Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche e Astrofisiche
A. A. 2004-05

Tesi di Laurea Specialistica

Gamma Ray Bursts

Candidato
Giuseppe Palma

Relatore
Prof. Mario Vietri

Alla memoria del nonno Gigi
e della nonna Margherita

τῆς γὰρ ἀθρόας ἐπιβολῆς πυκνὸν δεόμεθα, τῆς δὲ κατὰ μέρος οὐχ ὁμοίως. | βαδιστέον μὲν οὖν καὶ ἐπ' ἐκεῖνα συνεχῶς, ἐν ⟨δὲ⟩ τῇ μνήμῃ τὸ τοσοῦτο ποιητέον, ἀφ' οὗ ἥ τε κυριωτάτη ἐπιβολὴ ἐπὶ τὰ πράγματα ἔσται καὶ δὴ καὶ τὸ κατὰ μέρος ἀκρίβωμα πᾶν ἐξευρήσεται, τῶν ὁλοσχερωτάτων τύτων εὖ περιειλημμένων καὶ μνημονευομένων· ἐπεὶ καὶ τῷ τετελεσιουργημένῳ τοῦτο κυριώτατον τοῦ παντὸς ἀκριβώματος γίνεται, τὸ ταῖς ἐπιβολαῖς ὀξέως δύνασθαι κρῆσθαι καὶ ⟨τοῦτο ἀδύνατον μὴ πάντων⟩ πρὸς ἁπλᾶ στοιχειώματα καὶ φωνὰς συναγομένων. οὐ γὰρ οἷόν τε τὸ πύκνωμα τῆς συνεχοῦς τῶν ὅλων περιοδείας εἶναι μὴ δυναμένου διὰ βραχεῶν φωϝῶν ἅπαν ἐμπεριλαβεῖν ἐν αὑτῷ τό καὶ κατὰ μέρος ἂν ἐξακριβωθέν.

Epicuro, *Lettera a Erodoto*, pp. 68-70, Ariccia (RM), Fabbri Editori (1995)

Indice

Ringraziamenti **9**

Introduzione **11**

1 Il fenomeno e i modelli **13**
1.1 La scoperta 13
1.2 BATSE e Beppo-SAX 14
1.3 Il modello del fireball a shock interni-esterni 25
1.3.1 Gli shock esterni 27
1.3.2 Gli shock interni 29
1.4 Il problema dell'energia e il *beaming* 31
1.5 Il modello a lupara 33
1.6 La natura dell'oggetto centrale 35

2 Shock iperrelativistici in atmosfere esponenziali **41**
2.1 Introduzione 41
2.2 La soluzione iperrelativistica non perturbata 42
2.3 Perturbazioni alla soluzione iperrelativistica 46
2.3.1 Equazioni del primo ordine per le perturbazioni 48
2.3.2 Condizioni di Taub per le perturbazioni 51
2.3.3 Il parametro s 55
2.3.4 Considerazioni sulle soluzioni perturbate 59

Bibliografia **67**

Ringraziamenti

Qualcuno di cui condivido pienamente l'opinione sostiene che, alla fine di un lavoro che ha richiesto tanta fatica e sacrificio, esprimere la propria riconoscenza a chi si ritiene opportuno sia un piacere prima che un dovere. Non volendo peraltro mancare di gratitudine nei *miei* confronti, sento in coscienza di poter affermare che questo lavoro mi ha assorbito una quantità di risorse come nessun altro finora.

È perciò con vero piacere che ringrazio il professore Vietri per avermi introdotto con la vivacità di cui è capace nel meraviglioso mondo dell'astrofisica teorica. Puntuale nel far notare le sottigliezze nascoste nella fisica spesso insidiosa dei modelli, mi ha trasmesso un interesse sempre vivo per un problema di cui apprezzo, ora che è risolto, ancor più la bellezza. Mi sembra doveroso, poi, ricordare con ammirato affetto il professore Mollo, esempio di come capacità didattiche altamente non comuni possano essere utili anche se impiegate nell'educazione di ragazzi appena decenni: grazie per quel paio di ore settimanali di matematica da programma ministeriale, ma grazie soprattutto per tutte le altre spese a raccontare aneddoti, chicche e raffinatezze di *ogni* tipo.

Un pensiero di profonda riconoscenza va ai miei compagni di avventura di questi cinque anni pisani: Andrea, Umberto, Luca, Annalisa, Alessandro e Giulia, Jacopo, Pietro, Fabio, Carlo, Enrico e Liliana. Con loro ho vissuto esperienze indimenticabili e affrontato le difficoltà di questo corso di studi con dantesca mitigazione. Un discorso a parte riguarda, poi, Damiano, che ha retto le paranoie del sottoscritto con stoica sopportazione e infinita pazienza; la sua vicinanza e la sua vera amicizia mi hanno formato, credo, più di quanto lui immagini.

Per uno che, come me, vede nel proprio mondo di origine una bussola per il presente e per il futuro, gli amici del paese rappresentano un appiglio alla spensieratezza nei momenti difficili e un inno alla gioia nei giorni felici. È così che mi piace ricordare questi anni in compagnia di Sandro, Mauro, Vincenzo, Gianluca, Andrea, Fabrizio, Michele, Chiara e Brizio. Plusvalore: il mitico Cola. Vero, grande amico, mi è stato vicino a tutto tondo: sincero conforto nelle difficoltà e ineguagliabile compagno di cretinate.

Arrivati a questo punto, diventa decisamente difficile riassumere in poche righe che debito di riconoscenza si ha nei confronti di alcune persone. Mi riferisco ai miei familiari: i miei grandi genitori, i miei piccoli ed eccezionali Veronica e Luigi, le mie straordinarie zie Assuntina e Rosina. Dire quanto mi sono stati vicini, che fiducia hanno avuto nell'appoggiare con convinzione le mie scelte, come sono stati perfetti nel formare (e non penso solo agli ultimi anni) quello che sono diventato, nel bene e nel male, s'intende, non credo sia possibile. Forse il modo migliore per ringraziarli è lasciare loro solo immaginare quanto io apprezzi tutto quanto hanno fatto per me, sperando magari di averli ricompensati, puranche in minima parte, con la soddisfazione per qualche mio successo.

L'ultimo pensiero voglio dedicare a Francesca, i cui occhi mi ricordano che la conquista più bella di quest'anno non è il lavoro che vado a presentare. La sua dolcezza e la sua arguta semplicità mi hanno spinto a superare i momenti bui e hanno dato un senso splendido ai miei sforzi. Grazie, perché mi basta un suo sorriso.

Introduzione

Questo lavoro di tesi ha come tema i Gamma Ray Bursts (GRBs), vale a dire esplosioni di raggi gamma che scoppiano nell'universo con una frequenza quasi giornaliera.

Nel primo capitolo si cerca di illustrare l'argomento, riassumendo per linee generali lo stato attuale delle conoscenze.

In particolare, all'inizio si discute del modo in cui questi eventi sono stati scoperti ormai quasi quarant'anni fa; il discorso si arricchisce di dettagli osservativi man mano che vengono discussi i risultati ottenuti con la realizzazione dei due principali esperimenti effettuati sui GRBs: inizialmente BATSE ha permesso uno studio statisticamente consistente della fase dell'esplosione vera e propria (generalmente della durata massima di un centinaio di secondi), permettendo, tra l'altro, di dare forti indicazioni circa l'origine cosmologica di questi fenomeni; infine Beppo-SAX ha permesso per la prima volta l'osservazione della sorgente nell'X, rivelando la presenza di una coda nella curva di luce che, seguendo una legge a potenza, si spegne in un orizzonte temporale talvolta di mesi (il cosiddetto afterglow).

La discussione prosegue con la descrizione del modello del fireball a shock interni ed esterni: si illustrano i meccanismi che si ritengono alla base dell'emissione gamma osservata a terra e si discute la possibilità che questo avvenga attraverso irraggiamento di sincrotrone (o di auto-inverse-Compton da sincrotrone) degli elettroni non termici accelerati con un meccanismo di Fermi a cavallo degli shock. Questi si dovrebbero formare negli ejecta espulsi a fattori di Lorentz molto grandi (dell'ordine di 100 o addirittura 1000) da una sorgente centrale: il modello a shock esterni prevede la formazione di onde d'urto per l'interazione della shell in espansione con il materiale dell'ambiente circumstellare; quello a shock interni propone un'emissione di shell di ejecta a fattori di Lorentz variabili che dovrebbe portare alla formazione di onde d'urto nel momento in cui le shell più veloci raggiungono e sbattono sulle più lente.

Si discute, poi, dei problemi connessi con le energie enormi che si prevede siano irraggiate dalla sorgente qualora l'emissione di radiazione fosse isotropa (10^{53-54} erg) e della possibilità di ridurre il problema considerando una collimazione radiativa.

Segue la descrizione del modello a lupara, in cui si propone che l'estrema variabilità di luminosità osservata (sulla scala del millisecondo) sia frutto dell'impatto di proiettili (bullets) di ejecta iperrelativistici (di cui finora si è solo postulata l'esistenza) sul materiale circumstellare. Tale sezione è particolarmente importante nel contesto della ricerca svolta in questa tesi, dal momento che il fine che ha mosso l'indagine effettuata è proprio la produzione dei proiettili del modello.

Si conclude il capitolo introduttivo con una carrellata sulle caratteristiche che i candidati progenitori delle sorgenti devono avere e si accenna al modello della collapsar.

Il secondo capitolo contiene, invece, la parte originale del lavoro di tesi condotto: l'obiettivo è indicare un modo possibile con cui si potrebbero formare i bullets del modello a lupara. A questo scopo si studia la propagazione degli shock (newtoniani, prima, e iperrelativistici, poi) in un'atmosfera il cui profilo decresce esponenzialmente. Dalla letteratura si sa che in entrambi i regimi questi shock tendono ad accelerare violentemente (nel caso iperrelativistico la crescità non riguarda, ovviamente, la velocità, ma il fattore di Lorentz Γ associato). È già noto che questi shock in regime newtoniano sono instabili per corrugazione del fronte in un particolare range di lunghezze d'onda; non era stata ancora condotta, però, un'analisi delle instabilità corrugazionali di tali shock in regime iperrelativistico. Quello che si descrive è la procedura utilizzata per studiare in regime lineare queste perturbazioni. Attraverso l'integrazione numerica delle equazioni differenziali ottenute con le opportune condizioni al contorno, si ricava che le quantità idrodinamiche del materiale shockato tendono ad uscire rapidamente dal regime di linearità a causa di un'amplificazione molto veloce delle perturbazioni. Da questo si trae spunto per discutere quali possono essere le implicazioni di tale instabilità nella creazione dei proiettili di materia espulsa dal motore interno di un GRB.

Capitolo 1

Il fenomeno e i modelli

1.1 La scoperta

Da ormai quarant'anni si osservano ogni giorno violente esplosioni di raggi gamma che si accendono imprevedibilmente nel cielo.

La storia ha inizio nei primi anni Sessanta, quando l'aviazione militare statunitense mise in orbita dei satelliti dotati di rivelatori di neutroni, raggi X e gamma allo scopo di verificare l'eventuale esistenza di esperimenti nucleari in atto nell'Unione Sovietica, esperimenti questi rigorosamente vietati dai trattati in vigore all'epoca. Per meglio assolvere il compito assegnato, questi satelliti erano congegnati per lavorare a coppie: immessi in orbita circolare ad una distanza di circa 125000 km dalla Terra in punti diametralmente opposti, garantivano la copertura pressoché totale del pianeta. Battezzati col nome Vela (dallo spagnolo *velar*, vegliare, controllare), cominciarono a registrare le prime esplosioni di raggi gamma 'sospette' verso la metà degli anni Sessanta (la prima in assoluto fu osservata da Vela 4a,b nel luglio del '67). Questi dati, tuttavia, furono archiviati in attesa di ulteriori informazioni; fu solo nel '73 che le informazioni accumulate grazie ai più recenti satelliti Vela 5 e Vela 6 tra il '69 e il '72 permisero di escludere che queste esplosioni provenissero dalla Terra [35, 43]: rispetto ai satelliti precedenti della stessa serie, questi potevano non solo registrare eventi gamma nella regione dello spettro compresa fra i 150 e i 750 KeV, ma anche stabilire, sia pure con incertezze dell'ordine di qualche grado, la direzione d'arrivo della radiazione, fornendo in questo modo evidenze circa l'origine extrasolare del fenomeno. Il metodo per determinare la direzione era quello della triangolazione dei ritardi temporali con cui lo stesso evento veniva osservato dai rivelatori a bordo di satelliti diversi. La necessità, infatti, di osservare simultaneamente tutto il cielo impediva ad un singolo rivelatore di indicare la direzione di un'esplosione gamma. L'affinarsi della risoluzione temporale degli strumenti usati permise già verso la fine degli anni Sessanta ai satelliti Vela 5 e 6 di adottare questa tecnica, aprendo la strada a progetti più ampi quale l'*InterPlanetary Network* (IPN), una collaborazione di una rete di satelliti, che negli Settanta e Ottanta determinò le sorgenti di *Gamma Ray Bursts* (GRBs) entro delle scatole di errore di pochi primi d'arco: in questo modo fu possibile escludere che queste sorgenti fossero sorgenti di interesse già note, come emettitori X o pulsar.

1.2 BATSE e Beppo-SAX

Una prima svolta decisiva nel ramo osservativo della ricerca sui GRBs si ebbe nel '91 con il lancio del *Compton Gamma-Ray Observatory* (CGRO), a bordo del quale si svolgeva il *Burst and Transient Experiment* (BATSE) [45, 55], un progetto che, col supporto dei dati forniti da OSSE (*Oriented Scintillation Spectrometer Experiment*), Comptel (*Imaging Compton Telescope*) ed EGRET (*Energetic Gamma-Ray Experiment Telescope*), registrò più di 2700 esplosioni. La principale conclusione che fu immediatamente possibile evidenziare dalle osservazioni concerneva la distribuzione essenzialmente isotropa di questi eventi: l'assenza di momenti di dipolo o quadrupolo significativi confermava l'ipotesi di un'origine cosmologica dei GRBs [44]. Ad avvalorare quest'interpretazione si aggiungeva un'analisi statistica della luminosità apparente degli eventi, la cosiddetta *Log*N-*Log*S. L'idea consiste nell'ipotizzare l'omogeneità delle sorgenti nell'universo (ovvero assumere l'ipotesi cosmologica), calcolare la distribuzione in flusso degli eventi che ne deriverebbe e confrontarla con la distribuzione osservata dei GRBs. Operativamente, il flusso S decresce col quadrato della distanza l:

$$S \propto l^{-2} \quad \Longrightarrow \quad dS \propto l^{-3} dl. \tag{1.1}$$

D'altronde, in un ambiente radialmente omogeneo $(\partial/\partial r = 0)$[1], per il numero di sorgenti N si ha:

$$dN \propto l^2 dl. \tag{1.2}$$

Combinando la (1.1) e la (1.2) si ottiene la seguente distribuzione differenziale teorica:

$$dN \propto \frac{dS}{S^{5/2}}, \tag{1.3}$$

da cui è possibile ricavare una distribuzione integrale del tipo:

$$N(>S) \propto S^{-3/2}. \tag{1.4}$$

Questo è esattamente quello che si osserva a grandi flussi (vale a dire per le sorgenti vicine). A piccoli flussi, ovvero a grandi distanze, la previsione risulta invece abbondante: quello che si osserva è una rarefazione delle

[1]Si noti che per formulare questa argomentazione non è necessaria l'isotropia delle sorgenti $(\partial/\partial\Omega = 0)$.

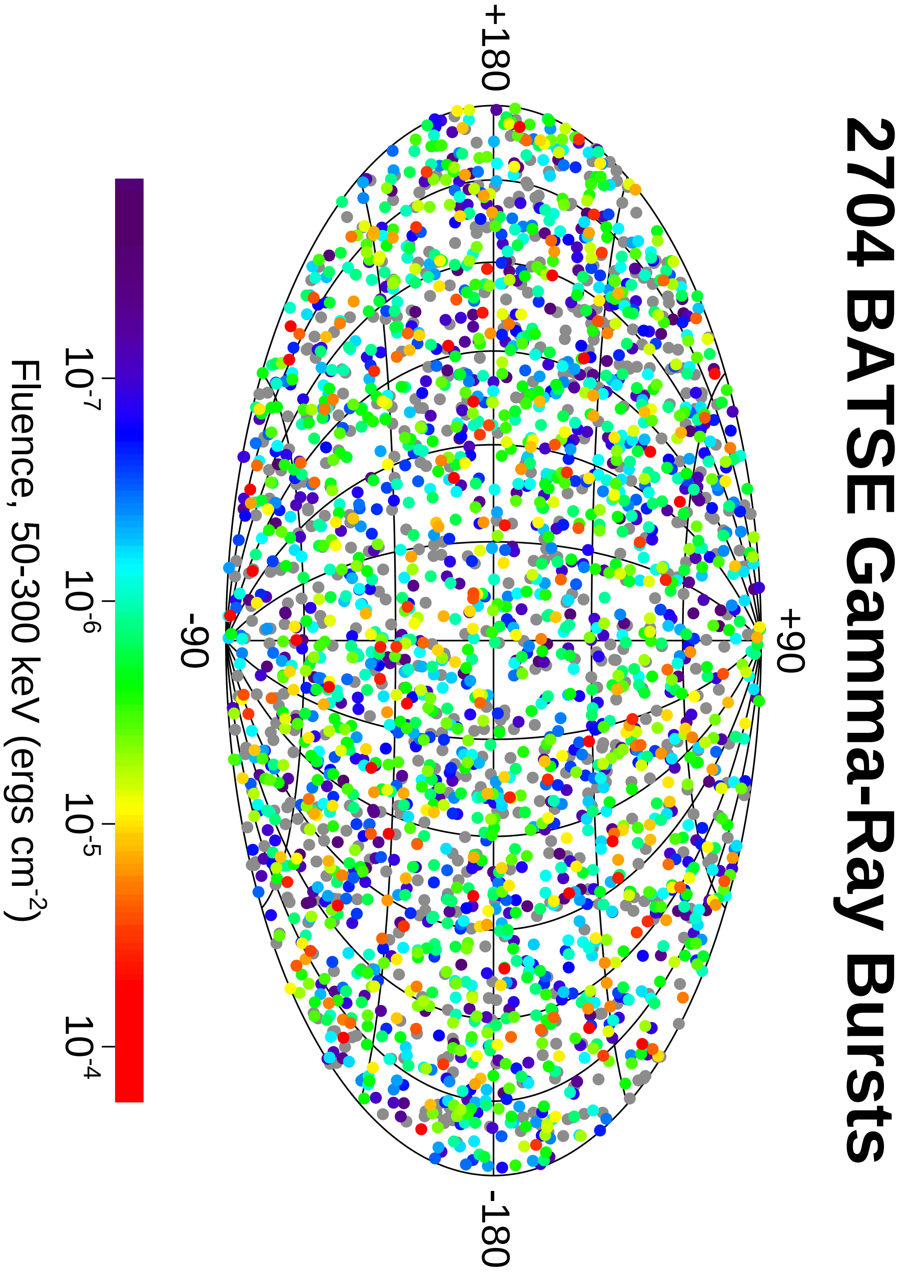


Figura 1.1: Distribuzione sulla sfera celeste degli eventi registrati da BATSE. La scala cromatica indica il flusso sulla terra, integrato sulla durata del burst. Anche il semplice colpo d'occhio comunica un'idea di isotropia delle sorgenti.

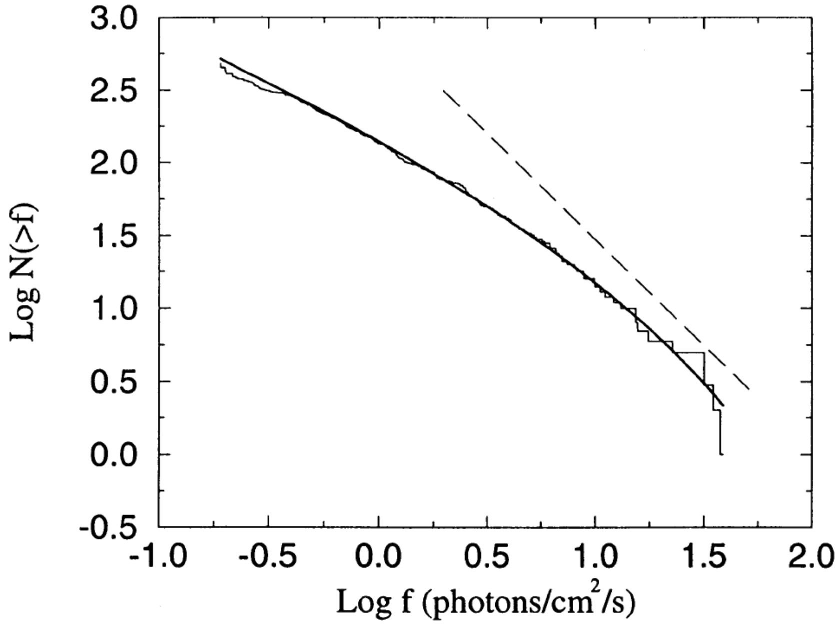


Figura 1.2: Distribuzione *Log*N-*Log*S dei GRBs rilevati da BATSE. La linea tratteggiata è quella a pendenza $-3/2$ ed evidenzia la scarsità di eventi a piccoli flussi rispetto alle previsioni euclidee.

