > 0; ottengo:

$$\begin{aligned} &u + v \geq 0 \\ &u + Nv \geq 0 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Invece, per quanto riguarda il pattern, devo studiare il minimo di (A.6). Si ottiene facilmente che le derivate prime si annullano in $\lambda = \dfrac{2m^2}{u+Nv}\eta$, e che gli autovalori dello jacobiano sono u ($N-1$ volte degenere) e $u + Nv$. Il secondo è positivo per ipotesi di stabilità quindi sarà un minimo locale solo se $u > 0$. Posso cercare anche dei punti stazionari vincolati sulla chiusura del dominio, ma si vede facilmente che questi saranno punti sella per $u\,0$.

Si ha quindi che la rottura è $U(2N_f) \to O(2N_f) \iff u > 0$.

Ben più complesso è il caso di $c \neq 0$. Ricordo che in questo caso per procedere bisogna fissare $N = 4$ Per trovare le condizioni di stabilià devo verificare la positività a $+\infty$ di (A.5). Studiando l'andamento di $(\ldots, \lambda_i x^{\alpha_i})$ per x grande si ottengono facilmente le sequenti equazioni:

$$\begin{aligned} &u + v \geq 0 \\ &u + (N-1)v \geq 0 \\ &\frac{v}{4}\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 + \frac{u}{4}\sum_i \lambda_i^2 - 2|c| \prod_i \sqrt{\lambda_i} \geq 0 \end{aligned} \tag{A.8}$$

dove senza perdere di generalità possiamo fissare $\sum_i \lambda_i^2 = 1$. Successivamente posso considerare

$$\prod_i \sqrt{\lambda_i} = G\left(\lambda_1, \lambda_2, \sum_i \lambda_i \equiv A\right) \tag{A.9}$$

massimizzare rispetto a λ_1 e λ_2 e ottenere una funzione della sola A. Ricordo che avendo fissato i λ_i sull'ipercerchio ho che $A \in [1,2]$. Il risultato è dato da:

$$G^2(A) = \begin{cases} \frac{1}{64}\left(A^2-2\right)^2 & \text{per } A \leqslant 2\sqrt{\frac{3}{7}} \\ \frac{1}{3456}\left(-3A+\sqrt{3}\sqrt{4-A^2}\right)^2\left(-6+3A^2+\sqrt{3}A\sqrt{4-A^2}\right) & \text{per } A \geq 2\sqrt{\frac{3}{7}} \end{cases} \tag{A.10}$$

Adesso per concludere non mi resta che trovare le condizioni su u, v, c tali che

$$\frac{v}{4}A^2 + \frac{u}{4} - 2|c|G(A) > 0 \quad \forall A \in [1,2] \tag{A.11}$$

La verifica per $A^2 \in [1, \frac{12}{7}]$ mi fa concludere

$$\begin{aligned} & v + u - |c| > 0 \\ & \frac{12}{7}v + u - \frac{2|c|}{7} > 0 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Per studiare invece la parte $x \equiv A^2 \in [\frac{12}{7}, 4]$ invece utilizzo la convessità di $G(\sqrt{x})$ in questo intervallo, per cui per verificare la (A.11) basta che sia verificata nei due punti estremali; ottengo quindi le condizioni:

$$\begin{aligned} & 4v + u - 2|c| > 0 \\ & \frac{12}{7}v + u - \frac{2|c|}{7} > 0 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Eliminando le condizioni ridondanti ho il sistema:

$$\begin{cases} 4v + u \geq 2|c| \\ v + u \geq |c| \end{cases} \tag{A.14}$$

Come era logico aspettarsi queste condizioni contengono le (A.7).

Passo adesso alle condizioni sul pattern; come preannunciato per questo scopo non sono tanto interessato a trovare i minimi di (A.5) quanto ad essere sicuro che non esistano minimi assoluti sulla chiusura del dominio. Putroppo questo non si riesce a fare, dal momento che analiticamente non si riescono a trovare tutti i punti stazionari all'interno del dominio. Tuttavia posso fornire delle condizioni che mi assicurino che non ci siano minimi locali sulla chiusura, o per lo meno che questi ultimi non abbiano energia minore di un minimo locale che sappiamo facilmente trovare.