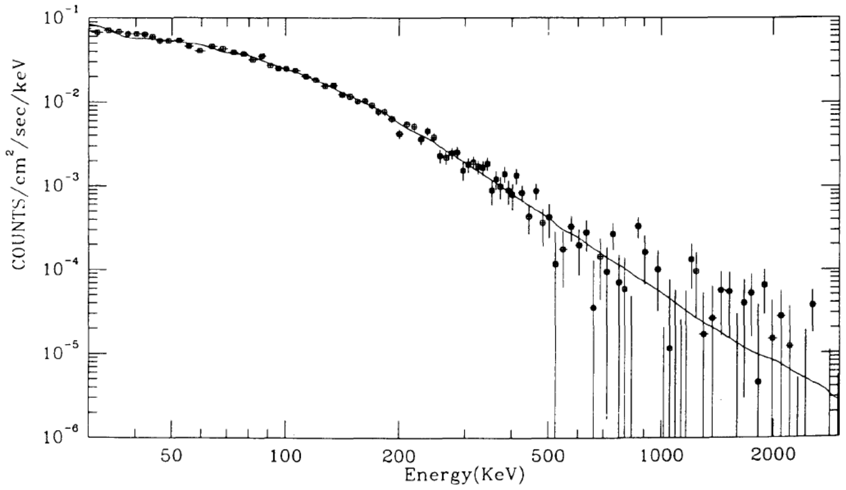


Figura 1.3: Spettro del GRB911127. L'indice spettrale a basse energie è $\alpha = -0.968 \pm 0.022$, mentre nella regione a destra $\alpha = -2.427 \pm 0.07$. Qui $\epsilon_0 = (149.5 \pm 2.2)$ KeV.

sorgenti su larga scala. Questo fenomeno, in realtà, non è una contraddizione dell'ipotesi cosmologica, in quanto risulta spiegato in maniera naturale dall'espansione dell'universo. Senza entrare nel dettaglio dei calcoli, l'idea consiste nel ricordare la distinzione che esiste in ambito cosmologico tra distanza effettiva (col cui cubo (1.2) cresce il volume delle sfere in un modello di Friedman massimamente simmetrico) e distanza di luminosità l_{L}, la cui definizione è tale da mantenere inalterata la forma della (1.1). Tenendo presente questo particolare, è possibile considerare un universo piatto, dominato dalla materia, e sviluppare la dipendenza di l_{L} da l al primo ordine non banale in $z-1$ (il redshift delle sorgenti): così facendo si ottiene una *Log*N-*Log*S teorica estremamente aderente ai dati osservativi. Sul versante delle caratteristiche dei singoli eventi registrati, con BATSE fu possibile determinare fino a energie di vari GeV una forma spettrale non termica [2] del tipo:

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-\alpha}, \quad \begin{cases} \alpha \sim 1 \text{ per } \epsilon < \epsilon_0 \\ \alpha \sim 2-3 \text{ per } \epsilon > \epsilon_0 \end{cases}, \tag{1.5}$$

con $\epsilon_0 \sim 0.1 - 1$ MeV. La durata dei bursts in sé varia da qualche millisecondo fino a 10^3 s con una distribuzione bimodale ben definita per eventi

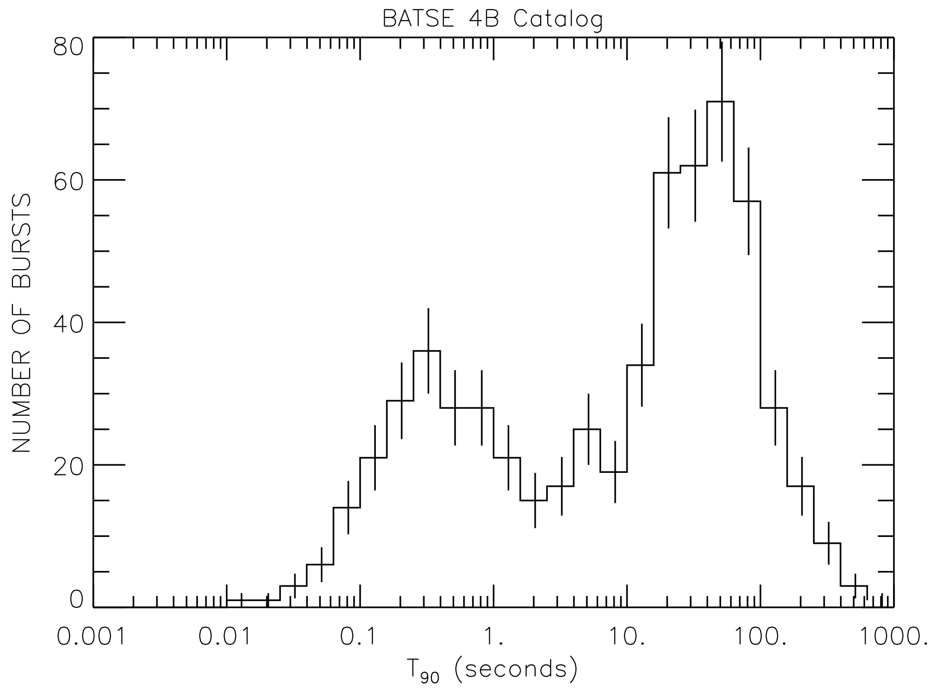


Figura 1.4: Distribuzione temporale dei GRBs. Come indice della durata si è scelto T_{90}, definito come l'intervallo tra l'istante in cui l'energia raccolta raggiunge il 5% del totale del burst e quello in cui raggiunge il 95%.

più lunghi o più brevi di $t_{\rm b} \sim 2$ s (piccata su $T \sim 0.3$ s e $T \sim 20$ s) [36]. È stata, inoltre, evidenziata una anticorrelazione (a 2.5σ) tra la durezza dello spettro e la durata dell'evento [20]. A questo proposito, esistono in-

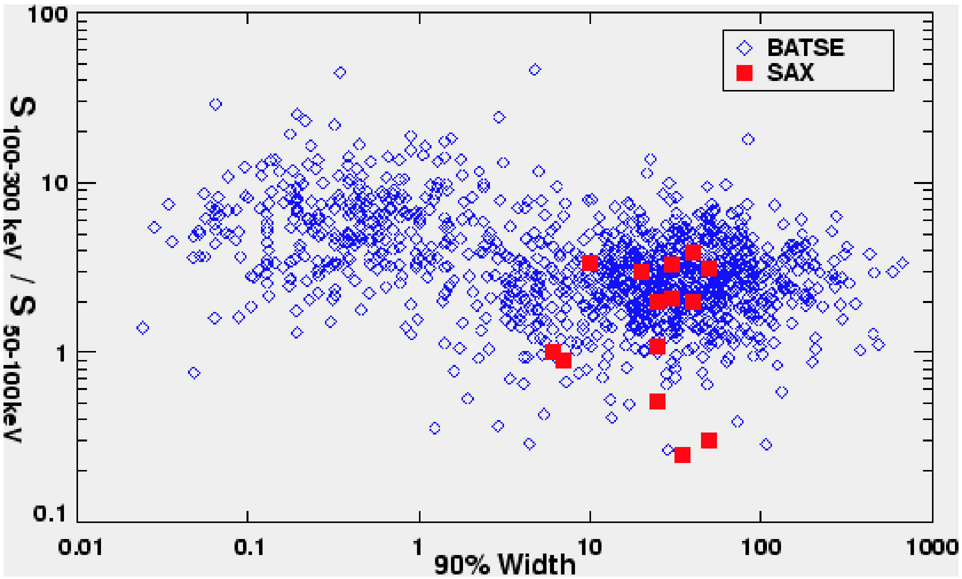
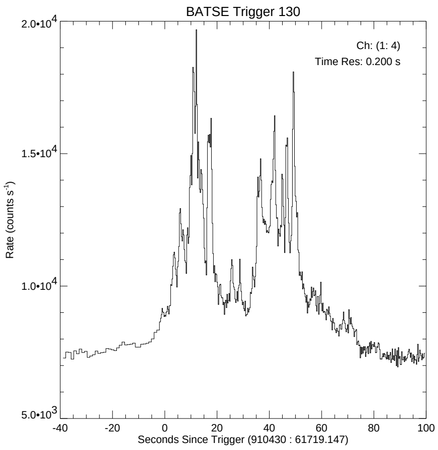


Figura 1.5: Diagramma *durezza dello spettro-durata del burst.*

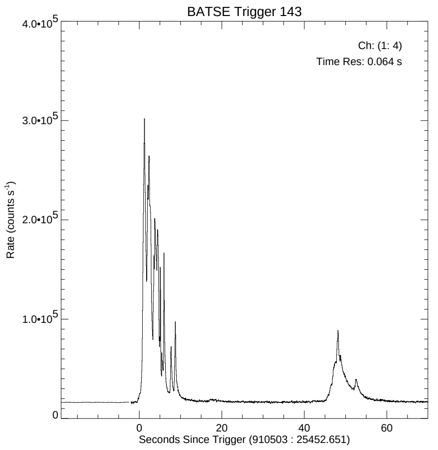
dicazioni in base alle quali i GRBs più brevi sembrerebbero appartenere ad un sottogruppo diverso da quello dei loro parenti più duraturi. In particolare, la distribuzione radiale dei GRBs di minore durata è compatibile con $d \log N / d \log S = -\frac{3}{2}$, caratteristico di una distribuzione omogenea euclidea. È stato fatto notare, tuttavia, che questa peculiarità potrebbe essere un effetto puramente osservativo legato alla difficoltà di registrare bursts brevi a piccoli flussi: la mancata osservazione degli effetti cosmologici, attesi in base a quanto descritto sopra, sarebbe semplicemente dovuta al fatto che, alle distanze a cui questi si fanno apprezzabili, i flussi vengono talmente depressi che i GRBs corti non vengono rilevati.

Una caratteristica notevole evidenziata da BATSE è la grande diversità delle curve di luminosità dei vari GRBs [61, 73]. Alcuni (soprannominati FREDs - *Fast Rise - Exponential Decay*) presentano un picco impulsivo seguito da uno spegnimento più lento; altri appaiono particolarmente regolari; altri ancora, molto duraturi, esibiscono fluttuazioni consistenti, talvolta con un aspetto chiaramente periodico.

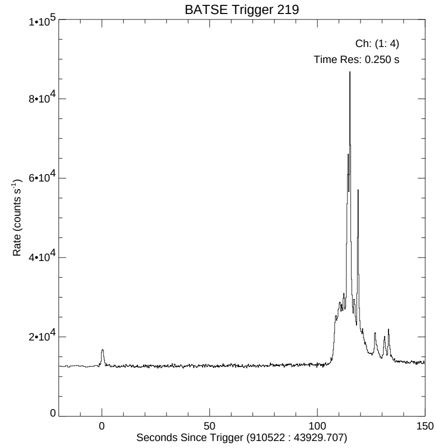
La struttura su piccola scala del burst manifesta irregolarità anche per tempi dell'ordine del millisecondo (questo limite, osservativo più che astrofisico, potrebbe sottendere una realtà più variegata fino a scale temporali di qualche ordine più piccole) [72]. La successione dei picchi, oltre che le



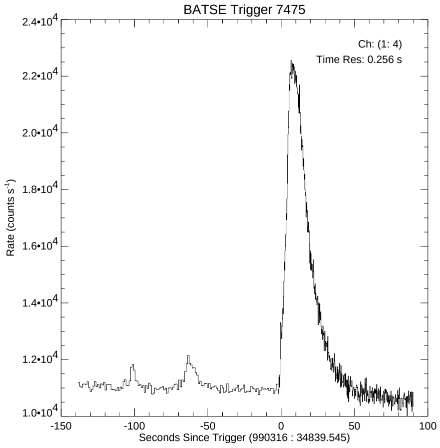
(a) GRB910430.



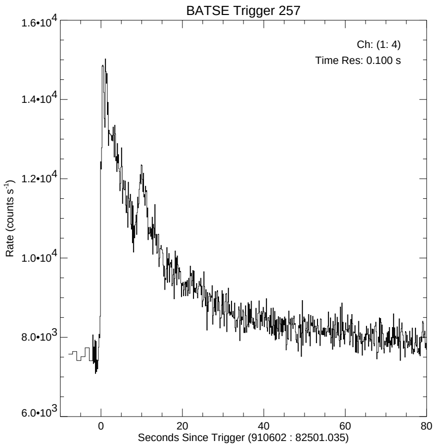
(b) GRB910503.



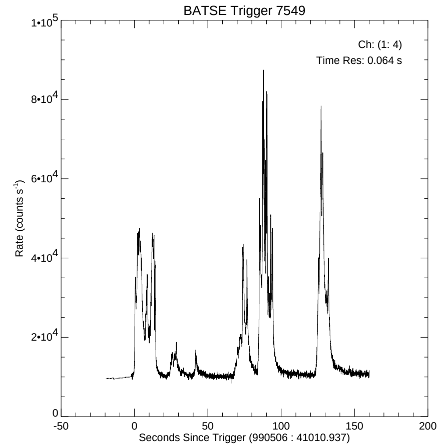
(c) GRB910522.



(d) GRB990316.

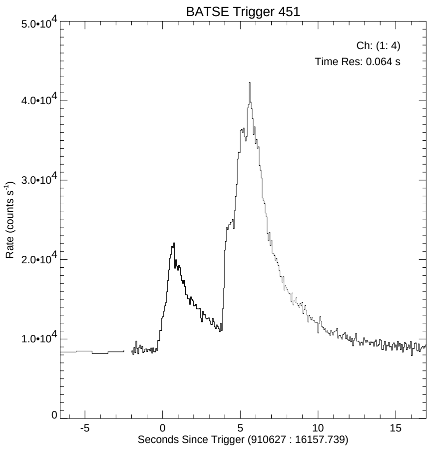


(e) GRB910602.

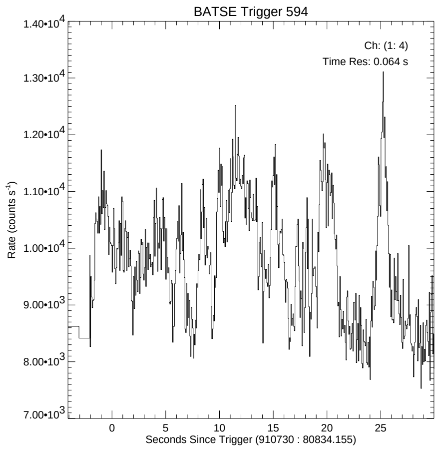


(f) GRB990506.

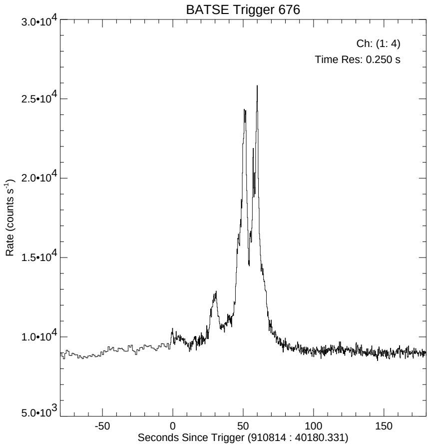
Figura 1.6: Esempi di curve di luce di GRBs.



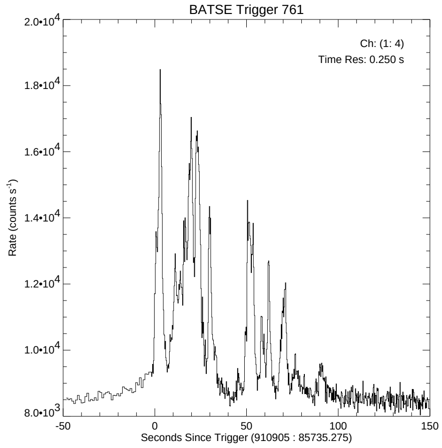
(a) GRB910627.



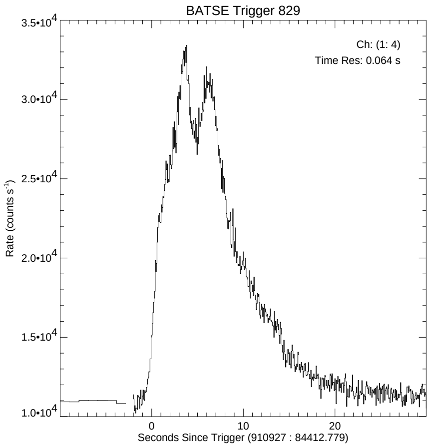
(b) GRB910730.



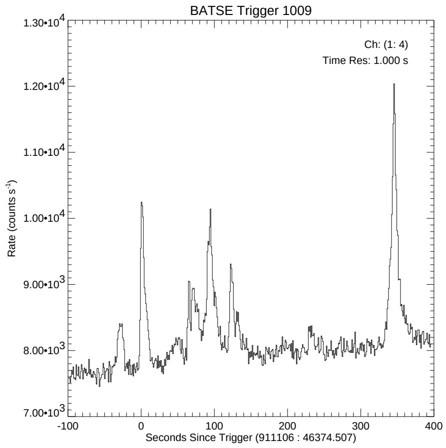
(c) GRB910814.



(d) GRB910905.

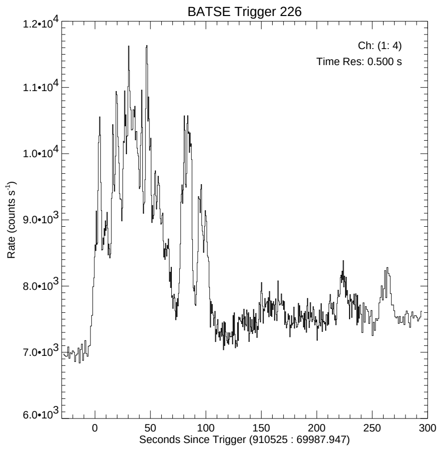


(e) GRB910927.

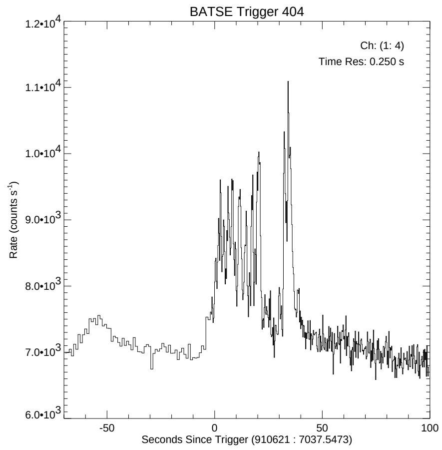


(f) GRB911106.

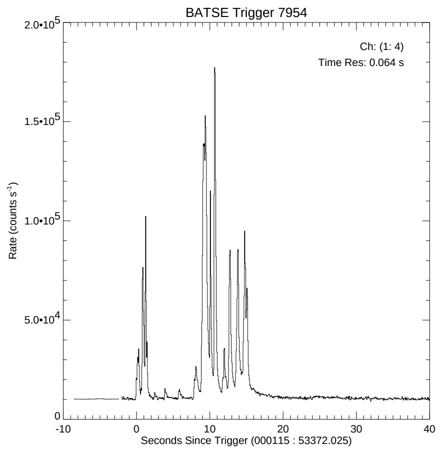
Figura 1.7: Esempi di curve di luce di GRBs.



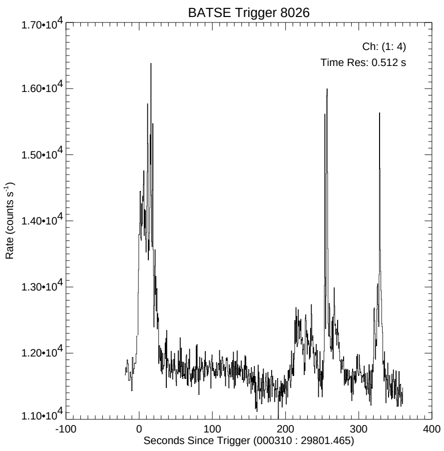
(a) GRB910525.



(b) GRB910621.

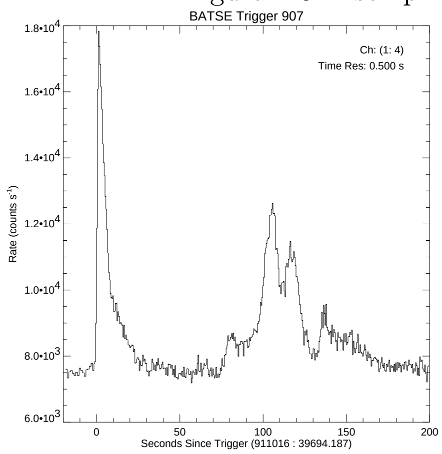


(c) GRB000115.

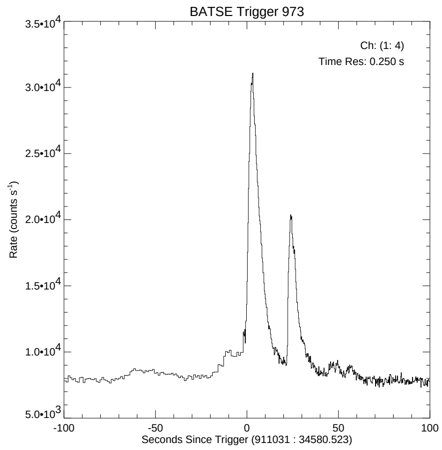


(d) GRB000310.

Figura 1.8: Esempi di curve di luce di GRBs.

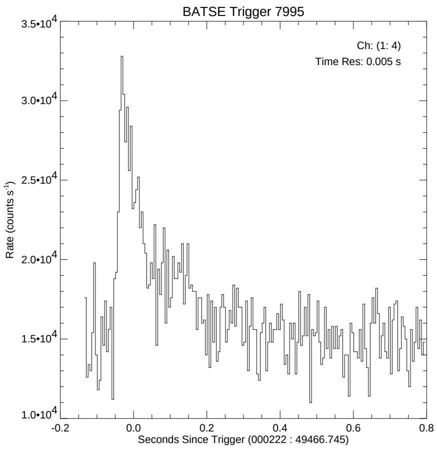


(a) GRB911016.

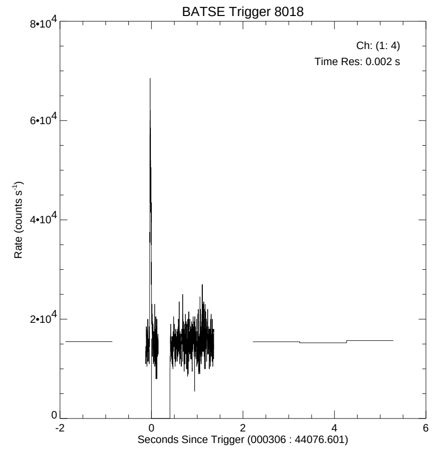


(b) GRB911031.

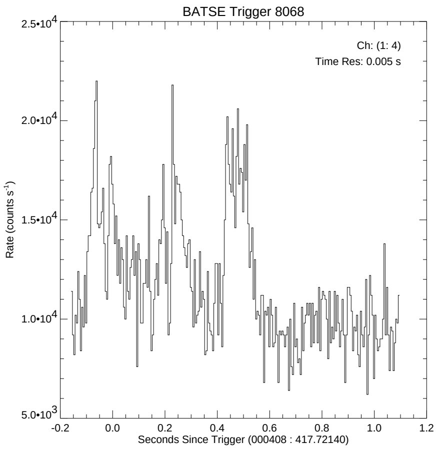
Figura 1.9: È possibile notare in queste curve di luce degli esempi di FREDs.



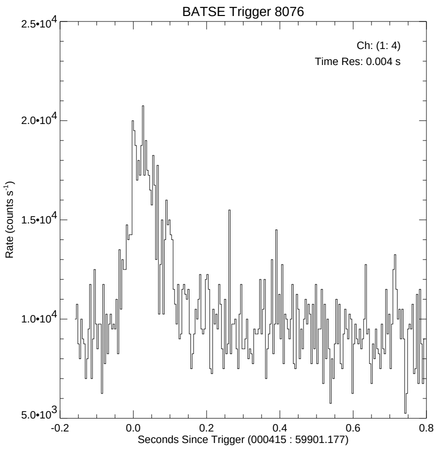
(a) GRB000222.



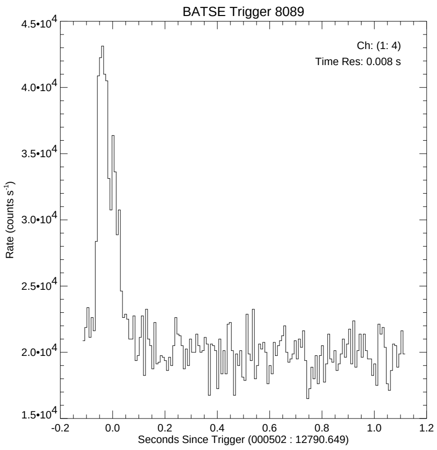
(b) GRB000306.



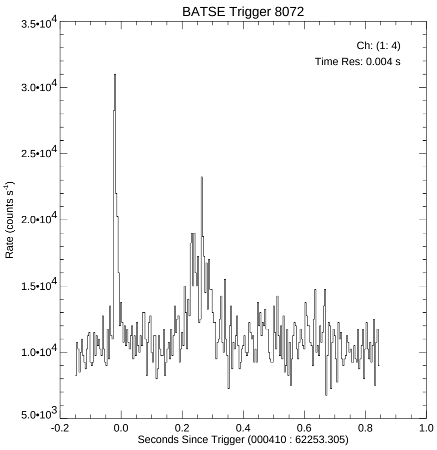
(c) GRB000408.



(d) GRB000415.



(e) GRB000502.



(f) GRB000410.

Figura 1.10: Esempi di bursts brevi. La variabilità della luminosità avviene su tempi scala di qualche millisecondo.

relative durate, potrebbero anche dare delle indicazioni sulla geometria (dimensioni spaziali) e sulla fisica (meccanismi centrali di emissione dell'energia osservata) delle sorgenti.

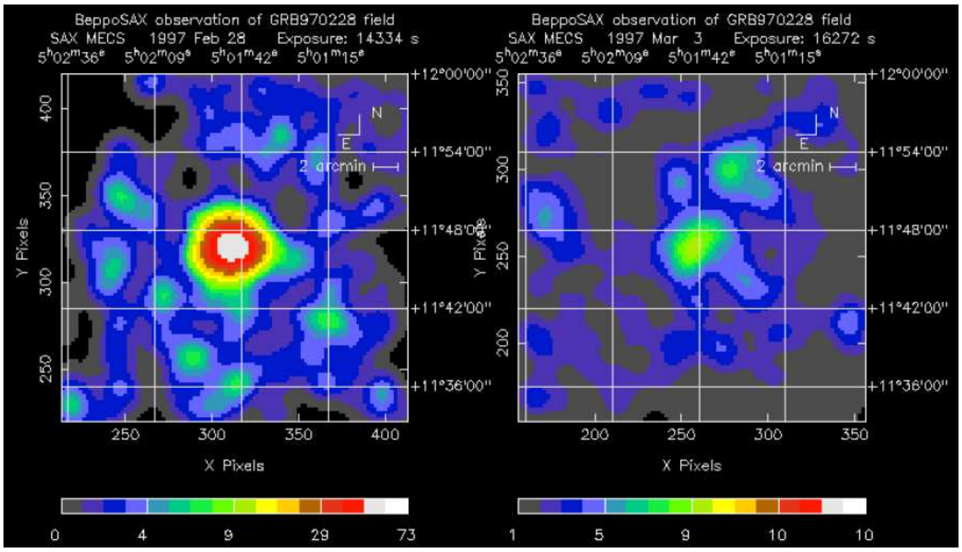


Figura 1.11: Immagini X dell'afterglow del GRB970228 riprese il giorno stesso dell'esplosione e tre giorni dopo.

Una seconda svolta fu legata al successo ottenuto nel '97 dal satellite italo-danese Beppo-SAX (*Satellite per l'Astronomia X*, in onore di Giuseppe Occhialini) nel tentativo di ottenere delle immagini ad alta risoluzione nell'X degli ultimi bagliori (*afterglow*) di un burst (il GRB 970228), coda di radiazione questa prevista dai modelli teorici esistenti già all'epoca [13]. Con una rilevazione di bursts al ritmo di una decina all'anno, Beppo-SAX fornì delle immagini X che, dopo qualche ora di elaborazione numerica, permettevano – grazie ad una discreta precisione angolare – il puntamento ottico [71] della regione interessata e quindi lo studio dell'evoluzione tarda (in genere per vari mesi e in qualche caso fino ad un anno) degli afterglow a lunghezze d'onda maggiori (fino al radio) [21]. Questo procedimento permise di conseguenza di identificare le galassie che ospitano le sorgenti di GRBs e quindi si giunse alla misurazione del relativo redshift [37, 49]. Fu così possibile confermare osservativamente una volta per tutte l'ipotesi sull'origine cosmologica dei GRBs.

I dati raccolti da Beppo-SAX hanno poi permesso di determinare la forma tipica delle curve di luminosità degli afterglows: nell'X si tratta di una singola legge a potenza,

$$F_\nu \propto t^{-\alpha},$$

con $\alpha \sim 1.2$. Per due afterglows si è osservato $\alpha \sim 2$ e in due altri casi si è avuta una transizione da uno spegnimento lento ($\alpha \sim 1.1 - 1.2$) ad un decadimento molto più rapido.

L'analogo della difficoltà incontrata da BATSE nel registrare GRBs di breve durata a piccoli flussi si ritrova nell'impossibilità per il trigger di Beppo-SAX di rilevare gli afterglows che seguono eventualmente questi bursts. Come conseguenza non si sa ancora se i GRBs di questo tipo preludano ad uno spegnimento nello stile degli afterglows o meno. Per i GRBs lunghi, invece, non ci sono particolari problemi nel rintracciare, almeno nell'X, l'afterglow di ogni burst.

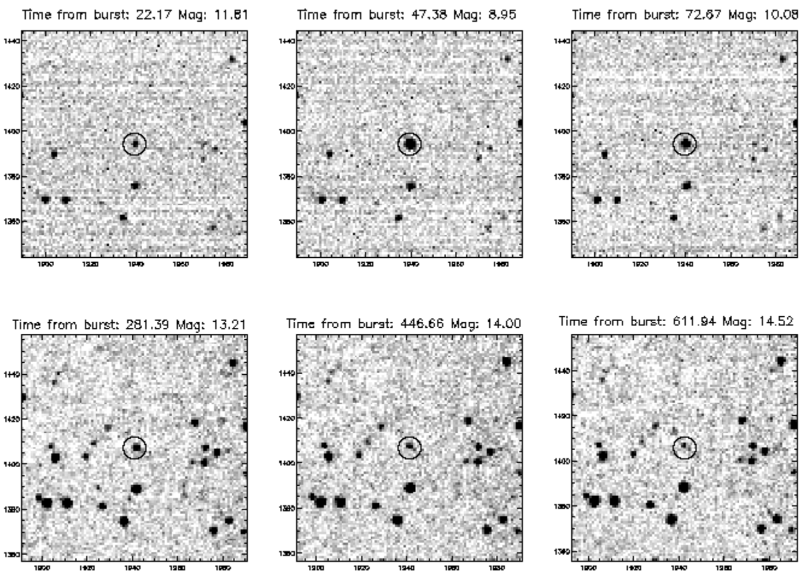


Figura 1.12: Immagini ottiche dell'afterglow del GRB990123.

La controparte ottica viene identificata in circa un caso su due; la luminosità osservata si attesta ad un giorno dal burst generalmente fra la 19-esima e la 21-esima magnitudine. In un caso (GRB990123) il sistema di telescopi automatici ROTSE (*Robotic Optical Transient Search Experiment*) è riuscito ad osservare l'afterglow nell'ottico appena 22 secondi dopo l'esplosione primaria, registrata simultaneamente dal BATSE e Beppo-SAX [1].

L'emissione ha raggiunto il picco ottico (intorno alla nona magnitudine pur essendo a $z \cong 1.6$) contemporaneamente al raggiungimento del massimo nell'X, a distanza di 50 s dal picco gamma. Questo ha permesso di stabilire che la frazione di energia emessa nel visibile era circa due ordini di grandezza in meno rispetto a quella sotto forma di raggi gamma. In particolare, poi, la curva di luce riportata da ROTSE ha un andamento a potenza più ripido di quello che si è riscontrato nell'X, segno che probabilmente il meccanismo di emissione non è lo stesso per le due bande spettrali [54].

L'afterglow ottico, almeno nelle prime fasi, addirittura può offuscare la stessa galassia ospite, che torna a essere visibile solo settimane o mesi dopo, quando l'afterglow è sceso sotto la sensibilità dei telescopi e la curva di luce sembra appiattirsi. Non di rado, poi, si riscontra una polarizzazione lineare (dell'ordine di qualche percento) nella luce osservata qualche giorno dopo il burst (per la prima volta nel '99, quando a 18.5 h dal GRB990510 si è registrata una $\Pi = (1.7 \pm 0.2)\%$) [14].

Nei casi in cui non si osserva la componente ottica si pensa talvolta che il motivo potrebbe essere legato all'estinzione lungo la linea di vista o all'interno della sorgente stessa. In altre situazioni la causa potrebbe essere l'estinzione da polvere all'interno della galassia ospite o l'assorbimento nel mezzo intergalattico.

Gli afterglow radio osservati sono finora solo poche decine: probabilmente una maggiore sensibilità dei radiotelescopi potrebbe superare questo che è considerato un problema non astrofisico, ma osservativo [37].

1.3 Il modello del fireball a shock interni-esterni

Come descritto dalla (1.5), lo spettro dei GRBs è fortemente non termico. Questo impone che la radiazione osservata provenga da una sorgente otticamente sottile: se così non fosse, una quantità di scattering statisticamente consistente porterebbe il flusso di fotoni ad una sensibile termalizzazione. Se si stima rapidamente la dimensione della sorgente ($l \sim c\delta T$, essendo δT il tempo minimo di variabilità – massimizzato dalla scala del millisecondo – osservato nelle curve di luce dei GRB) e la densità locale di fotoni $n(\epsilon)$, integrando sullo spessore della sorgente si scopre che la profondità ottica $\tau_{\rm pp}$ per creazione di coppia $\gamma\gamma \to e^+e^-$ di un fotone di energia ϵ (~ 1 GeV) è

$$\tau_{\rm pp} = \int_0^l ds \frac{2m_{\rm e}^2 c^6}{\epsilon^2} \int_1^{+\infty} dt \sigma_{\rm pp}(t) t \int_{tm_{\rm e}^2c^4/\epsilon}^{+\infty} d\epsilon' \frac{n(\epsilon')}{\epsilon'^2} \sim 10^{11},$$

avendo indicato con $\sigma_{\rm pp}$ la sezione d'urto per creazione di coppia e con t la funzione dei quadrivettori d'onda dei fotoni $(k_1^\mu + k_2^\mu)(k_{1\mu} + k_{2\mu})/m_{\rm e}^2c^4$. Il fatto che una sorgente otticamente così spessa non possa in alcun modo produrre uno spettro come quello della (1.5) costituisce per i modelli fenomenologici il cosiddetto *problema della compattezza*, in relazione alla "compattezza" dell'atmosfera fotonica e del plasma (cui sono legate le perdite Compton).

Il sistema più semplice per superare questo scoglio è quello di considerare la sorgente in moto iperrelativistico verso l'osservatore. In questo modo la durezza dello spettro osservato a Terra ($\epsilon > 1$ MeV) sarebbe producibile nel riferimento della sorgente rimanendo sotto la soglia della produzione di coppia (l'energia nel riferimento proprio si ridurrebbe di un fattore Γ nella trasformazione di Lorentz e quindi $\tau_{\mathrm{pp}} \ll 1$) e quindi permettendo alla radiazione non termica prodotta *in situ* di emergervi senza subire quelle collisioni che finirebbero col termalizzarla. In alternativa si può immaginare che, nel riferimento dell'osservatore, a causa del beaming relativistico, la maggior parte dei fotoni collida con un angolo fra gli impulsi minore di Γ^{-1}, aumentando notevolmente l'energia di soglia per creazione di coppia.

Quest'idea ha portato alla formulazione di quello che è noto come modello del fireball relativistico, secondo cui una shell di materia espulsa da un oggetto stellare a fattori di Lorentz molto grandi, nel suo rallentamento, produrrebbe l'esplosione osservata nel gamma e il successivo afterglow. La velocità dell'espansione richiesta appare abbastanza plausibile se si considera che la luminosità di Eddington per un oggetto come può essere un progenitore di un GRB (di dimensioni e massa M stellari) è

$$L_{\mathrm{E}} = \frac{4\pi c G M m_{\mathrm{p}}}{\sigma_{\mathrm{T}}} \approx 1.5 \times 10^{38} \frac{M}{M_{\odot}} \mathrm{erg\ s^{-1}} \leq 10^{40} \mathrm{erg\ s^{-1}}$$

(avendo indicato con σ_{T} la sezione d'urto Thomson e con m_{p} la massa del protone), più di una decina di ordini di grandezza più piccola delle luminosità tipiche che i GRBs raggiungono. Come conseguenza, gli *ejecta* in moto iperrelativistico nel mezzo interstellare generano un'onda d'urto; attorno a questa, per scattering attorno alle irregolarità magnetiche dei fluidi a cavallo dello shock (meccanismo di Fermi del I ordine in regime relativistico [18, 19, 3, 4, 5, 74, 8]), gli elettroni dell'ambiente vengono accelerati molto efficientemente grazie al $\Gamma \gg 1$ della shell in espansione. I raggi gamma osservati vengono poi prodotti direttamente per irraggiamento di sincrotrone degli elettroni [32] oppure per accelerazione a spese sempre degli elettroni tramite effetto Compton inverso sui fotoni inizialmente irraggiati per sincrotrone da altri elettroni (quello che va sotto il nome di SSC – *synchrotron self-Compton*) [46, 48]. Affinché l'emissione gamma sia efficiente, l'energia interna degli elettroni e quella del campo magnetico devono essere vicine all'equipartizione. In queste condizioni, è possibile eludere il problema della compattezza immaginando che la sorgente abbia $\Gamma \geq 100$. Nella fattispecie, il modello prevede lo sviluppo del fenomeno in tre fasi principali:

- Un oggetto centrale interno, che si presume non direttamente osservabile, genera un flusso di energia relativistico.

- L'energia viene trasferita dalla sorgente compatta a raggi maggiori, dove la profondità ottica è piccola: fra i modi più probabili in cui questo può avvenire vi sono un flusso relativistico di particelle e un trasferimento di energia alla Pointing. Si presume che il flusso debba essere estremamente irregolare al fine di produrre shock interni fra shell di ejecta che si muovono a fattori di Lorentz diversi.
- Il materiale espulso rallenta, cedendo energia di bulk alle particelle non termalizzate sotto forma di energia interna; queste a loro volta emettono raggi gamma per sincrotrone o SSC interagendo con i campi magnetici e il gas degli ejecta.

Va comunque sottolineata l'idea che, indipendentemente dal processo radiativo proposto e dal tipo di onde d'urto invocate, l'irraggiamento avviene solo in presenza di shock, siano essi frutto della supersonicità degli ejecta rispetto al mezzo interstellare (ISM – *InterStellar Matter*) – nel qual caso si parlerà di shock esterni [47] – o di una shell rispetto all'altra: questi shock sono detti interni [57].

1.3.1 Gli shock esterni

Il materiale espulso dall'oggetto compatto, interagendo con la materia circostante – quale può essere l'ISM o il vento stellare che ha avuto luogo prima della fase parossistica legata all'osservazione del GRB – dà origine ad un'onda d'urto che si propaga analogamente, seppure in regime relativistico, agli shock dei resti di supernovae. Come questi ultimi, anche gli shock dei GRBs sono non collisionali: il meccanismo che permette la randomizzazione delle velocità delle singole particelle nell'attraversamento dello shock non consiste nelle collisioni fra le particelle stesse, ma è legato alla presenza di campi elettromagnetici.

Gli shock esterni diventano efficienti appena gli ejecta raggiungono uno dei seguenti raggi [64]:

$$R_\Gamma \equiv l_\mathrm{S}/\Gamma_0^{2/3}; \qquad R_\Delta \equiv l_\mathrm{S}^{3/4}\Delta^{1/4},$$

dove Γ_0 e Δ sono il fattore di Lorentz iniziale e lo spessore della shell, mentre

$$l_\mathrm{S} \equiv \left\{E_0/[(4\pi/3)n_\mathrm{ism}m_\mathrm{p}c^2]\right\}^{1/3}.$$

Quest'ultima grandezza è nota come lunghezza di Sedov relativistica e rappresenta il raggio all'interno del quale l'energia di massa del mezzo interstellare (con densità barionica n_ism) eguaglia l'energia di iniezione degli ejecta E_0. Valori tipici per queste grandezze sono $l_\mathrm{S} \sim 10^{18}$ cm e $R_\Gamma \sim R_\Delta \sim 10^{15-16}$ cm.

Gli spettri di sincrotrone e di SSC calcolati per il modello a shock esterni riproducono in maniera abbastanza generale sia le proprietà spettrali osservate nei GRBs, sia la correlazione descritta fra durezza spettrale e durata dell'evento [63, 52]. Si pensa, inoltre, che gli shock esterni siano responsabili della radiazione degli afterglows. Questo modello, tuttavia, sembra non essere in grado di spiegare la microstruttura delle curve di luce, in particolare l'estrema variabilità su tempi scala dell'ordine di 10^{-3} s $\sim \delta T \ll T \sim 10$ s che queste esibiscono [65]: vale la pena di approfondire un attimo quest'aspetto in quanto è questo il punto che giustifica l'introduzione del modello a shock interni (invocato per spiegare la fase di GRB vero e proprio).

Una shell infinitamente sottile che si espande verso l'osservatore con un fattore di Lorentz Γ, anche se ha una dimensione angolare maggiore di Γ^{-1}, appare solo nella regione che si discosta meno di Γ^{-1} dalla linea di vista a causa del beaming relativistico che concentra la radiazione emessa (isotropicamente) in un cono di quel diametro angolare. Di conseguenza, una shell ampia più di tanto può essere considerata sferica ai fini della discussione di ciò che rileva l'osservatore.

Se, ora, si considera un raggio tipico di emissione di radiazione R_e (dimodoché l'irraggiamento avvenga mentre la shell si muove fra $R_\mathrm{e} - \Delta R_\mathrm{e}/2$ e $R_\mathrm{e} + \Delta R_\mathrm{e}/2$), il lasso di tempo trascorso tra l'osservazione dei primi fotoni (emessi a $R_1 = R_\mathrm{e} - \Delta R_\mathrm{e}/2$) e degli ultimi (emessi a $R_2 = R_\mathrm{e} + \Delta R_\mathrm{e}/2$) corrisponde al ritardo della shell (che si muove a $v = c\sqrt{1-\Gamma^{-2}} \to c$) rispetto ai primi fotoni nel raggiungere R_2 partendo da R_1:

$$T_\mathrm{radiale} = \frac{\Delta R_\mathrm{e}}{c} - \frac{\Delta R_\mathrm{e}}{v} \overset{v\to c}{\cong} \frac{\Delta R_\mathrm{e}}{c} - \frac{\Delta R_\mathrm{e}}{c\left(1-\frac{1}{2\Gamma^2}\right)} \overset{v\to c}{\cong} \frac{\Delta R_\mathrm{e}}{2\Gamma^2 c}.$$

Questo ritardo si traduce in uno smussamento (a livello delle curve di luce osservate) delle irregolarità presenti in fase di emissione su scale temporali al di sotto di T_radiale.

Un altra regolarizzazione che va considerata è quella legata al ritardo nell'osservazione (a una distanza d) dei fotoni emessi sul bordo di visibilità della shell (a $\vartheta \sim \Gamma^{-1}$ dalla linea di vista) rispetto a quelli emessi contemporaneamente sulla linea di vista ($\vartheta \sim 0$):

$$T_\mathrm{angolare} = T_{\Gamma^{-1}} - T_0 \overset{d\to\infty}{\cong} \frac{R_\mathrm{e}(1-\cos\Gamma^{-1})}{c} \overset{\Gamma\to\infty}{\cong} \frac{R_\mathrm{e}}{2\Gamma^2 c}.$$

Numericamente è stato mostrato che il segnale che si osserva di un impulso emesso in sincronia dalla shell è un picco stile FRED con ampiezza totale a metà altezza (FWHM – *Full-Width Half-Maximum*) $\sim 0.22 R_\mathrm{e}/(\Gamma^2 c)$ [17].

Il confronto tra i due ritardi e il fatto che, per definizione, $\Delta R_\mathrm{e} < R_\mathrm{e}$ mostrano che $T_\mathrm{angolare} > T_\mathrm{radiale}$. Riassumendo, se la shell ha simmetria sferica su una scala maggiore di Γ^{-1}, ogni struttura temporale nell'emissione (dovuta a ipotetiche irregolarità nel flusso radiale degli ejecta o nell'ISM shockato) su scala più piccola di T_angolare verrà "spalmata" su un intervallo T_angolare.

Nel caso in cui la shell abbia uno spessore finito (Δ nel riferimento dell'osservatore), la durata T del burst deve essere almeno Δ/c. È quindi possibile classificare i modelli dei GRBs a seconda che sia lo spessore della shell a determinare la durata dell'evento o meno:

$$T = \begin{cases} T_{\text{angolare}} = \frac{R_e}{2\Gamma^2 c} & \text{se } \Delta < \frac{R_e}{2\Gamma^2} \text{ (I tipo);} \\ \frac{\Delta}{c} & \text{altrimenti (II tipo).} \end{cases} \tag{1.6}$$

Appartengono al I tipo il modello a shock esterni e la sua versione magnetica, il modello del vento magnetico relativistico, in cui l'ISM è attraversato da un flusso di Pointing magnetico [70]. Fanno parte del II tipo il modello a shock interni e quello di Thompson, che ne rappresenta l'analogo magnetico [68].

Per ritornare alla discussione del motivo per cui sembra necessaria l'introduzione degli shock interni – almeno nella prima fase dei bursts "frastagliati" – a sostegno del modello a shock esterni, la maggior parte dei GRBs hanno una struttura temporale complessa. Un indice della quantità di picchi presenti in un GRB si può costruire definendo $N = T/\delta T$ (chiaramente N sovrastimerà il numero di picchi nei bursts che includono periodi di quiescenza): l'ordine di grandezza di N è tipicamente 10^2.

Se si calcola N per fenomeni del I tipo (per cui $T = T_{angolare}$), ricordando che, in generale, $\delta T \geq T_{angolare}$, si ottiene un $N \leq 1$ che impedisce la produzione di curve di luce complesse come quelle caratterizzate da $N \gg 1$.