Per semplicità nei calcoli cambio la notazione con $\lambda_i \to \lambda_i^2$, così da ricondurmi a funzioni analitiche, ottengo quindi:

$$\mathcal{V} = -m^2 \sum_i^N \lambda_i^2 + \frac{v}{4} \left(\sum_i^N \lambda_i^2 \right)^2 + \frac{u}{4} \sum_i^N \lambda_i^4 + 2c \prod_i \lambda_i \cdot \cos\theta \tag{A.15}$$

e minimizzando rispetto a θ ho $\cos\theta \to -1$.

Inizio ad escludere la possibilità di minimi del tipo $(0, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Per far questo basta studiare

$$\partial_{\lambda_1} \mathcal{V}_{|\lambda_1=0} = -2c\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \tag{A.16}$$

e quindi questo non potrà mai essere un punto di minimo.

Passo a considerare $(0, 0, \lambda_3, \lambda_4)$. Minimizzo rispetto a λ_3, λ_4, e fissati questi valori studio lo jacobiano. Quest'ultimo ha autovalori negativi (all'interno del dominio) solo se $u + 2|c| \geq 0$[1], quindi sarà un minimo locale $\iff u + 2|c| \leq 0$.

Analogamente studio $(0, 0, 0, \lambda_4)$. Minimizzo rispetto a λ_4 e studio lo jacobiano in questo punto: questo avrà 3 autovalori proporzionali a $-\dfrac{u}{u+v}$, e quindi sarà di minimo locale $\iff u \leq 0$.

Arrivo quindi alla conclusione che se mi limito a considerare $u \geq 0$ sono sicuro che di non poter avere punti di minimo sulla chiusura, e quindi che il pattern sia quello desiderato[2].

Ricordo che $u \geq 0$ è solo una condizione sufficiente, non so dare argomenti sulla sua necessarietà; per darli sarebbe neccessario saper descrivere i minimi all'interno del dominio.

[1] Qui si fa uso anche delle condizioni di stabilità.

[2] Come accennato prima si riesce a risalire facilmente ad un minimo locale della forma $\dfrac{\sqrt{2}m}{\sqrt{u+4v-|c|}}(1,1,1,1)$. Si può vedere che per alcuni valori di c questo minimo a valori più alti degli altri punti stazionari presi in considerazione. Questo ci convince del fatto che ci potrebbero essere valori dei parametri per cui il pattern non è quello desiderato.

Appendice B

La teoria $N_f = 1$ con anomalia

Come accennato nella sezione 1.7, in questo caso non è valida la trattazione del capitolo 2. In questo caso il determinante ha dimensione in massa 2, quindi la lagrangiana più generale possibile dovrà contenere anche termini del tipo massa×determinante e (determinante)^2.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& Tr\ \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi + m^2 Tr\ \Phi^\dagger \Phi + \frac{v}{4}(Tr\ \Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{u}{4} Tr\ (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \\ &+ c(\mathcal{D}et\ \Phi + \mathcal{D}et\ \Phi^\dagger) + c_1(\mathcal{D}et\ \Phi + \mathcal{D}et\ \Phi^\dagger)^2 + c_2(\mathcal{D}et\ \Phi_B + \mathcal{D}et\ \Phi_B^\dagger)(Tr\ \Phi^\dagger \Phi)\end{aligned} \tag{B.1}$$

Questo problema è molto simile al problema di transizione chirale in QCD con due fermioni nella fondamentale di colore ($N_C > 2$), già trattato in [But03]. Seguendo l'idea di quel lavoro cerco di ricondurmi ad un modello $O(3)$ di due vettori 3-dimensionali reali, che trasformano come $\phi_1, \phi_2 \rightarrow U\phi_1, U\phi_2$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 + \frac{r_1}{2}\phi_1^2 + \frac{r_2}{2}\phi_2^2 + \frac{t_1}{4!}(\phi_1)^2 + \frac{t_2}{4!}(\phi_2)^2 + \frac{t_3}{4!}\phi_1^2\phi_2^2 + \frac{t_4}{4!}\phi_1\phi_2 \tag{B.2}$$