Un altro punto è quello legato alla correlazione prevista da questo modello fra la larghezza dei picchi e il tempo di arrivo a terra. È infatti naturale supporre che, col passare del tempo, il fattore di Lorentz della shell diminuisca progressivamente. Questo sta a significare che la durata degli impulsi $T = T_{angolare} \propto \Gamma^{-2}$ dovrebbe aumentare con il tempo. Questa correlazione, tuttavia, non è stata osservata; inoltre l'assenza di una proporzionalità diretta tra il GRB e l'afterglow induce a pensare una volta di più che, se, per come è strutturato, l'afterglow è probabilmente prodotto dagli shock esterni, il meccanismo astrofisico responsabile del burst vero e proprio deve essere un altro.

1.3.2 Gli shock interni

Un modello di fireball a shock interni appartiene al II tipo e, nonostante continui a sussistere la limitazione $\delta T \geq T_{angolare}$, la differenza sostanziale rispetto alla prima classe di modelli consiste nella possibilità che la durata totale T – per definizione del tipo – sia maggiore di $T_{angolare}$. In maniera del tutto naturale, quindi, gli shock interni sembrano riprodurre tutta quella classe di GRBs con $N \geq 1$. In più, essendo lo spessore Δ determinato dal tempo in cui il meccanismo interno alla sorgente opera ed essendo le disomogeneità radiali della shell frutto della variabilità con cui questo meccanismo espelle materia, sia la durata che l'irregolarità del burst danno indicazioni abbastanza dirette sull'oggetto centrale che produce il fenomeno.

Giustificata, così, l'introduzione di questo modello, è, ora, opportuno trattarne con qualche dettaglio le linee generali.

Gli shock interni, come premesso, sorgono quando shell di ejecta più veloci ($\Gamma = \Gamma_1$) raggiungono quelle più lente ($\Gamma = \Gamma_2$). Stimando la distanza fra due di queste shell contigue come $\delta \sim c\delta t$, il raggio scala a cui questo fenomeno avviene è

$$R_{\rm int} \sim c\frac{\delta}{\Delta v} \overset{\Gamma_1,\Gamma_2 \gg 1}{\cong} \frac{\delta}{\frac{1}{2\Gamma_2^2} - \frac{1}{2\Gamma_1^2}} \overset{\Gamma_1 \gg \Gamma_2}{\cong} c\delta t \Gamma^2 \sim 10^{13} \text{ cm}.$$

Questa stima è una conferma della plausibilità di questo modello in quanto, se gli shock si formassero a raggi minori, il sistema sarebbe troppo spesso otticamente per permettere alla radiazione di uscire senza subire collisioni (calcoli più accurati dimostrano che per un certo range di parametri ragionevoli l'emissione avviene al di sopra della fotosfera Compton).

Simulazioni numeriche confermano, poi, che gli shock interni possono dare origine sia alla varietà di strutture osservate nelle curve di luce sia allo spettro della radiazione non termico osservato.

Riassumendo, si può concludere che la terza fase descritta in precedenza va più propriamente distinta (in seno al modello del fireball relativistico a shock interni-esterni) in due momenti principali:

1. Gli ejecta, espulsi a fattori di Lorentz variabili, collidono fra di loro dando origine a shock interni alla shell attorno ad un raggio tipico di 10^{13} cm; negli shock vengono accelerate particelle non termiche con una legge a potenza tipicamente a indice $2-3$. Queste particelle irraggiano a causa dei campi magnetici presenti nel materiale e producono quello che a terra viene osservato come GRB. In questa fase la materia espulsa dall'oggetto centrale perde parte della sua energia, decelerando.

2. Il flusso relativistico residuo (decelerato ma non fermato dalle perdite radiative e dall'energizzazione del materiale shockato) viene rallentato ulteriormente dal materiale circostante, dando vita all'afterglow. Questa fase, a differenza della prima, è regolare, in linea con quanto atteso dallo *spreading* relativistico discusso prima.

Studiando le osservazioni degli afterglow radio, si è notato che la curva di luce (radio) del GRB970508 esibiva un tremolio durante le prime due settimane e in seguito diminuiva fino a spegnersi dopo un mese. Si pensa che questo sia un fenomeno legato alla scintillazione [23], ovvero l'analogo nel radio dello sfavillio che si osserva guardando le sorgenti di luce puntiformi da terra a causa della turbolenza atmosferica (fluttuazioni nella temperatura, velocità, indice di rifrazione...). Nella situazione in questione, l'effetto è dovuto agli scattering in fase di attraversamento del plasma interstellare da parte della radiazione. Inizialmente le dimensioni della sorgente sono limitate e l'interazione con il plasma è consistente; in seguito, man mano che la shell si espande, la radiazione interagisce sempre di meno con la materia circostante e l'effetto scompare. Da questa modellizzazione è possibile, stimando quali devono essere le condizioni che garantiscono un regime di scintillazione, ricavare informazioni sul raggio di emissione al momento dell'esaurimento dello sfavillio radio: quello che si è ottenuto è un raggio, a distanza di un mese dal burst, di $\sim 10^{17}$ cm [21]. Indipendentemente da questo modo di valutare la dimensione degli ejecta, era stato dimostrato che vi sono le condizioni per l'autoassorbimento di sincrotrone (SSA – *Self-Synchrotron Absorption*) nel caso di un nascente spettro nelle frequenze radio per cui la sorgente sia otticamente spessa; osservando il flusso e stimando la temperatura della regione di emissione era stata data una stima del raggio della shell a un mese dall'esplosione di $\sim 10^{17}$ cm [33]. L'accordo eccellente fra queste stime indipendenti è rassicurante circa la validità del modello proposto e, in più, sviluppando queste linee di ragionamento si può avere una prova ulteriore del moto ad alti fattori di Lorentz degli ejecta nei GRBs.

Fra gli altri aspetti notevoli del modello, vi è, poi, l'assenza di correlazione fra le grandezze del burst e quelle dell'afterglow, come anche l'indipendenza della discussione dal tipo di oggetto centrale che produce l'esplosione iniziale. Quest'ultimo, inoltre, a parte le indicazioni provenienti dalla variabilità e dalla durata globale del fenomeno GRB, non dovrebbe essere direttamente osservabile: inizialmente è oscurato dall'enorme profondità ottica della shell espulsa; in seguito la sua luminosità dovrebbe comunque essere troppi ordini di grandezza inferiore a quella del burst, o dello stesso afterglow, per permetterne la rivelazione.

1.4 Il problema dell'energia e il *beaming*

Uno degli aspetti più problematici dei GRBs è rappresentato dalle energie enormi con cui si potrebbe avere a che fare se l'energia fosse irraggiata isotropicamente: per avere un'idea, il GRB971214, il cui redshift è $z = 3.418$, avrebbe emesso $\sim 3 \times 10^{53}$ erg (l'energia di legame di una stella di neutroni), mentre il GRB990123, a $z = 1.65$, addirittura 4×10^{54} erg (più dell'energia di massa del sole). Indubbiamente, energie di questo ordine, emesse da un oggetto compatto di origine stellare, rappresentano una sfida per i modelli che si propongono e risultano difficilmente spiegabili da gran parte delle teorie sui GRBs.

Questo ha fatto pensare che, probabilmente, l'emissione non sia isotropa; più plausibilmente l'irraggiamento è concentrato in qualche angolo θ: se θ è piccolo, l'energia totale irraggiata sarà inferiore di un fattore $\cong \theta^2/4$ rispetto a quella prevista in regime di isotropia. Questo implica, di converso, una frequenza di esplosioni totali nell'universo maggiore di un fattore inverso. Una simile discussione non deve, però, creare confusione fra questo beaming di natura puramente geometrica (la shell che irraggia semplicemente copre un'$\Omega \cong \pi\theta^2$ anziché tutto l'angolo solido attorno all'oggetto centrale) con il beaming relativistico della radiazione emessa da una sorgente isotropicamente nel proprio riferimento di quiete. Quest'ultimo aspetto, connesso con l'aberrazione relativistica della luce che porta la maggior parte dei fotoni irraggiati da un oggetto con fattore di Lorentz Γ ad essere concentrati in un cono di ampiezza angolare $\sim 1/\Gamma$, fornisce solo un limite inferiore per l'angolo di beaming. Se, infatti, la shell ha un apertura angolare $\theta > 1/\Gamma$ allora l'angolo di beaming è dato da θ e non da $1/\Gamma$. In altri termini, un osservatore che si discosti dal raggio passante per il centro della shell meno di θ (più precisamente, $\theta + 1/\Gamma$) rivelerà l'evento. Ogni osservatore, tuttavia, rivelerà solo un settore di shell delle dimensioni di Γ^{-1}, cosicché diversi osservatori distribuiti nell'angolo solido di 4π studieranno $(\theta\Gamma)^2$ settori diversi, ognuno dei quali causalmente sconnesso dagli altri e ognuno con una curva di luce potenzialmente diversa dalle altre.

Col passare del tempo Γ decresce e quindi il numero di regioni causalmente sconnesse si riduce fino ad avere un unico settore per $\Gamma \sim \theta^{-1}$.

Un modo diverso per arrivare a questa conclusione è quello di considerare una shell di ejecta non sferica che si espande relativisticamente. Il tempo proprio necessario alla materia per raggiungere un raggio R è – nel limite di $v \to c$ – $\cong R/(c\Gamma)$. Di conseguenza, la massima espansione laterale possibile, grazie all'invarianza delle lunghezze perpendicolari alla direzione di moto, è R/Γ. Questo fa si che punti distanti più di R/Γ (e quindi separati da un angolo maggiore di Γ^{-1}) non siano causalmente connessi.

Come conseguenza importante di questo fatto si ha che, finché $\Gamma^{-1} < \theta$, la materia espulsa con simmetria non sferica non ha tempo per espandersi a sufficienza da notare un'anisotropia e quindi si muove come se fosse parte di una shell sferica. Quando, però, la decelerazione del flusso ha portato Γ ad essere $\approx \theta^{-1}$, la materia "si accorge" dell'anisotropia e comincia ad espandersi lateralmente in maniera più consistente. Dal momento che l'ISM viene shockato relativisticamente, vi è una teoria secondo cui quest'espansione dovrebbe avvenire a $v \approx c$, il che porterebbe θ ad aumentare secondo Γ^{-1} [66]; tuttavia altri pensano che questo avvenga alla velocità del suono [58], che, per un fluido shockato iperrelativisticamente, è $\cong c/\sqrt{3}$. Nella prima ipotesi, il moto laterale dovrebbe essere talmente veloce da dominare completamente l'espansione radiale della shell. Per un'espansione in una materiale espulso omogeneo, questo comporta $\Gamma \propto R^{-3/2} \exp\left\{-3/\left[(2\Gamma_0\theta_0)(R^{3/2}/R_0^{3/2} - 1)\right]\right\}$ [55], avendo usato il pedice 0 per le quantità al momento della transizione. Questa decelerazione, unita alla collimazione della radiazione in un cono ormai più ampio ($\Gamma^{-1} > \theta_0$), riduce ulteriormente l'emissione osservata in funzione del tempo e causa un taglio nella curva di luce dato approssimativamente da un fattore t^{-1}.

Questa previsione teorica non ha avuto un riscontro osservativo negli primi due afterglows rilevati; tuttavia, come accennato durante la descrizione delle curve di luce degli afterglow, altri (fra cui GRB990123 [38]) hanno esibito esattamente la transizione prevista. Nel '99, poi, si è osservato un ginocchio molto netto nella curva di luce del GRB990510 [26], in cui α è passato a 1.2 giorni dal burst da 0.82 ± 0.02 a 2.18 ± 0.05. L'energia stimata supponendo l'isotropia di questo burst è $E_{\rm iso} \sim 2.7 \times 10^{53}$ erg; un fattore di beaming stimato intorno a 300 porterebbe questo valore ad un più ragionevole 10^{51} erg, comparabile con l'energia emessa da una supernova.

1.5 Il modello a lupara

Per spiegare l'estrema variabilità dei GRBs ed evitare di scomodare energie poco realisticamente attribuibili ad un oggetto compatto, Heinz e Begelman [29] hanno proposto un modello alternativo a quello del fireball relativistico. In questo approccio si postula l'esistenza di una microstruttura clusterizzata degli ejecta relativistici; i nuclei di questa struttura, detti con forza evocativa proiettili (*bullets*), interagendo non tra di loro ma con l'ISM, dovrebbero dar luogo al burst rimanendo in uno scenario del II tipo (diversamente da quanto avveniva nel fireball a shock esterni, in questo caso la durata del fenomeno dipende dal tempo di attività dell'oggetto centrale). Per produrre le caratteristiche note dei GRBs, il grosso dell'energia del materiale in espansione dovrebbe essere concentrata in piccoli grumi spruzzati verso l'esterno con grandi fattori di Lorentz e una piccola apertura angolare. Questi proiettili, poi, sbattono sul materiale circostante come una pioggia di meteoriti o la rosa di una cartuccia da caccia e lì rilasciano la loro energia attraverso shock esterni sotto forma di raggi gamma. La costruzione dei bullets invocati costituisce lo scopo che ha motivato il lavoro di ricerca di idrodinamica condotto nei capitoli seguenti; è quindi opportuno trattare con qualche dettaglio in più le idee riassunte sommariamente sopra.

Nel seguito si assumerà che il meccanismo centrale del burst rilasci, in un tempo $T \sim 10 - 100$ s, N' proiettili distribuiti in un arco delle dimensioni $\theta \sim 10^\circ$ con un fattore di Lorentz $\Gamma \equiv 10^3\Gamma_3$. Ogni proiettile si espande lateralmente in regime subrelativistico con $v_\perp = \alpha/\Gamma \equiv 10^{-2}\alpha_{-2}/\Gamma \ll \Gamma^{-1}$ misurata nel riferimento del laboratorio. Essendo $\theta \gg \Gamma^{-1}$, la parte di energia rilasciata che un osservatore rileva è $E_{\rm oss} \cong E_{\rm iso}\Gamma^{-2} \equiv 10^{47} \times E_{53}\Gamma_3^{-2}$ erg, concentrata in $N \equiv 100N_2 = N'/(\theta\Gamma)^2$ bullets. Per evitare che il modello ricada nella categoria dei modelli a shock interni è essenziale che la frazione ε dell'angolo solido $\pi\Gamma^{-2}$ coperta dai proiettili sia piccola. Indicando con S l'area perpendicolare al moto di ogni bullet,

$$\varepsilon = \frac{NS}{R^2\pi\Gamma^{-2}} \equiv \frac{NS}{A};$$

stimando la superficie dei proiettili come

$$S = \pi\left(\frac{\alpha}{\Gamma}t\right)^2$$

e imponendo $\Gamma \gg 1$ nella stima dell'area considerata della shell,

$$A = \pi \left(\frac{t}{\Gamma}\right)^2 ,$$

$\varepsilon < 1$ si traduce in $\alpha < 1/\sqrt{N}$.

Stime dell'efficienza radiativa dei proiettili indicano che un bullet di massa $M_{\rm b} \cong 5.5 \times 10^{-13} E_{53} M_\odot / N_2 \Gamma_3^3$ avrà convertito la metà della sua energia cinetica iniziale dopo aver shockato una colonna di ISM di massa $M_{\rm s} \sim M_{\rm b} \Gamma^{-1}$. Se la durata del relativo impulso gamma osservato a terra è $\tau_{\rm s} \equiv 10^{-3} \tau_{-3}$ s, la distanza su cui sarà avvenuto il rilascio di energia è $\Delta R \cong 3 \times 10^{13} \tau_{-3} \Gamma_3^2$ cm. Per una densità ambientale $n_{\rm ism} \equiv 10^8 n_8$ cm^{-3}, il fattore di Lorentz richiesto è

$$\Gamma \cong 2300 \left(\frac{E_{53}}{\alpha_{-2}^2 N_2 \tau_{-3}^3 n_8}\right)^{1/8} .$$

Da questo si conclude che il modello, per funzionare, ha bisogno di alte densità circumstellari, tipiche dei casi in cui il materiale attorno all'oggetto centrale derivi dal vento stellare particolarmente intenso che precede l'esplosione di una stella particolarmente massiva (classi O-B). In queste situazioni di partenza, tipicamente (cfr. la sezione in cui si descrivono le collapsar) la stella in rapida rotazione collassa a buco nero, evacuando velocemente la regione assiale. Questo fenomeno permette ai proiettili, che si suppongono sparati in seguito, di raggiungere indisturbati un raggio $R_0 \sim 10^{12-14}$ cm (comparabile con le dimensioni stellari iniziali) e lì iniziare ad interagire con la materia espulsa in precedenza sotto forma di vento. Per stelle tanto massive, il vento ha un'intensità $\dot{M} \sim 10^{(-6)-(-4)} M_\odot$ yr^{-1} e una velocità $v_{\rm w} \sim 20 - 1000$ km/s: si suppone che il GRB sia prodotto nei residui di questo vento. Il profilo di densità per $R > R_0$ sarà approssimativamente $n \propto R^{-2}$. Se si parametrizza la densità

$$n_{\rm ism}(R > R_0) = \frac{1.5 \times 10^{36}\ {\rm cm}^{-3}}{(R/{\rm cm})^2} \frac{\dot{M}_{-6}}{v_{20}}$$

(dove $\dot{M}_{-6} \equiv \dot{M}/(10^{-6} M_\odot\ {\rm yr}^{-1})$ e $v_{20} \equiv v_{\rm w}/(20\ {\rm km/s})$), si scopre che il tempo scala per l'irraggiamento di un proiettile è

$$\tau \cong 0.05\ {\rm s} \frac{E_{53} v_{20}}{\alpha_{-2}^2 N_2 \Gamma_3^4 \dot{M}_{-6}} \propto \frac{M_{\rm b}}{n_{\rm ism}}.$$

Alla fine di questo discorso è importante porre l'attenzione sul fatto che questo modello rappresenta un eccezione a quanto detto circa l'impossibilità di produrre un comportamento fenomenologico del II tipo a partire da un meccanismo a shock esterni. Come primo motivo, l'angolo di apertura degli ejecta è così piccolo che $T_{angolare} \ll \tau$. In secondo luogo, a causa della densità ambientale molto alta, $\tau \sim 10^{-3}$ s e quindi la durata totale del burst è determinata dal tempo durante il quale il meccanismo interno opera. La microstruttura della curva di luce è invece regolata dalle proprietà statistiche del flusso di proiettili su un tempo scala determinato dalla loro massa. Questa è una differenza sostanziale rispetto al modello a shock interni, in cui la scala di variabilità era determinata direttamente dai tempi scala intrinseci dell'oggetto centrale.

L'evoluzione successiva del sistema prevede che, terminata la fase del GRB in cui i proiettili hanno irraggiato – come ordine di grandezza – metà della loro energia cinetica iniziale, le onde d'urto dei singoli bullets si fondono a formare un solo fronte di shock collimato. Quello che sembra naturale ne derivi è un irraggiamento nella maniera standard degli afterglow tramite interazioni con un profilo di densità esterna decrescente.

1.6 La natura dell'oggetto centrale

Per le caratteristiche dell'inviluppo del motore interno del GRB, sull'oggetto centrale si possono dare solo indicazioni indirette. Queste possono essere riassunte in un elenco sommario:

- *Energia*: L'energia (10^{51-52} erg) è comparabile con l'energia di legame di un oggetto compatto della massa solare.

- *Variabilità*: Il tempo scala con cui varia la luminosità nelle curve di luce (fino al millisecondo) suggerisce la presenza di una sorgente delle dimensioni di un oggetto compatto di massa paragonabile a quella solare.

- *Durata*: La durata del burst indica un attività prolungata che si esplica per un periodo molto maggiore del tempo scala gravitazionale della sorgente.

- *Flusso iperrelativistico*: Il motore interno deve essere in grado di emettere ejecta per circa $10^{-5} M_\odot$ a fattori di Lorentz di $\sim 100 - 1000$.

- *Collimazione*: Probabilmente il flusso è collimato con un'apertura angolare di pochi gradi. Essendo il beaming relativistico proporzionale a Γ, la radiazione dell'afterglow dovrebbe essere meno collimata di quella propria del burst. Questo significa che si dovrebbero poter osservare degli afterglow senza aver prima registrato il GRB vero e proprio.

- *Frequenza*: La frequenza con cui si crede che scoppi un GRB dovrebbe essere $\sim 10^{-7}$ yr^{-1} per galassia. Se, in realtà, la radiazione è collimata in un angolo θ, questa frequenza dovrebbe aumentare di un fattore $\cong 4\theta^{-2}$.

- *Galassie ospiti*: Le galassie che ospitano i GRBs sono state identificate nella maggior parte dei casi per cui sia stato possibile seguire l'afterglow ottico. Gran parte dei bursts, poi, sono avvenuti nelle regioni centrali delle galassie; questo sembra escludere che i progenitori fossero delle binarie di neutroni dalla vita lunga facenti parte di galassie nane [50]: in questo caso, infatti, probabilmente la velocità peculiare del sistema avrebbe espulso dalla galassia in questione i due oggetti compatti.

- *Associazione con le regioni di formazione stellare*: In alcuni casi, i burst si sono verificati in galassie con forte attività di formazione stellare [30]. Questo sembra indicare che i progenitori abbiano avuto una rapida evoluzione: potrebbe trattarsi di stelle molto massicce collassate fino a diventare oggetti compatti oppure sistemi binari di stelle di neutroni di breve vita (10^{4-5} yr) [69].

- *Associazione con le supernovae (SNe)*: Le prime idee teoriche circa una connessione tra SNe di tipo Ic (senza righe di idrogeno, elio o silicio) e GRBs risalgono a quarant'anni fa [11, 12]. Attualmente alcuni dati osservativi sembrano puntare in questa direzione [75, 34, 24]. In particolare, la SN1998bw rientra nell'intervallo angolare di fiducia del GRB980425 [22]. In più, l'emissione radio della shell di questa SN sembra indicare che si stia espandendo a $\Gamma \geq 2$, caratteristica questa mai osservata prima in una SN [39]. Questo, tuttavia, pone un problema a proposito dell'energia del fenomeno in questione, che, se l'identificazione fosse verificata, sarebbe circa 5 ordini di grandezza più piccola dei normali GRBs. Altri esempi sono il GRB970228 e il GRB980326 [9], le curve di luce dei cui afterglow sembrano date dalla sovrapposizione del tipico andamento dell'afterglow e del picco di una SN. Il caso, tuttavia, che più di recente ha destato maggiore attenzione è il GRB030329, la cui grande luminosità ha aggiunto importanza alle già notevoli caratteristiche del GRB980425 (troppo poco luminoso per dare evidenze nette della sua natura di GRB): la SN2003dh associata ha caratteristiche spettrali molto simili (è anch'essa del tipo Ic) alla SN1998bw.