Per farlo uso la base $(e_1, e_2, e_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} i\sigma_1, \frac{1}{2} i\sigma_3)$ e usando

$$\Phi = \sum_j (\phi_1^{(j)} + i\phi_2^{(j)}) e_j \tag{B.3}$$

si vede che le due lagrangiane si equivalgono se:

$$\begin{aligned}
t_1 &= -\frac{3}{4}u - \frac{3}{2}v - 6c_1 - 6c_2 \\
t_2 &= -\frac{3}{4}u - \frac{3}{2}v - 6c_1 + 6c_2 \\
t_3 &= -\frac{9}{2}u - 3v + 12c_1 \\
t_4 &= 3u \\
r_1 &= c + m^2 \\
r_2 &= c - m^2
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Ci siamo ricondotti quindi alla stessa forma studiata in [But03], e possiamo riproporre i risultati trovati in quel lavoro. La (B.4) è una lagrangiana con due masse indipendenti, ci si aspetta quindi che descriva transizioni di fase critiche e multicritiche. Le condizioni di stabilità sono: $t_{1,2} > 0$, $t_3 > -2\sqrt{t_1 t_2}$ e $t_3 + t_4 > -2\sqrt{t_1 t_2}$.

Un primo studio si può fare impostando il calcolo in approssimazione di campo medio. In figura (B) sono rappresentate le possibili fasi e le relative

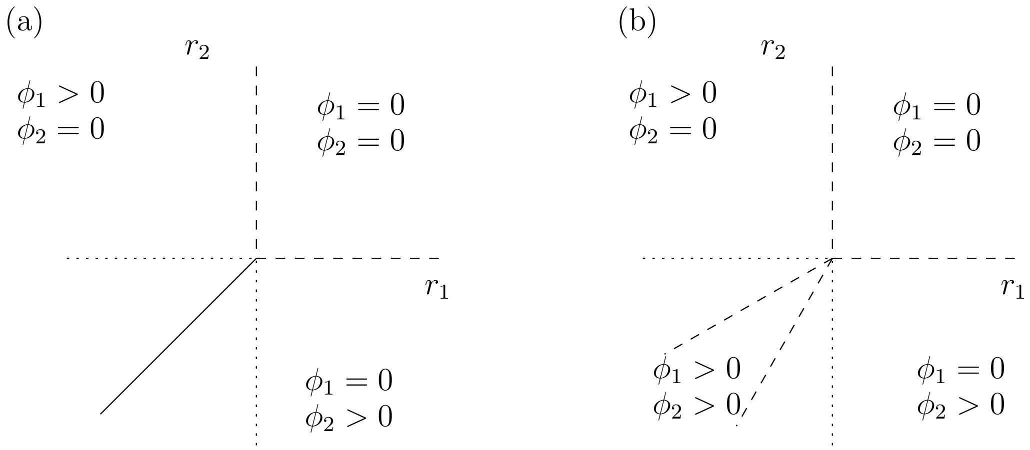

Figura B.1: Possibili fasi e transizioni: le linee continue indicano transizioni del I ordine, quelle tratteggiate del II.

transizioni: sugli assi sono riportati i valori di r_1, r_2, e le linee (tratteggiate e continue) dividono le possibili fasi. I due grafici si riferiscono rispettivamente alle due possibilità (che dipendono dai valori dei parametri quartici): la condizione $t_3 > 2\sqrt{t_1 t_2}$, $t_4 + t_3 > 2\sqrt{t_1 t_2}$ nella figura (a) e le altre possibilità nella (b). Nella (a) sono rappresentate 3 fasi, una disordinata con

$\phi_1 = 0, \phi_2 = 0$, e due odinate con un campo $\phi_i \neq 0$ e l'altro nullo. La transizione ordine-disordine corrisponde ad una transizione $O(3) \to O(2)$ del second'ordine, quella ordine-ordine è invece del prim'ordine; il punto $r_1 = r_2 = 0$ è un punto bicritico. Il grafico (b) invece rappresenta quattro fasi, la quarta fase ha entrambi i valori non nulli; le transizioni sono tutte del second'ordine, e il punto $r_1 = r_2 = 0$ è quadricritico. Nella fase IV il minimo può essere con $\phi_1 \parallel \phi_2$ o $\phi_1 \perp \phi_2$, rispettivamente se vale $t_4 < 0$ e $-2\sqrt{t_1 t_2} < t_3 + t_4 < 2\sqrt{t_1 t_2}$ o se $t_4 > 0$ e $-2\sqrt{t_1 t_2} < t_3 < 2\sqrt{t_1 t_2}$. A seconda di quali dei due minimi venga scelto cambia anche il pattern di rottura nel passaggio dalle fasi II o III alla IV, o una Ising o una $O(2)$[1].

Ovviamente quanto detto fin'ora è valido in approssimazione di campo medio, e in generale le fluttuazioni potranno trasformare le transizioni da II ordine in I ordine. Questo ci permette di supporre che detto g il parametro che individua la rottura anomala, e sapendo che per $g = 0$ la transizione è del I ordine, la transizione resterà di I ordine anche per $|g|$ piccoli, benché la teoria di campo medio preveda che sia di II ordine.