  Il problema più consistente legato a questo tentativo di associare le due classi di fenomeni è dovuto al fatto che molti afterglow non hanno esibito l'aumento temporaneo di luminosità richiesto dalla presenza di una ipotetica SN, sebbene, in linea principio, fosse una caratteristica potenzialmente rilevabile.

La necessità di conciliare queste caratteristiche all'interno di un unico (preferibilmente) modello valido per ogni GRB, ha portato all'idea che l'emissione di energia del burst sia sostenuta dall'accrescimento di un disco di $\sim 0.1 M_\odot$ su un oggetto compatto (presumibilmente, un buco nero). Il disco

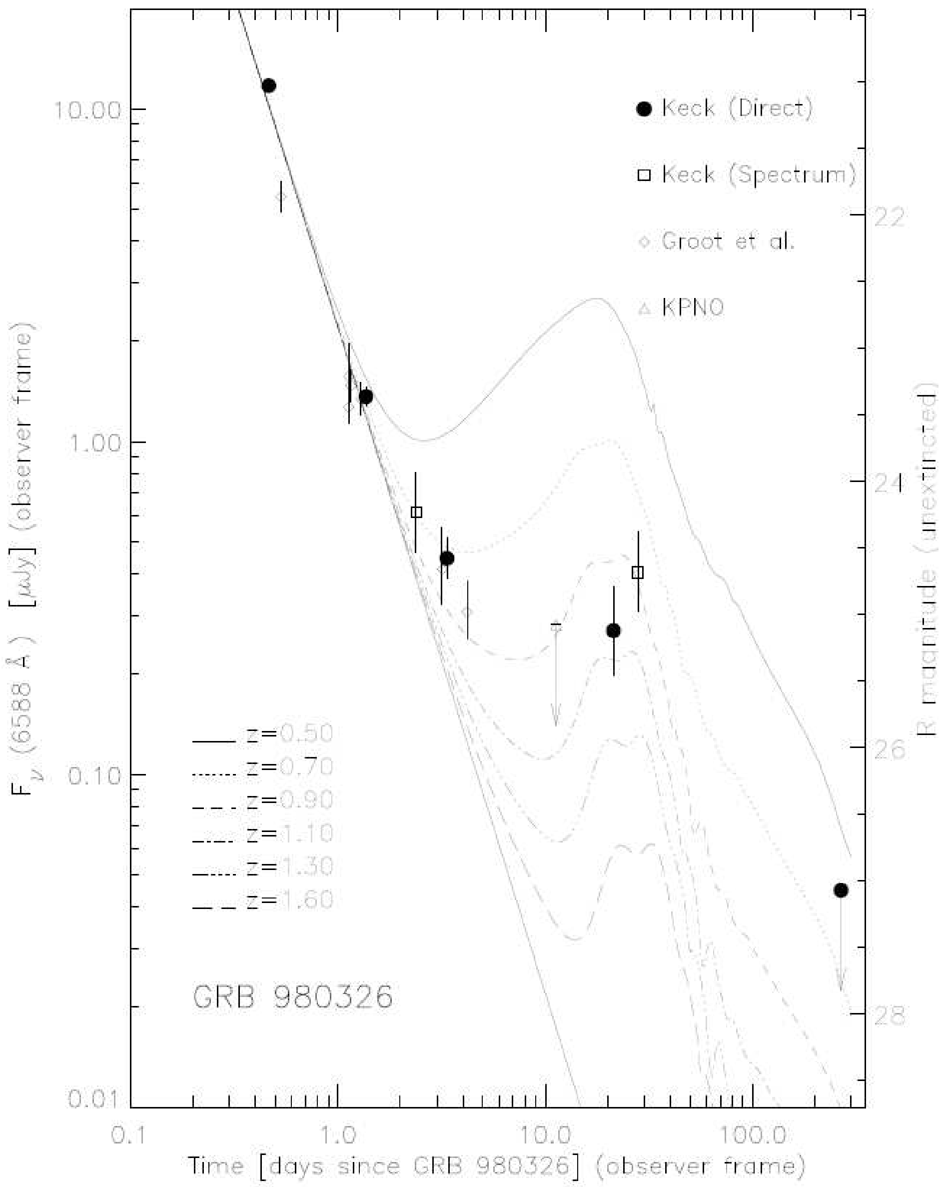


Figura 1.13: Indicazioni dalla curva di luce dell'afterglow del GRB980326 della presenza della sovrapposizione della curva di una SN.

dovrebbe formarsi simultaneamente al buco nero dalla materia rallentata nel collasso dalle forze centrifughe. L'energia gravitazionale del disco dovrebbe essere sufficiente a garantire il fabbisogno energetico del burst; il tempo di accrescimento dovrebbe determinare la durata totale del fenomeno, mentre la variabilità delle curve di luce sarebbe legata al tempo scala gravitazionale dell'oggetto centrale o idrodinamico del disco.

Un'altra ipotesi prevede che l'energia sia estratta da quella rotazionale del buco nero tramite l'effetto di Blandford-Znajek [7]: se un buco nero rotante è permeato da campi magnetici prodotti da correnti esterne in un disco equatoriale, si genera una differenza di potenziale elettrico sufficientemente grande da rendere il vuoto attorno all'oggetto compatto instabile per produzione a cascata di coppie. In queste condizioni si stabilisce una magnetosfera *force-free* ($\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{J}/\rho) \times \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0$) e si dimostra che l'energia e il momento angolare vengono estratti elettromagneticamente dal buco nero.

Sono stati proposti vari modi per portare ad un sistema di buco nero rotante e toro di accrescimento:

- *Fusione di binarie di neutroni*: Questo è stato considerato per qualche tempo il modo canonico di produzione cosmologica dei GRBs [16]. Il meccanismo che porta alla fusione dovrebbe essere la perdita di momento angolare per irraggiamento di onde gravitazionali. Stime della frequenza di questi eventi si attestano attorno a $10^{(-6)-(-7)}$ yr^{-1} per galassia, valore questo comparabile con quello tipico dei GRBs. Il prodotto della fusione dovrebbe essere un buco nero di $\sim 2.4 M_\odot$ circondato da un disco di accrescimento spesso di $(0.1 - 0.2) M_\odot$ [15, 60, 59].

- *Fusione di una stella di neutroni con un buco nero*: Nato come variazione del modello precedente, in questo scenario la stella di neutroni dovrebbe essere lacerata dal buco nero, lasciando sulla sia scia un disco di accrescimento forse un po' più massiccio dell'analogo da binaria di neutroni. Un buco nero di massa maggiore ($\sim 10 M_\odot$) di quella ottenibile con la fusione di due stelle di neutroni dovrebbe dar vita ad un burst con comportamento e tempi scala un po' diversi da quelli descritti al punto precedente.

  Resta il fatto che nonostante i sistemi buco nero - stella di neutroni si stimi siano più frequenti delle binarie di neutroni, nessuno è stato finora identificato come tale.

- *Fusione di una nana bianca con una stella di neutroni*: Qui non si tratta di una semplice variante del primo scenario. Una nana bianca orbitante attorno ad una stella di neutroni si avvicina a questa per emissione gravitazionale; se il rapporto tra le due masse è piccolo, quando la nana bianca raggiunge il limite di Roche il sistema diventa instabile per creazione di un disco di accrescimento prodotto dalla nana bianca. L'accrescimento, che dovrebbe subentrare su tempi scala idrodinamici dell'ordine del secondo, fa collassare la stella di neutroni a buco nero. In funzione della viscosità e delle perdite di neutrini, il tasso di accrescimento potrebbe essere sufficientemente alto da portare la durata dell'accrescimento a qualche secondo, tempo questo comparabile con la durata di un GRB.

- *Collapsar (o Hypernova)*: Questo modello [77, 51, 78], che sembra attualmente il più plausibile, considera una stella rotante costituita da un inviluppo di $\sim 15M_{\odot}$ di elio ed un nucleo interno di ferro (una stella sulla sequenza principale di combustione dell'elio): questa stella di Wolf-Rayet potrebbe ragionevolmente essere frutto dell'evoluzione di una stella di $\sim 40M_{\odot}$ della sequenza principale; l'inviluppo di idrogeno si presume sia stato ceduto ad una compagna o espulso tramite vento stellare. Il nucleo (di $\sim 2M_{\odot}$) collassa fino a diventare un buco nero di Kerr. Per effetto di Blandford-Znajek si produce un getto che si propaga lungo l'asse di rotazione e impatta sull'inviluppo di elio in regime relativistico. Si stima, tuttavia, che le perdite di energia all'interno di tale inviluppo, facciano emergere questo getto appena supersonicamente al di fuori della stella. Il meccanismo che dovrebbe accelerare questo shock fino ai fattori di Lorentz richiesti per la produzione di un GRB è connesso strettamente con l'accelerazione di uno shock in un'atmosfera il cui profilo decresce esponenzialmente con il raggio. Ma questa è materia per il prossimo capitolo.

Capitolo 2

Shock iperrelativistici in atmosfere esponenziali

2.1 Introduzione

L'interesse per lo studio della propagazione degli shock in atmosfere la cui densità decresce esponenzialmente nasce dalla necessità di indagare sull'evoluzione delle onde d'urto prodotte dall'attività finale di una stella. Se si specializza l'equazione di Eulero al caso dell'idrostatica in simmetria sferica – come richiesto dalle condizioni dell'atmosfera stellare nella fase pre-parossistica – si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial r} p = -\rho g \tag{2.1}$$

dove g indica il modulo del campo gravitazionale, supposto costante nella regione considerata. Imponendo per semplicità l'isotermia dell'atmosfera, l'equazione di stato per un gas perfetto si riduce a

$$p = \frac{k_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{p}}} T \rho.$$

Si ottiene, quindi, dalla (2.1) una decrescita esponenziale della densità atmosferica con il raggio.

Le condizioni di Rankine-Hugoniot [42] (Taub [67] nel caso relativistico) per le discontinuità delle quantità fluidodinamiche a cavallo di uno shock, unitamente al secondo principio della termodinamica, impongono una velocità supersonica per lo shock rispetto al fluido non ancora attraversato dalla discontinuità (upstream): la regione a valle dello shock, da un punto di vista idrodinamico, non è quindi connessa causalmente con le alterazioni prodotte dall'onda d'urto nel fluido a monte (downstream). Questo fa sì che, sebbene lo shock nasca da una situazione chiaramente non stazionaria della vita di una stella (quale può essere la supernova), esso si propaghi in un mezzo la cui stratificazione radiale è determinata dalle condizioni idrostatiche della fase precedente.

Chiarito il motivo di interesse per questo particolare problema dell'idrodinamica, va ora detto che la situazione newtoniana è stata studiata approfonditamente. Quello che risulta importante far notare è il fatto che, indipendentemente dal regime di velocità con cui si ha a che fare, la lunghezza scala dell'atmosfera $k_B T/(m_p g)$ è molto piccola rispetto al raggio stellare, motivo per cui si può assumere una simmetria piana anziché sferica (la coordinata radiale sarà sostituita da x).

In una atmosfera upstream il cui profilo di densità ha un andamento del tipo

$$\rho(x) = \rho_0 e^{-k_0 x}, \tag{2.2}$$

la posizione di uno shock $X(t)$, che per $t = -\infty$ si trova in $x = -\infty$ e per $t_0 < 0$ passa per $x = 0$, è determinata [25, 27, 28, 56, 10] (per motivi dimensionali) da

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha}{k_0 t} \tag{2.3}$$

dove α è una costante adimensionale (negativa) che si può determinare imponendo, nelle equazioni dell'idrodinamica per il fluido downstream, il passaggio attraverso un punto sonico ($M \equiv v/c_s = 1$). Integrando la (2.3) si ottiene

$$X(t) = \frac{\alpha}{k_0} \log \frac{t}{t_0}. \tag{2.4}$$

È evidente che, per $t = 0$, questa soluzione ha una singolarità che corrisponde al raggiungimento dell'infinito spaziale in un tempo finito (*blow-up*). Tuttavia, al di là della non fisicità di questo risultato per velocità troppo grandi ($\sim c$), resta valido il significato della (2.4) per velocità newtoniane: lo shock, in presenza di un gradiente della densità ambientale, accelera. Un'analisi della stabilità corrugazionale di questa soluzione, poi, evidenzia come – per un certo range di numeri d'onda delle perturbazioni al piano dello shock – il sistema risulti instabile [62, 10]. Questo produce delle conseguenze interessanti nel campo delle esplosioni delle supernovae, ma non è immediatamente applicabile ai modelli delle hypernovae o dei fireball per i GRBs, dove vige un regime iperrelativistico ($\Gamma \sim 100$) per la propagazione degli shock.

2.2 La soluzione iperrelativistica non perturbata

La trattazione relativistica di uno shock in un'atmosfera stratificata secondo la (2.2) [53, 31, 5, 76] comporta la sostituzione della (2.3) con

$$\frac{dX^i}{ds} = \frac{\alpha k^i}{k_\mu k^\mu s} \qquad i \in \{1, 2, 3\} \tag{2.5}$$

dove X^μ descrive gli eventi solidali con lo shock a y e z fissate nei riferimenti in cui lo shock è normale ($v_\parallel = 0$), s è il tempo proprio dello shock e $k_\mu \equiv (0, k_0, 0, 0)$ nel riferimento dell'upstream; questa sostituzione nasce dalla necessità di un'espressione covariante per la quadrivelocità dello shock, congiuntamente all'impossibilità di scrivere in maniera univoca su base puramente dimensionale l'espressione per la velocità dello shock (si ricordi che, a differenza dell'idrodinamica newtoniana, nella teoria relativistica si ha una velocità scala, c, che permette la costruzione di un parametro adimensionale $(k_0 ct)$ dal quale far dipendere un'espressione analoga alla (2.3)). Si riconosce, tuttavia, nella (2.5) la stessa struttura della (2.3) (a patto di sostituire il tempo dell'upstream col tempo proprio dello shock): questo significa che lo shock raggiunge l'infinito in un tempo *proprio* finito. Volendo integrare la (2.5), è utile ricordare che $dx/ds = v\Gamma$; ponendo $c = 1$ si ricava

$$\frac{k_0 t}{-\alpha} = \log\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{1/2} - \frac{1}{v} + \text{cost.} \tag{2.6}$$

Si riconosce nella (2.6) il corretto limite non relativistico (per $v \ll 1$, $k_0 t/\alpha \approx 1/v$). Nell'opposto limite iperrelativistico, si ha:

$$\frac{k_0(t - t_\mathrm{i})}{-\alpha} \approx \log\frac{\Gamma}{\Gamma_\mathrm{i}} \tag{2.7}$$

dove si è assunto che all'istante t_i lo shock abbia un fattore di Lorentz Γ_i. La (2.7) può essere riscritta – ricordando la (2.2) e che, nel limite iperrelativistico, $v \approx 1$ – nella forma

$$\frac{\Gamma_\mathrm{f}}{\Gamma_\mathrm{i}} \approx \left(\frac{\rho_\mathrm{f}}{\rho_\mathrm{i}}\right)^{1/\alpha}. \tag{2.8}$$

Come anticipato durante la descrizione della soluzione non relativistica, la determinazione del parametro α deriva dalla scrittura delle equazioni dell'idrodinamica per il downstream. Nella trattazione relativistica, queste assumono una forma esplicitamente covariante, se scritte come

$$\begin{cases} T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 & \text{Equazioni del moto} \\ (n' u^\mu)_{;\mu} = 0 & \text{Equazione di continuità del numero barionico} \end{cases}$$

dove $T^{\mu\nu} = w u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso[1] ed n' è la densità barionica nel riferimento comovente [40, 42]. Risulta comodo riscrivere queste equazioni in modo piu esplicito. Ricordando che $u^\mu = (\gamma, \gamma\boldsymbol{v})$ e che nel riferimento dell'upstream $n = \gamma n'$, l'equazione di continuità del numero barionico assume la forma usuale

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(n\boldsymbol{v}) = 0. \tag{2.9}$$

[1] w e p sono rispettivamente l'entalpia e la pressione per unità di volume nel riferimento comovente.

Per quanto riguarda le equazioni del moto, l'analogo dell'equazione di Eulero può essere ottenuto ponendo a zero $T^{i\mu}{}_{;\mu} - T^{0\mu}{}_{;\mu} u^i/\gamma$; quello che si ottiene è

$$\gamma^2 w \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{v} \right] + \left(\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{v} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0$$

che, nel limite iperrelativistico ($p = e/3 = w/4$), con l'introduzione della derivata lagrangiana ($D/Dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}$), diventa

$$4\gamma^2 e \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} + \left(\boldsymbol{\nabla} e + \boldsymbol{v} \frac{\partial e}{\partial t} \right) = 0. \tag{2.10}$$

La conservazione dell'energia può essere riscritta proiettando la quadridivergenza del tensore energia-impulso nella direzione della quadrivelocità; tenendo presente che $u_\mu u^\mu = 1$, $u_\mu \partial u^\mu / \partial x^\nu = 1/2\, \partial u_\mu u^\mu / \partial x^\nu = 0$ e quindi

$$u^\mu \frac{\partial T^\nu_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial (w u^\nu)}{\partial x^\nu} - u^\nu \frac{\partial p}{\partial x^\nu} = 0.$$

Sostituendo l'identità $wu^\nu = n' u^\nu (w/n')$ e utilizzando la (2.9), la precedente equazione può essere riscritta come

$$n' u^\nu \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{w}{n'} - \frac{1}{n'} \frac{\partial p}{\partial x^\nu} \right] = 0. \tag{2.11}$$

Nel limite in cui $p = w/4$, la (2.11) è equivalente a

$$u^\nu \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \log \frac{e^3}{n'^4} \right] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{D}{Dt} \frac{e^3}{n'^4} = 0. \tag{2.12}$$

Si noti come la (2.12) non implichi $n' = \mathrm{cost}\, e^{3/4}$ ovunque nel fluido: in generale $n' = f(e, \sigma)$ e σ (la densità di entropia per unità di volume proprio) è diversa in punti diversi del flusso; tuttavia, partendo dal 1° principio della termodinamica – riscritto, per dei processi reversibili, alla luce del fatto che $dQ = TdS$ [41]:

$$d\frac{w}{n'} = T d\frac{\sigma}{n'} + \frac{1}{n'} dp$$

(T indica la temperatura), è immediato dimostrare che la (2.11) implica la conservazione dell'entropia specifica σ/n': questo fa sì che ogni elemento di massa conservi la sua entropia e, quindi, all'interno di ogni linea di universo,

$$n' = f_{\mathrm{s}}(e) = \mathrm{cost}_{\mathrm{s}} e^{3/4},$$

avendo usato il pedice s (indicante il tempo proprio) per ricordare la validità di quell'espressione solo nell'ambito di *una* (arbitraria) linea d'universo.

Prima di passare alla proposta della variabile di autosimilitudine con cui separare le (2.9), (2.10) e (2.12), sembra opportuno discutere le condizioni al contorno di Taub. Richiedendo, data la simmetria del problema, che lo shock sia normale, queste si ottengono imponendo la continuità dei flussi di numero barionico, impulso normale ed energia a cavallo dello shock; il loro limite iperrelativistico è:

$$n_2 = 2\Gamma^2 n_1, \quad \gamma_2^2 = \frac{1}{2}\Gamma^2, \quad e_2 = 2\Gamma^2 w_1 \tag{2.13}$$

dove i pedici 1 e 2 si riferiscono rispettivamente alle quantità immediatamente prima e dopo lo shock. Ricordando che il materiale nell'upstream è freddo ($p_1 \ll e_1 \approx \rho_1$), dalla (2.8) segue che

$$w_1 = e_1 = \rho_1 = \rho_0 e^{-k_0 X} = \rho_0 (\Gamma/\Gamma_{\rm i})^\alpha \tag{2.14}$$

da cui

$$e_2 = 2\frac{\rho_0}{\Gamma_{\rm i}^\alpha}\Gamma^{2+\alpha} \equiv 2q_0\Gamma^{2+\alpha}. \tag{2.15}$$

In maniera del tutto analoga si dimostra che la prima delle (2.13) si scrive come

$$n_2 = 2\frac{n_0}{\Gamma_{\rm i}^\alpha}\Gamma^{2+\alpha} \equiv 2z_0\Gamma^{2+\alpha} \tag{2.16}$$

dove $n_0 \equiv \rho_0/m$.

Detto questo, è ora possibile provare a suggerire la forma autosimile delle quantità del problema con più profonda cognizione di causa. Innanzi tutto la variabile di autosimilitudine ξ: nel regime newtoniano una scelta appropriata è $\xi_{\rm nr} = k_0(x - X)$. Nel caso iperrelativistico ($v \approx 1 - \frac{1}{2\Gamma^2}$), tuttavia, la seconda delle (2.13) indica che il materiale shockato al punto $x = x_0$ si trova ad una distanza proporzionale a $1/\Gamma^2$ dallo shock al punto $x = x_0 + 1/k_0$ (essendo $\dot{X} - v_2 \approx \frac{1}{2\Gamma^2}$). Questo suggerisce una correzione alla $\xi_{\rm nr}$ del tipo

$$\xi = \Gamma^2\xi_{\rm nr} = k_0(x - X(t))\Gamma^2(t). \tag{2.17}$$

Lo shock è individuato in ogni istante da $\xi = 0$, mentre il materiale downstream è caratterizzato da valori della variabile autosimile negativi.

Di nuovo, la seconda delle (2.13), la (2.15) e la (2.16) suggeriscono la seguente forma per le quantità fluidodinamiche a monte dello shock:

$$\gamma^2(x,t) = g(\xi)\Gamma^2(t), \quad e(x,t) = q_0 R(\xi)\Gamma^{2+\alpha}(t), \quad n(x,t) = z_0 N(\xi)\Gamma^{2+\alpha}(t). \tag{2.18}$$

Le (2.13) si traducono, poi, nelle seguenti condizioni al contorno per g, R ed N:

$$g(0) = \frac{1}{2}, \quad R(0) = 2, \quad N(0) = 2. \tag{2.19}$$

Sostituendo la (2.17) e la (2.18) nelle (2.9), (2.10) e (2.12) si ottengono le seguenti equazioni per g, R ed N in forma di problema di Cauchy 3D (l'apice indica la derivata ordinaria rispetto a ξ)

$$R' = \frac{2g\,[-2\alpha(4+\alpha) + (2+\alpha)(\alpha-4\xi)g]\,R}{\alpha^2 + (\alpha-4\xi)g\,[-4\alpha + (\alpha-4\xi)g]} \tag{2.20}$$

$$g' = \frac{g^2\left[4(\alpha-4\xi)g - 14\alpha - 3\alpha^2\right]}{\alpha^2 + (\alpha-4\xi)g\,[-4\alpha + (\alpha-4\xi)g]} \tag{2.21}$$

$$N' = \frac{Ng\left\{\alpha^2(18+5\alpha) + 2(\alpha-4\xi)g\,[-2\alpha(5+2\alpha) + (2+\alpha)(\alpha-4\xi)g]\right\}}{-\alpha^3 + (\alpha-4\xi)g\,\{5\alpha^2 + (\alpha-4\xi)g\,[-5\alpha + (\alpha-4\xi)g]\}}. \tag{2.22}$$

Riscrivendo la (2.22) come

$$\frac{N'}{N} = \frac{2g\,[(2+\alpha)/\alpha] - g'/g}{g(1-4\xi/\alpha) - 1}$$

è facile notare come il denominatore rimanga sempre negativo (cfr. con la prima delle (2.19)). Per il resto i denominatori della (2.20) e della (2.21) sono identici. Affinché la soluzione del sistema non abbia singolarità, è necessario che il punto in cui il denominatore comune a R' e g' si annulla (punto critico o sonico: $M = 1$) sia una radice anche per i due numeratori. Questa richiesta è sufficiente per determinare il valore di α. Una strategia per farlo è quella di tentare di risolvere il sistema (non differenziale) di tre equazioni (denominatore e numeratori di R' e g' uguali a zero) in quattro incognite (α, punto critico ξ_c, $R(\xi_c)$ e $g(\xi_c)$). Come atteso, il sistema non ammette un'unica soluzione: alcune sono banali e poco significative (quelle con $\alpha = 0$); altre (quelle caratterizzate da $\xi_c = (-3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}/g(\xi_c))/6$ e $\alpha = 2/3\,(2\sqrt{3} - 3) > 0$) non sono fisiche; sono accettabili quelle che portano a determinare un valore di $\alpha < 0$:

$$\alpha = -\frac{2}{3}(2\sqrt{3} + 3) \approx -4.309401. \tag{2.23}$$

Una volta individuato il valore di α, un'integrazione numerica delle (2.20), (2.21) e (2.22) porta a determinare $\xi_c \approx -0.462962$. Le soluzioni numeriche sono graficate in Fig. 2.1.

2.3 Perturbazioni alla soluzione iperrelativistica

Lo studio delle perturbazioni che si intende effettuare ricalca nell'idea quello effettuato da Chevalier nel caso non relativistico. In particolare, l'interesse è rivolto ad una trattazione autosimile del problema in grado di tener conto di una forma dello shock alterata rispetto alla simmetria piana discussa in precedenza. Ci si aspetta, fisicamente, un rimescolamento delle linee di

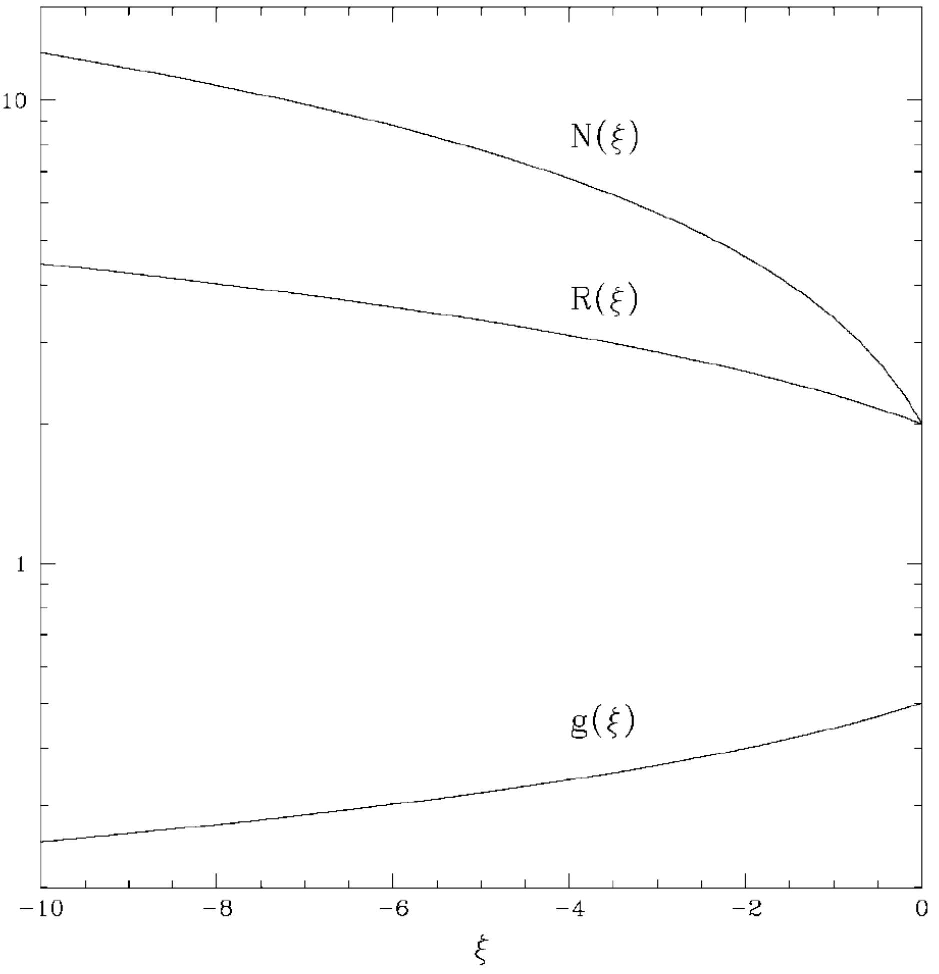


Figura 2.1: g, R ed N.

flusso imperturbate nel downstream, legato alla presenza di una corrugazione dello shock che introdurrà (a causa della rifrazione presente negli shock obliqui) una componente tangenziale ($\hat{\boldsymbol{y}} \equiv \hat{\boldsymbol{t}}_{\mathbf{0}} \perp \hat{\boldsymbol{x}}$) della velocità del materiale shockato. Inoltre, grazie all'omogeneità nella coordinata tangenziale del problema non perturbato ($\partial/\partial y = 0$), si rende possibile un'analisi di Fourier standard delle dipendenze delle perturbazioni da quella coordinata. Tenendo in considerazione la presenza di questi fenomeni, una proposta che sembra plausibile per la forma autosimile delle perturbazioni (secondo l'approccio euleriano alle stesse) alle quantità idrodinamiche è la seguente (il pedice 0 contrassegna le quantità imperturbate trovate sopra):

$$\delta u_x(t,\xi,y) \equiv u_x(t,\xi,y) - u_{x0}(t,\xi) = g_x(\xi)\Gamma^s(t)e^{iky} \tag{2.24}$$

$$\delta u_y(t,\xi,y) \equiv u_y(t,\xi,y) = g_y(\xi)\Gamma^{s+p_1}(t)e^{iky} \tag{2.25}$$

$$\delta e(t,\xi,y) \equiv e(t,\xi,y) - e_0(t,\xi) = q_0 R_1(\xi)\Gamma^{s+p_2}(t)e^{iky} \tag{2.26}$$

$$\delta n(t,\xi,y) \equiv n(t,\xi,y) - n_0(t,\xi) = z_0 N_1(\xi)\Gamma^{s+p_3}(t)e^{iky}. \tag{2.27}$$

Il parametro adimensionale s sarà da determinare con un'analisi simile a quella descritta a proposito della soluzione non perturbata. I parametri correttivi p_1, p_2 e p_3 saranno scelti dopo aver analizzato la forma delle equazioni del moto e delle relative condizioni al contorno, al fine di rintracciare nelle stesse la descrizione dei fenomeni che sopra si è mostrato lecito aspettarsi.

Si inserisce in questo contesto di definizioni delle quantità autosimili anche la perturbazione alla posizione dello shock (per quanto necessaria solo al momento della determinazione delle condizioni di Taub):

$$\eta(t,y) \equiv X(t,y) - X_0(t) = \frac{\epsilon}{k_0}\Gamma^{s+p_4}(t)e^{iky} \tag{2.28}$$

(valgono per p_4 le stesse considerazioni fatte per gli altri parametri). Per semplificare la scrittura delle equazioni che seguiranno, si preferisce rinominare la $g(\xi)$ della (2.18):

$$g_{\text{nuova}} \equiv \sqrt{g_{\text{vecchia}}}.$$

Queste premesse sono sufficienti a determinare le perturbazioni alle altre quantità (dipendenti da quelle già definite) richieste dalla trattazione. Al primo ordine nelle perturbazioni, nel limite iperrelativistico, si ha:

$$\delta\gamma(t,\xi,y) = \delta u_x(t,\xi,y)\left(1 - \frac{1}{2\gamma_0^2(t,\xi)}\right)$$

$$\delta\boldsymbol{v}(t,\xi,y) = \frac{1}{\gamma_0(t,\xi)}\left(\frac{\delta u_x(t,\xi,y)}{\gamma_0^2(t,\xi)}\hat{\boldsymbol{x}} + \delta u_y(t,\xi,y)\hat{\boldsymbol{y}}\right).$$

2.3.1 Equazioni del primo ordine per le perturbazioni

L'analisi delle piccole perturbazioni allo shock richiede la linearizzazione delle equazioni (2.9), (2.10) e (2.12):

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_0\delta v_x + v_0\delta n) + \frac{\partial}{\partial y}n_0\delta v_y = 0 \tag{2.29}$$

$$(8\gamma_0 e_0\delta\gamma + 4\gamma_0^2\delta e)\left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0\frac{\partial v_0}{\partial x}\right) +$$
$$4\gamma_0^2 e_0\left(\frac{\partial \delta v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\delta v_x + v_0\frac{\partial \delta v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial \delta e}{\partial x} + v_0\frac{\partial \delta e}{\partial t} + \frac{\partial e_0}{\partial t}\delta v_x = 0 \tag{2.30}$$

$$4\gamma_0^2 e_0 \left(\frac{\partial \delta v_y}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \delta v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta e}{\partial y} + \frac{\partial e_0}{\partial t} \delta v_y = 0 \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[-\frac{4e_0 \gamma_0^{4/3}}{3n_0^{7/3}} \delta n + \frac{\gamma_0^{4/3}}{n_0^{4/3}} \delta e + \frac{4e_0 \gamma_0^{1/3}}{3n_0^{4/3}} \delta \gamma \right] + \\ \delta v_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma_0^{4/3} e_0}{n_0^{4/3}} = 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Sostituendo la forma autosimile (2.18), (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) delle quantità idrodinamiche, le (2.29), (2.30), (2.31) e (2.32) diventano rispettivamente (trascurando gli ordini esplicitamente inferiori in Γ):

$$\begin{aligned} \Gamma^{p_3-1} g \left\{ -2\alpha N_1 g' + \alpha g N_1' + g^3 \left[2(p_3 + s + \alpha) N_1 - (\alpha - 4\xi) N_1' \right] \right\} \\ -2\alpha \left[g g_x N' + N \left(i \frac{k}{k_0} \Gamma^{p_1} g^3 g_y - 3 g_x g' + g g_x' \right) \right] = 0 \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} 4R \left\{ g_x \left[2(s-1) g^3 + \left((\alpha - 4\xi) g^2 - 3\alpha \right) g' \right] - g \left[-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right] g_x' \right\} \\ +2\alpha g g_x R' + \Gamma^{p_2-1} g \left\{ 2R_1 \left[(4 + p_2 + s + \alpha) g^3 - 2 \left(-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right) g' \right] \right. \\ \left. -g \left[\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right] R_1' \right\} = 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} i \frac{k}{k_0} \alpha \Gamma^{p_2-3} g^2 R_1 - \Gamma^{p_1} \left\{ 2R \left[g_y \left(2(p_1 + s - 1) g^3 + \left(-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right) g' \right) \right. \right. \\ \left. \left. -g \left(-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right) g_y' \right] + \alpha g g_y R' \right\} = 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} 2N \left\{ 4g \left[\alpha + 2(\alpha - 4\xi) g^2 \right] g_x R N' + N \left[2R \left(g_x \left(2(3s - \alpha - 1) g^3 \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \left(5\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right) g' \right) - 3g \left(-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right) g_x' \right) \\ \left. \left. -3g \left(\alpha + 2(\alpha - 4\xi) g^2 \right) g_x R' \right] \right\} \\ -3\Gamma^{p_2-1} N g \left\{ 2R_1 \left[2g \left(\alpha - (\alpha - 4\xi) g^2 \right) N' + N \left((4 - 3p_2 - 3s + \alpha) g^3 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. -2\alpha g' + 2(\alpha - 4\xi) g^2 g' \right) \right] + 3Ng \left[-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right] R_1' \right\} \\ +4\Gamma^{p_3-1} g \left\{ 7g \left[\alpha - (\alpha - 4\xi) g^2 \right] N_1 R N' + N \left[R \left(-2(3p_3 + 3s - \alpha - 4) g^3 N_1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. +(4N_1 g' + 3g N_1') \left(-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right) \right) + 3g \left(-\alpha + (\alpha - 4\xi) g^2 \right) N_1 R' \right] \right\} = 0. \end{aligned} \tag{2.36}$$

A questo punto è possibile passare alla determinazione dei parametri p_1, p_2 e p_3. È stata già discussa la necessità di accoppiare nel flusso la componente tangenziale della velocità al resto delle quantità idrodinamiche: dalla (2.35) segue, quindi, nel limite iperrelativistico, che $p_1 = p_2 - 3$. Infatti, se $p_1 < p_2 - 3$, all'ordine più alto in Γ la (2.35) si ridurrebbe a $R_1 = 0$. Nel caso invece in cui $p_1 > p_2 - 3$, si avrebbe $g_y' = f(g, R, N) g_y$, ovvero la componente tangenziale della quadrivelocità sarebbe completamente disaccoppiata dalle altre perturbazioni; si potrebbe inoltre dimostrare che, per una simile scelta dei parametri, dalle condizioni di Taub seguirebbe $g_y(0) = 0 \Rightarrow g_y(\xi) \equiv 0$.

Dalla (2.33) si deduce che $p_3 = 1$; i casi in cui $p_3 > 1$ o $p_3 < 1$ implicherebbero, in maniera analoga a quanto detto per g_y, un'evoluzione rispettivamente di N_1 o g_x disaccoppiata dalle altre perturbazioni. L'analisi dei parametri si conclude osservando che, per lo stesso ragionamento effettuato per la (2.33), la (2.34) implica $p_2 = 1 \Rightarrow p_1 = -2$. Eliminati i termini che questa scelta dei parametri rivela iperrelativisticamente irrilevanti, si può riscrivere questo set di equazioni differenziali per le perturbazioni in forma di problema di Cauchy 4D:

$$
\begin{gathered}
g_x' = \frac{1}{6N^2 gR\left[\alpha^2 - 4\alpha(\alpha-4\xi)g^2 + (\alpha-4\xi)^2 g^4\right]} \\
\left\{7g^2\left[-\alpha^2 + (\alpha-4\xi)^2 g^4\right] N_1 R N' - Ng\left[\alpha + (\alpha-4\xi)g^2\right]\right. \\
\left[4(\alpha-4\xi)g^2 R(g_x N' + N_1 g') - 2\alpha R(2g_x N' + 5N_1 g') - 3\alpha g(R_1 N' + N_1 R')\right. \\
\left. + g^3\left(3(\alpha-4\xi)R_1 N' + N_1\left(8(1+\alpha)R + 3(\alpha-4\xi)R'\right)\right)\right] \\
+ N^2\left[6(4+\alpha)(\alpha-4\xi)g^6 R_1 + 14\alpha^2 g_x R g' - 48\alpha(\alpha-4\xi)g^2 g_x R g'\right. \\
+ g^4\left(-3\alpha(7+3s+\alpha)R_1 + 10(\alpha-4\xi)^2 g_x R g'\right) - 3\alpha^2 g(4R_1 g' + g_x R') \\
+ (\alpha-4\xi)g^5\left(-6(\alpha-4\xi)R_1 g' + g_x\left(2(6s+\alpha-8)R + 3(\alpha-4\xi)R'\right)\right) \\
\left.\left. + \alpha g^3\left(18(\alpha-4\xi)R_1 g' + g_x\left((20-24s+2\alpha)R + 9(\alpha-4\xi)R'\right)\right)\right]\right\}
\end{gathered}
\tag{2.37}
$$

$$
g_y' = \frac{2Rg_y\left[2(s-3)g^3 - \alpha g' + (\alpha-4\xi)g^2 g'\right] + \alpha g_y g R' - ig^2\frac{k}{k_0}\alpha R_1}{2gR\left[-\alpha + (\alpha-4\xi)g^2\right]}
\tag{2.38}
$$

$$
\begin{gathered}
R_1' = \frac{2}{3N^2 g^2\left[\alpha^2 - 4\alpha(\alpha-4\xi)g^2 + (\alpha-4\xi)^2 g^4\right]} \\
\left\{-7g^2\left[\alpha - (\alpha-4\xi)g^2\right]^2 N_1 R N' - N^2\left[3(3-s+\alpha)(\alpha-4\xi)g^6 R_1 + 4\alpha^2 g_x R g'\right.\right. \\
-20\alpha(\alpha-4\xi)g^2 g_x R g' + 6\alpha^2 g R_1 g' + g^4\left(6(1+s)\alpha R_1 + 4(\alpha-4\xi)^2 g_x R g'\right) \\
-2\alpha g^3\left((4-6s+\alpha)g_x R + 3(\alpha-4\xi)R_1 g'\right) \\
\left. + (\alpha-4\xi)g^5 g_x\left(2(\alpha-2)R + 3(\alpha-4\xi)R'\right)\right] + Ng\left[-\alpha + (\alpha-4\xi)g^2\right] \\
\left[4(\alpha-4\xi)g^2 R(g_x N' + N_1 g') - 2\alpha R(2g_x N' + 5N_1 g') - 3\alpha g(R_1 N' + N_1 R')\right. \\
\left.\left. + g^3\left(3(\alpha-4\xi)R_1 N' + N_1\left(8(1+\alpha)R + 3(\alpha-4\xi)R'\right)\right)\right]\right\}
\end{gathered}
\tag{2.39}
$$

$$
\begin{aligned}
N_1' = {} & \frac{1}{3Ng^2\left[-\alpha^3+5\alpha^2(\alpha-4\xi)g^2-5\alpha(\alpha-4\xi)^2g^4+(\alpha-4\xi)^3g^6\right]} \\
& \left\{7\alpha g^2\left[\alpha^2-(\alpha-4\xi)^2g^4\right]N_1RN'+\alpha N^2\left[-6(4+\alpha)(\alpha-4\xi)g^6R_1\right.\right. \\
& +4\alpha^2g_xRg'-24\alpha(\alpha-4\xi)g^2g_xRg'+g^4\left(3\alpha(7+3s+\alpha)R_1\right. \\
& \left.+8(\alpha-4\xi)^2g_xRg'\right)+3\alpha^2g(4R_1g'+g_xR') \\
& \left.+\alpha g^3\left(-18(\alpha-4\xi)R_1g'+g_x\left((24s-2\alpha-20)R-3(\alpha-4\xi)R'\right)\right)\right] \\
& +Ng\left[2\alpha^2(7+3s+7\alpha)g^3N_1R+6(1+s+\alpha)(\alpha-4\xi)^2g^7N_1R\right. \\
& -2\alpha(\alpha-4\xi)^2g^4R(g_xN'+N_1g')+6\alpha^2(\alpha-4\xi)g^2R(4g_xN'+3N_1g') \\
& -2\alpha^3R(5g_xN'+8N_1g')-3\alpha^3g(R_1N'+N_1R') \\
& \left.\left.+\alpha(\alpha-4\xi)g^5\left(3(\alpha-4\xi)R_1N'+N_1\left(-8(2+3s+2\alpha)R+3(\alpha-4\xi)R'\right)\right)\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

Essendo queste equazioni lineari nelle perturbazioni, i denominatori dei membri di destra sono completamente determinati dalla trattazione all'ordine 0 del problema. Questo significa che è possibile determinare l'eventuale (ma in realtà necessaria) presenza di radici di tali denominatori senza procedere all'integrazione delle (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40). Una trattazione numerica del problema indica che il denominatore della (2.38) è sempre diverso da zero: ricordando infatti che $g^2(\xi) \leq 1/2$ e $\alpha, \xi \leq 0$, è immediato mostrare che $-\alpha + (\alpha-4\xi)g^2 > 0$. Viceversa, il denominatore sostanzialmente comune alla (2.37) e alla (2.39) e quello della (2.40) si annullano entrambi al punto sonico $\xi_{\rm c}$ della soluzione imperturbata. Come già discusso in occasione del problema all'ordine 0 nelle perturbazioni, la richiesta che i numeratori di queste ultime tre equazioni si annullino in $\xi_{\rm c}$, per eliminare singolarità non fisiche dalle soluzioni, assegna il valore di s – in generale – in funzione di k/k_0. Questa dipendenza funzionale indicherà i range di numeri d'onda delle perturbazioni rispetto alle quali il sistema è stabile e quelli in cui lo shock manifesta instabilità corrugazionale.

Una tale ricerca richiede l'integrazione numerica delle equazioni (2.37), (2.38), (2.39) e (2.40) a partire dalle condizioni al contorno fornite dalle condizioni di Taub allo shock. L'autoconsistenza che determina s si può, poi, leggere come un problema di Cauchy 4D monoparametrico, con condizioni al contorno in due punti (4 di Taub in $\xi_1 = 0$ e 3 sui numeratori in $\xi_2 = \xi_{\rm c}$).

2.3.2 Condizioni di Taub per le perturbazioni

Per procedere all'integrazione numerica delle equazioni trovate nel paragrafo precedente, è necessario trovare 4 condizioni al contorno per le perturbazioni. Come già visto nel caso del problema imperturbato, la strategia è quella di sfruttare le condizioni di Taub a cavallo dello shock per determinare $g_x(0)$, $g_y(0)$, $R_1(0)$ ed $N_1(0)$. In questo caso, però, la discussione è resa più complicata da due fattori principali. Il più evidente è legato al fatto che lo shock non ha un'unica velocità $\boldsymbol{v_0}$, bensì i suoi punti si muovono lungo l'asse x con velocità dipendenti dalla coordinata y:

$$\boldsymbol{v}(y,t) = \boldsymbol{v_0}(t) + \dot{\eta}(y,t)\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2.41}$$

da cui, per quanto concerne il fattore di Lorentz perturbato, si ottiene (al primo ordine in $\dot{\eta}$ e al secondo significativo in $1/\Gamma$)[2,3]

$$\Gamma_{\rm up}(y,t) = \Gamma(t)\left[1 + \dot{\eta}(y,t)\left(\Gamma^2(t) - \frac{1}{2}\right)\right]. \tag{2.42}$$

In secundis, la normale allo shock (e quindi la tangente) non coincide con l'asse x (o y): perciò è necessario trovare l'espressione per i versori perpendicolare $\hat{\boldsymbol{n}}$ e tangente $\hat{\boldsymbol{t}}$ tenendo presente che la superficie di discontinuità è stata corrugata dalla perturbazione η. Questo, tra l'altro, fa sì che lo shock non sia piano: non è quindi possibile trovare un riferimento rispetto al quale lo shock sia globalmente normale.