[1]La simmetria della teoria nello stato disordinato è $O(3) \otimes \mathbb{Z}_2$, negli stati ordinati II o III è invece $O(2) \otimes \mathbb{Z}_2$, nel IV invece può essere a seconda dei casi una $O(2)$ o una $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$.

Bibliografia

[Alf97] M. G. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, “QCD at finite baryon density: Nucleon droplets and color superconductivity,” Phys. Lett. B **422** (1998) 247 [arXiv:hep-ph/9711395].

[And04] J. O. Andersen and M. Strickland, “Resummation in hot field theories,” arXiv:hep-ph/0404164.

[Bak77] G. A. . Baker, B. G. Nickel and D. I. Meiron, “Critical Indices From Perturbation Analysis Of The Callan-Symanzik Equation,” Phys. Rev. B **17** (1978) 1365.

[But03] A. Butti, A. Pelissetto and E. Vicari, “On the nature of the finite-temperature transition in QCD,” JHEP **0308** (2003) 029 [arXiv:hep-ph/0307036].

[But04] A. Butti and F. Parisen Toldin, “The critical equation of state of the three-dimensional O(N) universality class: N ¿ 4,” arXiv:hep-lat/0406023.

[Car99] J. M. Carmona, A. Pelissetto and E. Vicari, “The N-component Ginzburg-Landau Hamiltonian with cubic anisotropy: a six-loop study,” Phys. Rev. B **61** (2000) 15136 [arXiv:cond-mat/9912115].

[Cal02] P. Calabrese, A. Pelissetto and E. Vicari, “Multicritical phenomena in O(n(1)) + O(n(2)) symmetric theories,” Phys. Rev. B **67** (2003) 054505 [arXiv:cond-mat/0209580].

[Cal03] P. Calabrese, A. Pelissetto and E. Vicari, “The critical behavior of magnetic systems described by Landau-Ginzburg-Wilson field theories,” arXiv:cond-mat/0306273.

[Fuk03] K. Fukushima, “Relation between color-deconfinement and chiral restoration,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **129** (2004) 557 [arXiv:hep-ph/0309059].

[Haa92] R. Haag, “Local Quantum Physics, Fields, Particles, Algebras”, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992)

[Han01] S. Hands, “Lattice matter,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106** (2002) 142 [arXiv:hep-lat/0109034].

[Hat03] Y. Hatta and K. Fukushima, “On the nature of thermal QCD phase transitions,” arXiv:hep-ph/0311267.

[Hon04] D. K. Hong, “High density effective theory of QCD,” arXiv:hep-ph/0401057.

[Kar98] F. Karsch and M. Lutgemeier, “Deconfinement and chiral symmetry restoration in an SU(3) gauge theory with adjoint fermions,” Nucl. Phys. B **550** (1999) 449 [arXiv:hep-lat/9812023].

[Kha02] D. Kharzeev, “What are we learning from RHIC?,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 13 [arXiv:hep-ph/0211253].

[Kle91] H. Kleinert, J. Neu, V. Schulte-Frohlinde, K. G. Chetyrkin and S. A. Larin, “Five Loop Renormalization Group Functions Of O(N) Symmetric Phi**4 Theory And Epsilon Expansions Of Critical Exponents Up To Epsilon**5,” Phys. Lett. B **272** (1991) 39 [Erratum-ibid. B **319** (1993) 545] [arXiv:hep-th/9503230].

[Kle89] H. Kleinert, “Gauge Fields in Condensed Matter” (World Scientific, Singapore, 1989), http://www.physik.fu-berlin.de/kleinert/re.html

[Kle94] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, “Exact five loop renormalization group functions of phi**4 theory with O(N) symmetric and cubic interactions: Critical exponents up to epsilon**5,” Phys. Lett. B **342** (1995) 284 [arXiv:cond-mat/9503038].

[Kog85] J. B. Kogut, J. Polonyi, H. W. Wyld and D. K. Sinclair, "Hierarchical Mass Scales In Lattice Gauge Theories With Dynamical Light Fermions," Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1980.

[Kog99] J. B. Kogut, M. A. Stephanov and D. Toublan, "On two-color QCD with baryon chemical potential," Phys. Lett. B **464** (1999) 183 [arXiv:hep-ph/9906346].

[Kog00] J. B. Kogut, M. A. Stephanov, D. Toublan, J. J. M. Verbaarschot and A. Zhitnitsky, "QCD-like theories at finite baryon density," Nucl. Phys. B **582** (2000) 477 [arXiv:hep-ph/0001171].

[Lan89] N. P. Landsman, "Limitations To Dimensional Reduction At High Temperature," Nucl. Phys. B **322** (1989) 498.

[LeG90] "Large-Order Behaviour of Perturbation Series," ed. by J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, (North-Holland, 1990).

[Lin90] A. D. Linde, "Particle Physics And Inflationary Cosmology," Chur, Switzerland: Harwood (1990) 362 p. (Contemporary concepts in physics, 5).

[Leu92] H. Leutwyler and A. Smilga, "Spectrum of Dirac operator and role of winding number in QCD," Phys. Rev. D **46** (1992) 5607.

[Moc03] A. Mocsy, F. Sannino and K. Tuominen, "Confinement versus chiral symmetry," Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 182302 [arXiv:hep-ph/0308135].

[Nus99] S. Nussinov and M. A. Lampert, "QCD inequalities," Phys. Rept. **362** (2002) 193 [arXiv:hep-ph/9911532].

[Pes80] M. E. Peskin, "The Alignment Of The Vacuum In Theories Of Technicolor," Nucl. Phys. B **175** (1980) 197.

[Pes97] M. E. Peskin, "Duality in supersymmetric Yang-Mills theory," arXiv:hep-th/9702094.

[Qui99] M. Quiros, "Finite temperature field theory and phase transitions," arXiv:hep-ph/9901312.

[Raj00] K. Rajagopal and F. Wilczek, "The condensed matter physics of QCD," arXiv:hep-ph/0011333.

[Sch03] T. Schafer, "Quark matter," arXiv:hep-ph/0304281.

[Sch89] R. Schloms and V. Dohm, "Minimal Renormalization Without Epsilon Expansion: Critical Behavior In Three-Dimensions," Nucl. Phys. B **328** (1989) 639.

[Sku00] J. Skullerud, "Lattice simulations of QCD-like theories at non-zero density," arXiv:hep-lat/0012012.

[Smi94] A. Smilga and J. J. M. Verbaarschot, "Spectral sum rules and finite volume partition function in gauge theories with real and pseudoreal fermions," Phys. Rev. D **51** (1995) 829 [arXiv:hep-th/9404031].

[Smi96] A. V. Smilga, "Physics of thermal QCD," Phys. Rept. **291** (1997) 1 [arXiv:hep-ph/9612347].

[Smi00] A. V. Smilga, "Aspects of chiral symmetry," arXiv:hep-ph/0010049.

[Ste04] M. A. Stephanov, "QCD phase diagram and the critical point," arXiv:hep-ph/0402115.

[Str98] M. Strosser, S. A. Larin and V. Dohm, "Minimal renormalization without epsilon expansion: Three-loop amplitude functions of the O(n) symmetric phi**4 theory in three dimensions below T(c)," Nucl. Phys. B **540** (1999) 654 [arXiv:cond-mat/9806103].

[Swi70] J. A. Swieca, pubblicato su Cargèse Lectures in Physics vol 4, 1970 ed D Kastler (New York: Gordon and Breach)

[Tou00] D. Toublan and J. J. M. Verbaarschot, arXiv:hep-th/0008086.

[Vaf84] C. Vafa and E. Witten, "Restrictions On Symmetry Breaking In Vector - Like Gauge Theories," Nucl. Phys. B **234** (1984) 173.

[Wei96] S. Weinberg, "The Quantum Theory Of Fields. Vol. 2: Modern Applications," (Cambridge University Press, 1996)

[Wir00] J. Wirstam, "Chiral symmetry in two-color QCD at finite temperature," Phys. Rev. D **62** (2000) 045012 [arXiv:hep-ph/9912446].

[Zin99] J. Zinn-Justin, "Quantum Field Theory And Critical Phenomena," (Clarendon Press, Oxford, 1999)

[Zin00] J. Zinn-Justin, "Quantum field theory at finite temperature: An introduction," arXiv:hep-ph/0005272.

[Zin02] J. Zinn-Justin, "Phase Transition and Renormalization Group: from Theory to Numbers," pubblicato su Poincaré Seminar 2002, Vacuum Enerrgy - Renormalization, (Birkhauser 2002)