Detto ciò, è possibile cominciare il calcolo esplicito delle condizioni di Taub. A questo scopo sembra comodo passare nel riferimento primato, localmente (nella coordinata $y_{\rm c}$) comovente con l'onda d'urto. Imponendo che sullo shock non si accumuli materia, impulso o energia, la notazione $[f] \equiv f_1 - f_2$ (come nella trattazione all'ordine 0, 1 indica l'immediato upstream e 2 l'immediato downstream) permette di scrivere la continuità dei flussi come

$$\left[n^{n\prime}\right] \equiv \left[\overline{n}u'_n\right] = 0 \tag{2.43}$$

$$\left[T'^{nn}\right] \equiv \left[w{u'_n}^2 + p\right] = 0 \tag{2.44}$$

$$\left[T'^{tn}\right] \equiv \left[wu'_n u'_t\right] = 0 \tag{2.45}$$

$$\left[T'^{0n}\right] \equiv \left[w\gamma' u'_n\right] = 0 \tag{2.46}$$

dove $\overline{n}$ indica la densità barionica nel riferimento proprio del fluido, mentre la densità di entalpia w e la pressione p vanno intese iperrelativisticamente connesse ad e nel modo consueto. Occorre, ora, relazionare queste quantità a quelle per cui sono state scritte le equazioni nei precedenti paragrafi.

Ricordando la dilatazione delle lunghezze nel passaggio al riferimento proprio,

$$\eta'_{y_{\rm c}}(y,t) = \Gamma_{\rm up}(y_{\rm c},t)\eta(y,t). \tag{2.47}$$

Al primo ordine in η, i versori normale e tangente in $y_{\rm c}$ allo shock sono quindi:

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\left.\frac{\partial \eta'_{y_{\rm c}}(y,t)}{\partial y}\right|_{y=y_{\rm c}} \end{pmatrix}; \qquad \hat{\boldsymbol{t}} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial \eta'_{y_{\rm c}}(y,t)}{\partial y}\right|_{y=y_{\rm c}} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

[2] D'ora in poi si assumerà sempre, tacitamente, questa approssimazione.

[3] Il pedice *up* ricorda che è lo stesso fattore di Lorentz con cui lo shock vede arrivare il fluido upstream.

Per quanto riguarda l'upstream, la parte spaziale della quadrivelocità $\boldsymbol{u'}_1 = -\Gamma_{\rm up}\boldsymbol{v}$ si scompone nelle parti normale e tangenziale:

$$u_1'^n \equiv \boldsymbol{u'}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = -\Gamma(1+\dot{\eta}\Gamma^2) \tag{2.49}$$

$$u_1'^t \equiv \boldsymbol{u'}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{t}} = -\Gamma \left.\frac{\partial \eta'_{y_{\rm c}}(y,t)}{\partial y}\right|_{y=y_{\rm c}}. \tag{2.50}$$

Dalla (2.14), ricordando che l'atmosfera è stratificata, segue che la densità di energia è data da

$$e_1 = q_0\Gamma^\alpha(1-k_0\eta). \tag{2.51}$$

In maniera analoga, è possibile trovare la densità barionica nel riferimento proprio dell'upstream:

$$\overline{n}_1 = z_0\Gamma^\alpha(1-k_0\eta). \tag{2.52}$$

Il discorso per il downstream è un po' più complicato perché, essendo lo shock sempre subsonico rispetto al materiale a monte, è necessario considerare oltre la consueta stratificazione atmosferica, le perturbazioni apportate nel fluido shockato da g_x, g_y, R_1 ed N_1. Questi due effetti si combinano per generare il seguente fattore di Lorentz del downstream nel riferimento dell'upstream:

$$u_2^0(t,y_{\rm c}) = \gamma(t,0) + \left.\frac{\partial\gamma(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0}\eta(t,y_{\rm c}) + \delta\gamma(t,0,y_{\rm c}). \tag{2.53}$$

Analogamente, detta $v_{\rm d_0}(t,x) = 1 - \frac{1}{2\gamma^2(t,x)}$ la velocità imperturbata del downstream, per la quadrivelocità spaziale si ha:

$$u_2^x(t,y_{\rm c}) = \gamma(t,0)v_{\rm d_0}(t,0) + \left.\frac{\partial(\gamma(t,x)v_{\rm d_0}(t,x))}{\partial x}\right|_{x=0}\eta(t,y_{\rm c}) + \delta u_x(t,0,y_{\rm c}) \tag{2.54}$$

$$u_2^y(t,y_{\rm c}) = \delta u_y(t,0,y_{\rm c}). \tag{2.55}$$

Passando al riferimento dello shock (come al solito per $y = y_{\rm c}$), la quadrivelocità si trasforma come un quadrivettore:

$$\gamma_2' \equiv u_2'^0 = \Gamma_{\rm up}(u_2^0 - |\boldsymbol{v}|u_2^x) \tag{2.56}$$

$$u_2'^x = \Gamma_{\rm up}(u_2^x - |\boldsymbol{v}|u_2^0) \tag{2.57}$$

$$u_2'^y = u_2^y. \tag{2.58}$$

Proiettando a questo punto su $\hat{\boldsymbol{n}}$ e $\hat{\boldsymbol{t}}$ la $\boldsymbol{u'_2}$, si ottiene

$$u_2'^n = u_2'^x \tag{2.59}$$

$$u_2'^t = u_2'^x \left.\frac{\partial \eta'_{y_{\rm c}}(y,t)}{\partial y}\right|_{y=y_{\rm c}} + u_2'^y. \tag{2.60}$$

Gli stessi due effetti che hanno portato a questa determinazione delle quadrivelocità, danno per la densità di energia

$$e_2 = e_0(t,0) + \left.\frac{\partial e_0(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} \eta(t,y_c) + \delta e(t,0,y_c) \tag{2.61}$$

e per la densità barionica nel riferimento proprio (è, cioè, necessario dividere la densità nel riferimento dell'upstream per il fattore di Lorentz del downstream relativo a questo riferimento $u_2^0(t,y_c)$)

$$\overline{n}_2 = \frac{n_0(t,0) + \left.\frac{\partial n_0(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} \eta(t,y_c) + \delta n(t,0,y_c)}{u_2^0(t,y_c)}. \tag{2.62}$$

Con questo è possibile sostituire nelle (2.43), (2.44), (2.45) e (2.46) la forma autosimile proposta per le variabili da cui queste equazioni – come si è dimostrato – dipendono. Sviluppando le condizioni al primo ordine nelle perturbazioni e trascurando i termini esplicitamente inferiori in Γ, si ottengono

$$4\sqrt{2}\left[p_4 - s + 2(\sqrt{3}-2)\alpha\right]\epsilon - \left(16 g_x(0) - \sqrt{2}N_1(0)\right)\alpha\Gamma^{p_4+3} = 0 \tag{2.63}$$

$$4(2\sqrt{3}-3)\epsilon + 3\left(4\sqrt{2}g_x(0) - R_1(0)\right)\Gamma^{p_4+3} = 0 \tag{2.64}$$

$$ik\epsilon + \sqrt{2}k_0 g_y(0)\Gamma^{p_4+3} = 0 \tag{2.65}$$

$$4\left[2(s-p_4) + (11-6\sqrt{3})\alpha\right]\epsilon + \left(20\sqrt{2}g_x(0) - 3R_1(0)\right)\alpha\Gamma^{p_4+3} = 0. \tag{2.66}$$

La richiesta che le (2.63), (2.64), (2.65) e (2.66) formino (all'ordine più alto in Γ) un sistema risolubile non omogeneo nelle condizioni al contorno per le perturbazioni, impone $p_4 = -3$. Risolvendo, si ottiene:

$$g_x(0) = -\frac{11 + 6\sqrt{3} - (3+2\sqrt{3})s}{2\sqrt{2}(7+4\sqrt{3})}\epsilon \tag{2.67}$$

$$g_y(0) = -\frac{ik\epsilon}{\sqrt{2}k_0} \tag{2.68}$$

$$R_1(0) = \frac{2\left[-27 - 14\sqrt{3} + (9+6\sqrt{3})s\right]}{3(7+4\sqrt{3})}\epsilon \tag{2.69}$$

$$N_1(0) = \frac{2\left[-27 - 16\sqrt{3} + (21+12\sqrt{3})s\right]}{(3+2\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}\epsilon. \tag{2.70}$$

2.3.3 Il parametro s

Se si osservano le condizioni al contorno delle quantità per cui la derivata (cfr. (2.37), (2.39) e (2.40)) ha una struttura di punto sonico (g_x, R_1 ed N_1), si nota come siano indipendenti dal rapporto k/k_0 (l'unica condizione dipendente dalla lunghezza d'onda delle perturbazioni è g_y, il denominatore della cui derivata non si annulla mai). In più, una dipendenza dal numero d'onda non compare neanche nelle equazioni differenziali per queste quantità (nemmeno sotto forma di dipendenza da g_y, sensibile questo ad un cambio di scala nelle perturbazioni). Quello che si deduce è, quindi, che s non dipende da k/k_0 e, in particolare, le quantità del problema manifesteranno lo stesso tipo di reazione alle perturbazioni ad ogni lunghezza d'onda.

A questo punto, sparita la dipendenza della ricerca di s da k/k_0, ci si può restringere al problema di Cauchy 3D per g_x, R_1 ed N_1 e cercare, almeno concettualmente, di trovare un s per cui

$$\lim_{\xi \to \xi_c^+} N_{g_x}(\xi) = \lim_{\xi \to \xi_c^+} N_{R_1}(\xi) = \lim_{\xi \to \xi_c^+} N_{N_1}(\xi) = 0, \tag{2.71}$$

avendo usato N con a pedice le incognite delle equazioni differenziali per indicarne i numeratori delle derivate. La richiesta che il limite destro si annulli implicherà, poi, l'annullamento anche del limite sinistro, ma, in linea di principio, questo in generale non sarà definito per gli s che non annullano il destro. Si ricorda, infatti, che le condizioni al contorno sono date in $\xi = 0$ ed è da lì che parte il processo di integrazione (numerica) verso sinistra, fino al raggiungimento del punto critico $\xi_c < 0$ da destra. Per l'importanza che il punto sonico ξ_c riveste all'interno della presente trattazione (e non solo), sembra opportuno discutere un po' più dettagliatamente la connessione tra la radice dei denominatori e la presenza del punto con $M = 1$.

Due elementi di fluido ai lati del punto sonico sono evidentemente sconnessi sonicamente tra loro, dal momento che quello subsonico non può emettere un segnale che, viaggiando alla velocità del suono, riesca a raggiungere quello supersonico. Questo, da un punto di vista formale, si traduce nel fatto che, almeno in linea di principio, il fluido supersonico potrebbe avere le quantità fluidodinamiche completamente diverse da quelle del fluido subsonico (il che corrisponde ad una divergenza nelle derivate delle grandezze del fluido nel punto sonico). In corrispondenza del punto critico, tuttavia, non vi è *nessun* meccanismo fisico capace di sconvolgere impulsivamente i valori delle grandezze in questione. Da questo nasce l'esigenza fisica di escludere dall'insieme delle soluzioni realisticamente rilevanti quelle in cui è presente questa divergenza. Normalmente si impone questa richiesta tramite condizioni analoghe alle (2.71), inducono i valori delle quantità a sinistra di ξ_c ad essere semplicemente la continuazione dei valori delle quantità a destra.

Un'altra precisazione è poi utile nel contesto delle implicazioni matematiche delle divergenze al punto critico. Il comportamento al punto sonico dei tre denominatori che si annullano in $\xi = \xi_c$, come si può intuire dalle Figg. 2.2 o 2.3, è di tipo lineare: D_{g_x}, D_{g_x} e D_{g_x} sono $O(\xi - \xi_c)$. Da questo segue che un valore diverso da zero in ξ_c di N_{g_x}, N_{g_x} o N_{g_x} produrrebbe una divergenza delle derivate associate del tipo $1/(\xi - \xi_c)$. Un'andamento di questo tipo della derivata produce una singolarità non integrabile (diverso sarebbe stato il caso in cui la divergenza della derivata si fosse manifestata tramite una $\delta(\xi - \xi_c)$ o una f, $O\left((\xi - \xi_c)^\beta\right)$ con $\beta < 1$). Questo fa sì che si debbano accettare anche da un punto di vista matematico solo le soluzioni con α tale da rendere soddisfatta le (2.71).

Chiusa la parentesi relativa al punto sonico, si può ritornare alla ricerca effettiva del parametro s. Utilizzando un sistema di ricerca dicotomica basato sull'applicazione diretta del teorema degli zeri, si è studiato l'andamento dei numeratori in prossimità di ξ_c al variare di s, e si sono avute evidenze circa l'impossibilità di annullarne nel piano complesso, al di fuori della retta reale, contemporaneamente la parte reale e quella immaginaria. Prendendo s reale, invece, è immediato convincersi che le soluzioni del sistema differenziale sono reali ovunque (non vi sono "sorgenti" immaginarie né nelle equazioni né nelle condizioni al contorno). È perciò facile cercare il parametro che soddisfa le (2.71) plottando graficamente i numeratori in prossimità di ξ_c al variare di s. Le indicazioni che se ne ricavano puntano come possibili soluzioni su $s = 1$ ed $s = 3$. Effettivamente, andando ad integrare il sistema anche a sinistra del punto critico, si nota che le divergenze spariscono per questi valori e si verifica (anche graficamente – cfr. Figg. 2.2 e 2.3) l'esatto annullamento dei numeratori per $\xi = \xi_c$.

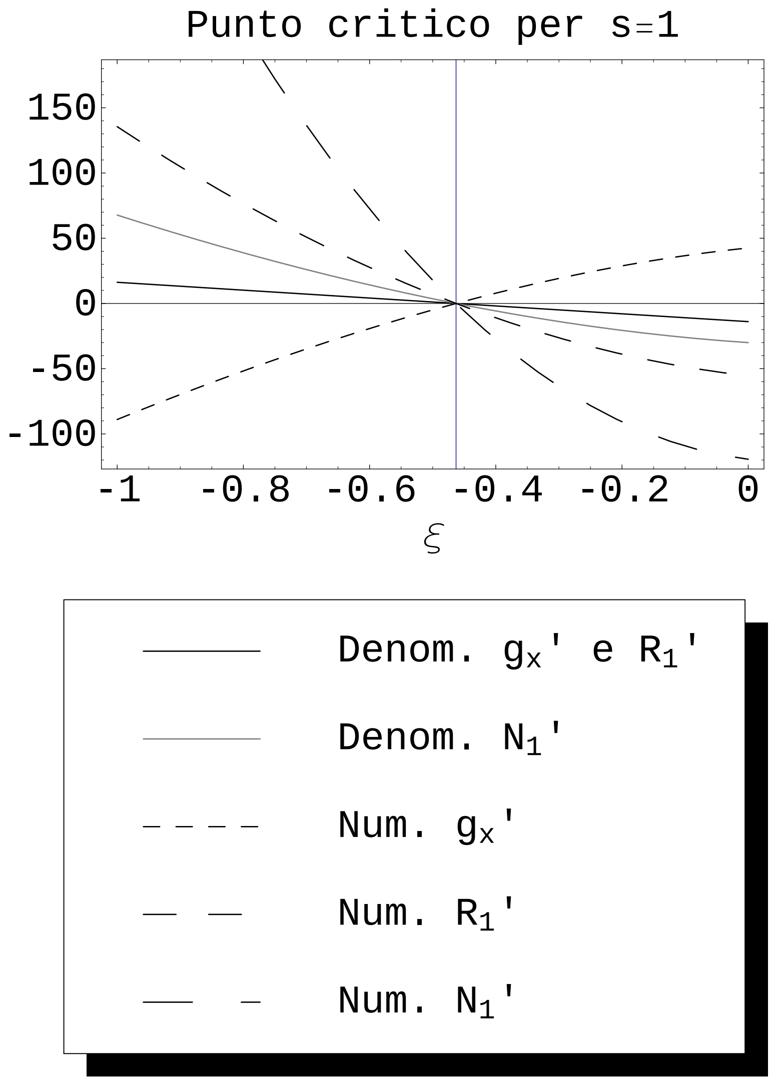


Figura 2.2: Andamento dei numeratori e denominatori che compaiono nelle equazioni di Cauchy per g'_x, R'_1 ed N'_1 a cavallo di ξ_c per $s = 1$.

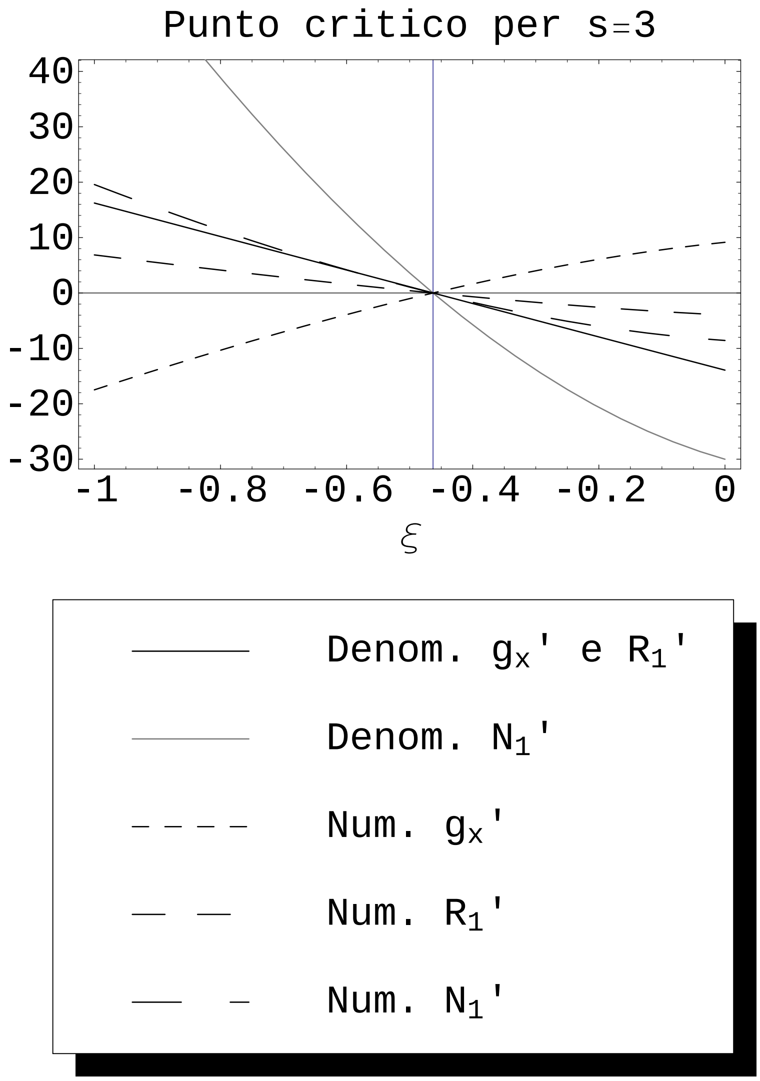


Figura 2.3: Andamento dei numeratori e denominatori che compaiono nelle equazioni di Cauchy per g_x', R_1' ed N_1' a cavallo di ξ_c per $s = 3$..

2.3.4 Considerazioni sulle soluzioni perturbate

Come si è già accennato prima, se s è reale, g_x, R_1 ed N_1 sono reali anch'esse. Per quanto riguarda g_y, l'unica funzione che dipende da k/k_0, quando s è reale essa è immaginaria pura (la condizione al contorno è immaginaria pura e nel membro di destra dell'equazione di Cauchy associata tutti i termini che contengono g_y sono reali mentre l'unico che contiene R_1 al suo posto è moltiplicato per l'unità immaginaria). Inoltre, la dipendenza di g_y dal rapporto k/k_0 si risolve in una banale moltiplicazione della soluzione con $k = k_0$ per il fattore k/k_0. Per rendersene conto è sufficiente notare la proporzionalità tra $g_y(0)$ e k/k_0 combinata con la totale assenza di questo rapporto nell'equazione di Cauchy per g'_y in tutti i termini del secondo membro ($\propto g_y$), tranne quello che contiene R_1 (che, come già detto, è indipendente dalla lunghezza d'onda delle perturbazioni). Un modo più intuitivo per leggere questa peculiarità consiste nel considerare, al variare della lunghezza d'onda, corrugazioni con la stessa ampiezza ϵ/k_0. Chiaramente, la componente tangenziale del flusso entrante – che è poi quella che va a determinare la componente lungo y della velocità del flusso uscente – sarà proporzionale a $\sin \arctan \epsilon k/k_0$; nel limite di piccole perturbazioni, questo fattore si riduce a $\epsilon k/k_0$, giustificando così il risultato delle equazioni descritto sopra.

Detto questo, l'integrazione numerica delle 2.37, 2.38, 2.39 e 2.40 a partire dalle 2.67, 2.68, 2.69 e 2.70 produce le funzioni graficate nelle Figg. 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 (per $s = 1$) e nelle Figg. 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 (per $s = 3$).

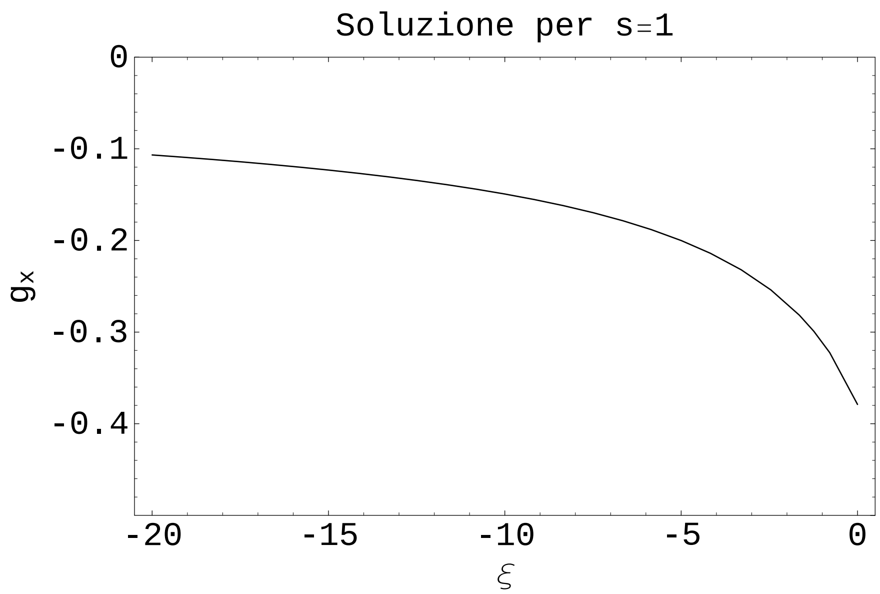


Figura 2.4: g_x integrata per $s = 1$.

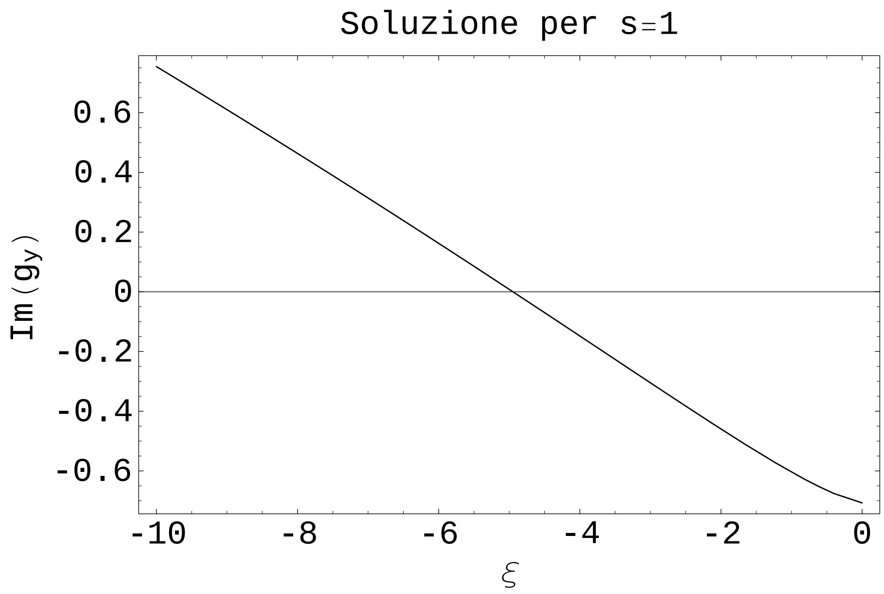


Figura 2.5: g_y integrata per $s = 1$ e $k = k_0$ – intervallo $[-10, 0]$.

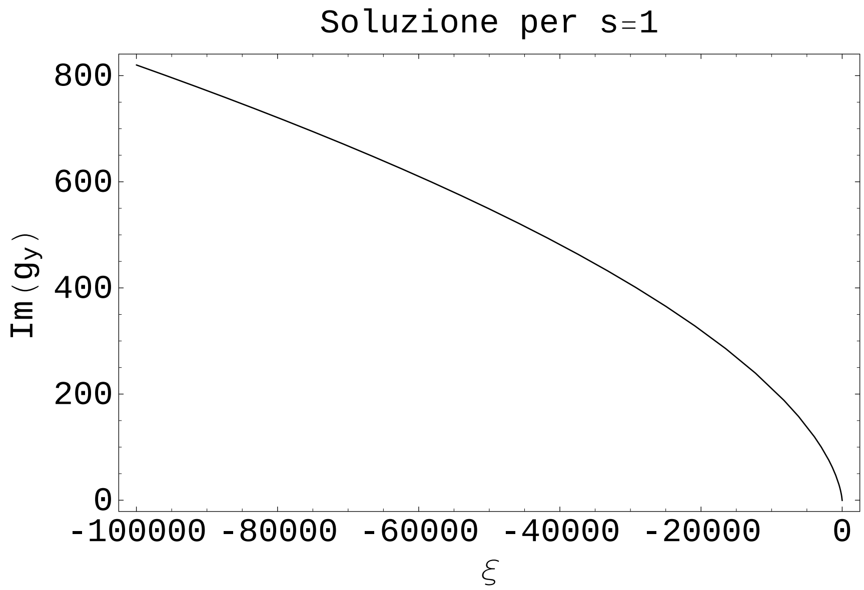


Figura 2.6: g_y integrata per $s = 1$ e $k = k_0$ – intervallo $\left[-10^5, 0\right]$.

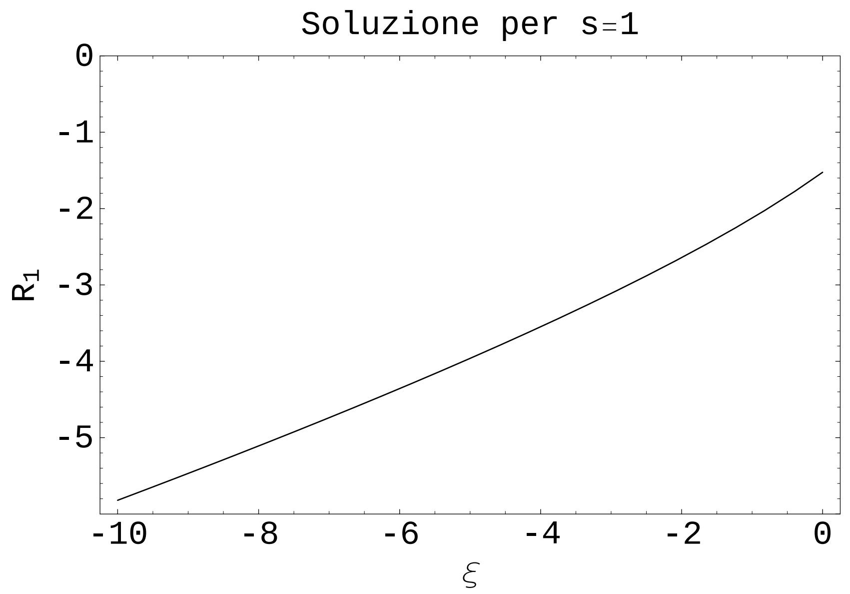


Figura 2.7: R_1 integrata per $s = 1$.

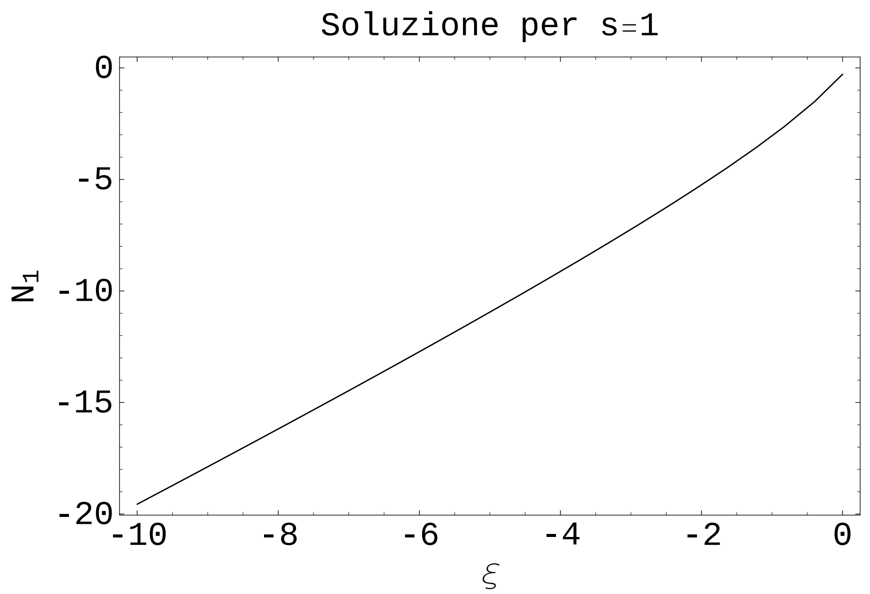


Figura 2.8: N_1 integrata per $s = 1$.

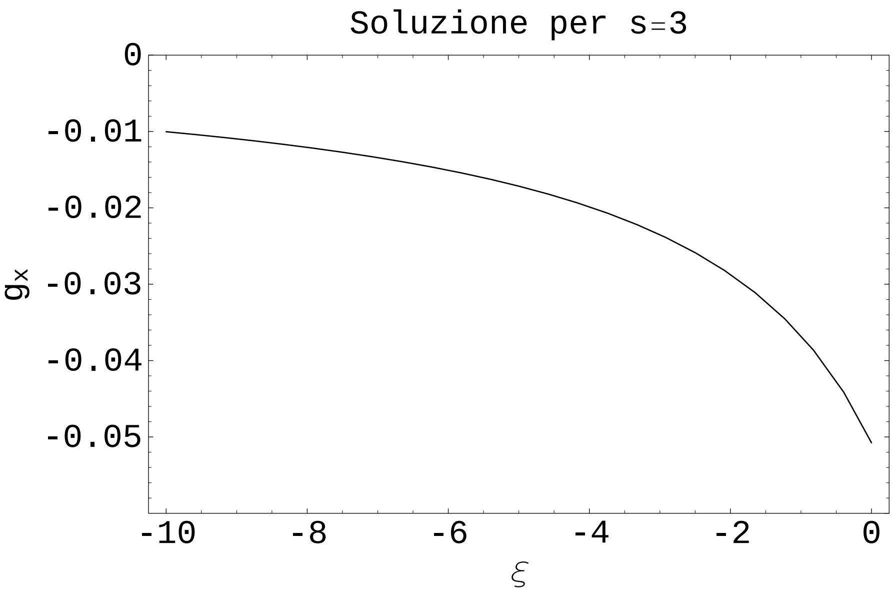


Figura 2.9: g_x integrata per $s = 3$.

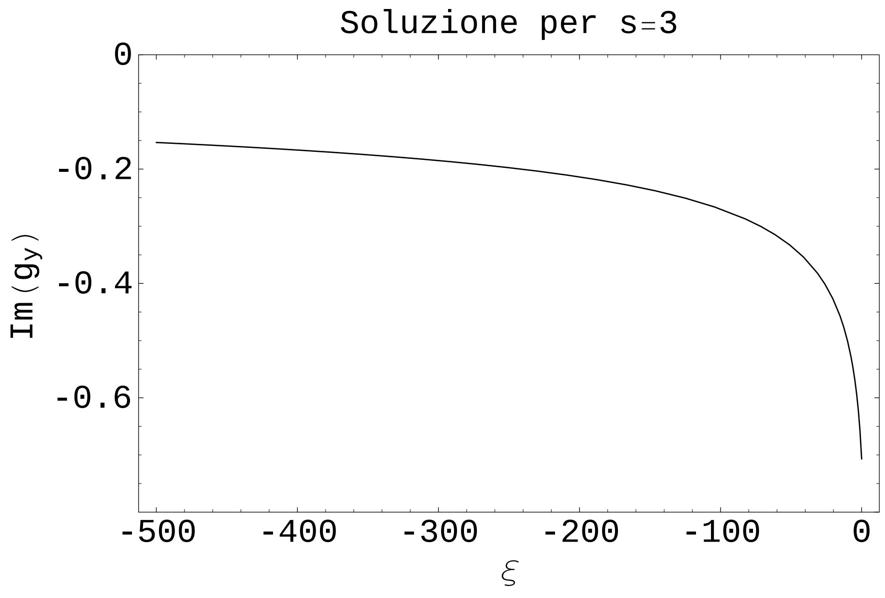


Figura 2.10: g_y integrata per $s = 3$ e $k = k_0$.

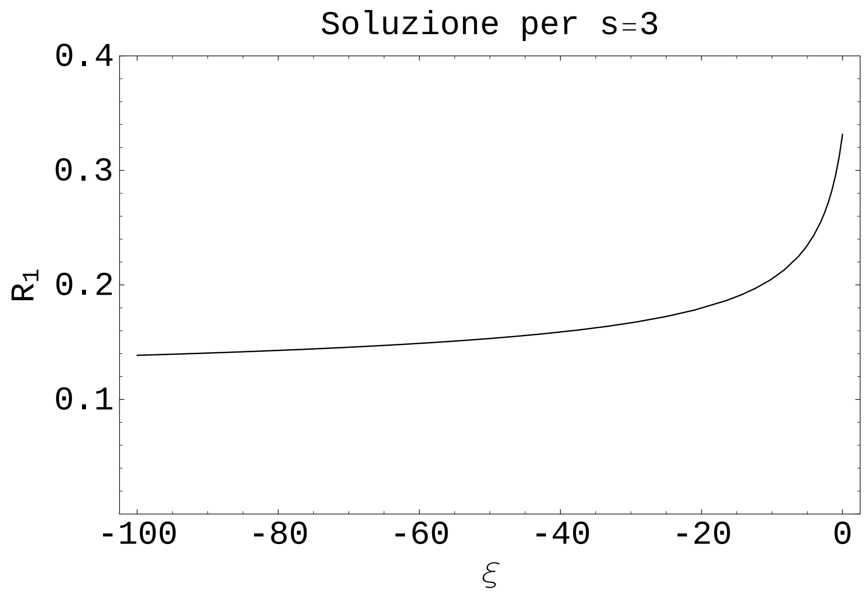


Figura 2.11: R_1 integrata per $s = 3$.

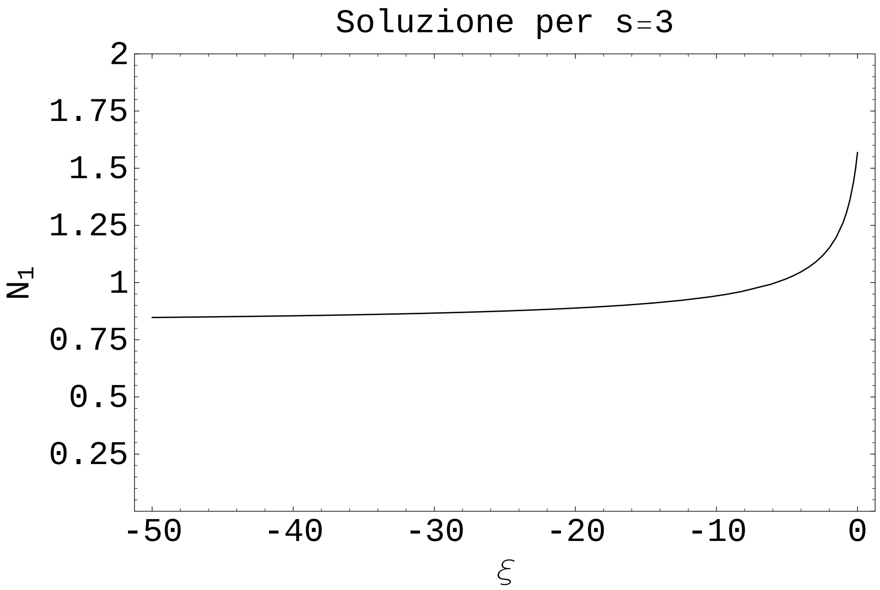


Figura 2.12: N_1 integrata per $s = 3$.

La presenza di due valori matematicamente accettabili per s pone, in linea di principio, una questione non chiarissima da un punto di vista fisico: se il sistema inizialmente imperturbato si ritrova *ex abrupto* la superficie dello shock corrugata, in ragione di quale valore del parametro di instabilità andrà ad evolvere?

La risposta viene dallo studio delle soluzioni numeriche ottenute. Come si nota osservando le Figg. 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8, per $s = 1$ le quantità idrodinamiche del mezzo shockato tendono definitivamente a crescere in valore assoluto al tendere di ξ a $-\infty$ (tranne g_x). Questo significa che, se si scatta un'istantanea del flusso downstream evoluto secondo $s = 1$, quello che si dovrebbe osservare è una crescita indefinita delle perturbazioni prodotte dalla corrugazione dello shock, man mano che ci si allontana da questo. Questo, però, è fisicamente poco ragionevole, in quanto è lecito attendersi che punti estremamente distanti dallo shock non possano aver risentito così enormemente di una piccola perturbazione che, da un punto di vista convettivo, potrebbe addirittura non averli ancora raggiunti al tempo in cui si è fotografato il flusso. Una tale analisi induce a scartare 1 dal computo dei valori del parametro s accettabili.

D'altro canto, le soluzioni autosimili delle perturbazioni calcolate per $s = 3$ e graficate in Figg. 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 hanno il pregio fisico di tendere tutte a 0 per $\xi \to -\infty$. Questo fa sì che l'unica "relazione di dispersione" fisicamente sensata che descrive il sistema sia quella caratterizzata dal $s = 3$.

Detto ciò, in questo contesto è, poi, opportuno fare alcune considerazioni sulle soluzioni ottenute, con particolare riferimento allo scopo che era stato prefissato nel paragrafo riguardante il modello a lupara. In quella sezione era stato evidenziato il fatto che gli ideatori del modello esplicitamente non proponessero un meccanismo in grado di produrre i bullets, la cui esistenza essi postulavano per spiegare la complessa fenomenologia dei GRBs.

Quello che si propone in questa sede concerne la possibilità che tali proiettili siano il frutto dell'instabilità corrugazionale degli shock prodotti dalle espulsioni supersoniche (ad opera del motore interno del burst) di materiale stellare. Più nel dettaglio, il mezzo in cui si propagano questi shock, come giustificato all'inizio di questo capitolo, ha un profilo di densità decrescente esponenzialmente. Eventuali instabilità delle grandezze del downstream (densità, energia, ...) dovute ad una corrugazione accidentale dello shock porterebbero all'accorpamento del fluido in colonne particolarmente dense, separate da regioni tenui del flusso. Questa configurazione sarebbe a tutti gli effetti simile a quella invocata da Heinz e Begelman nel loro modello.

Una parziale conferma che questa possa essere una spiegazione soddisfacente dell'origine dei bullets viene dall'analisi della forma autosimile proposta per le quantità idrodinamiche in gioco nelle 2.18 (grandezze imperturbate) e nelle 2.24, 2.25, 2.26 e 2.27 (perturbazioni). Alla luce del fatto che l'unico valore possibile di s è 3, si deduce che la crescita col tempo delle perturbazioni alla densità (o, che è lo stesso, all'energia), rapportata al suo andamento imperturbato, va come

$$\left(\frac{\delta e}{e},\right)\frac{\delta n}{n} \propto \frac{\Gamma^{s+p_3}}{\Gamma^{2+\alpha}} = \Gamma^{2-\alpha} \sim \Gamma^{6.3}.$$

Questo è un indizio di forte instabilità della densità del materiale shockato, nonostante – si noti – lo shock in sé non amplifichi in nessun caso la sua corrugazione (essendo $s = 3$, η non varia col tempo): incrementi, anche modesti, del fattore di Lorentz dello shock porterebbero ad una crescità enorme di δn in rapporto al valore medio del flusso. Questa crescità, modulata trasversalmente – si ricordi – con la parte reale di $\exp(iky)$, creerebbe contrasti di densità molto vicini all'unità in un flusso iperrelativistico di materia: i bullets!

Tuttavia, come già accennato, questa è una conferma parziale, seppur incoraggiante, della bontà del modello. Infatti, l'analisi condotta fin qui sfrutta una trattazione delle equazioni al primo ordine nelle perturbazioni. Man mano che l'instabilità delle piccole perturbazioni fa aumentare il rapporto $\delta n/n$, il sistema esce dal regime di linearità e cominciano a farsi sentire sempre più effetti agli ordini successivi. In particolare, la trattazione lineare non dà la minima indicazione circa il contrasto massimo a cui saturano effettivamente le instabilità considerate. Una indagine in questo senso, che prevede, ragionevolmente, l'impiego di codici numerici per la simulazione più dettagliata del flusso, va al di là degli scopi di questa tesi e, si spera, costituirà materiale di ricerca per futuri lavori.

Bibliografia

[1] Akerlof, C. et al. 1999, *Nature*, **398**, 400

[2] Band, D. L. et al. 1993, *ApJ*, **413**, 281

[3] Bell, A. R. 1978, *MNRAS*, **182**, 147

[4] Bell, A. R. 1978, *MNRAS*, **182**, 443

[5] Blandford, R. D. & McKee, C. F. 1976, *Phys. Fluids*, **19**, 1130

[6] Blandford, R. D. & Ostriker, J. P. 1978, *ApJ*, **221**, L29

[7] Blandford, R. D. & Znajek, R. L. 1977, *MNRAS*, **179**, 433

[8] Blasi, P. & Vietri, M. 2005, *ApJ*, **626**, 877

[9] Bloom, J. S. et al. 1999, *Nature*, **401**, 453

[10] Chevalier, R. A. 1990, *ApJ*, **359**, 463

[11] Colgate, S. A. 1968, *Canadian J. Phys.*, **46**, S476

[12] Colgate, S. A. 1974, *ApJ*, **187**, 333

[13] Costa, E. et al. 1997, *Nature*, **387**, 783

[14] Covino, S. et al. 1999, *A&A*, **348**, L1

[15] Davies, M. B., Benz, W., Piran, T. & Thielemann, F. K. 1994, *ApJ*, **431**, 742

[16] Eichler, D., Livio, M., Piran, T. & Schramm, D. N. 1989, *Nature*, **340**, 126

[17] Fenimore, E. E., Madras, C. & Nayakshin, S. 1996, *ApJ*, **473**, 998

[18] Fermi, E. 1949, *Phys. Rev. 2nd ser.*, **75**, 1169

[19] Fermi, E. 1954, *ApJ*, **119**, 1

[20] Fishman, G. & Meegan, C. A. 1995, *ARA&A*, **33**, 415

[21] Frail, D. A. et al. 1997, *Nature*, **389**, 261

[22] Galama, T. J. et al. 1998, *Nature*, **395**, 670

[23] Goodman, J. 1997, *New Astron.*, **2**, 449

[24] Graziani, C., Lamb, D. Q. & Marion, G. H. 1998, arXiv:astro-ph/9810374

[25] Grover, R. & Hardy, J. W. 1966, *ApJ*, **143**, 48

[26] Harrison, F. A. et al. 1999, arXiv:astro-ph/9905306

[27] Hayes, W. D. 1968, *J. Fluid Mech.*, **32**, 305

[28] Hayes, W. D. 1968, *J. Fluid Mech.*, **32**, 317

[29] Heinz, S. & Begelman, M. C. 1999, *ApJ*, **527**, L35

[30] Hogg, D. W. & Fruchter, A. 1998, arXiv:astro-ph/9807262

[31] Johnson, M. H. & McKee, C. F. 1971, *Phys. Rev. D*, **3**, 858

[32] Katz, J. I. 1994, *ApJ*, **432**, L107

[33] Katz, J. I. & Piran, T. 1997, *ApJ*, **490**, 772

[34] Kippen, R. M. et al. 1998, *ApJ*, **506**, L27

[35] Klebesadel, R., Strong, I. & Olson, R. 1973, *ApJ*, **182**, L85

[36] Kouveliotou, C. et al. 1993, *ApJ*, **413**, L101

[37] Kulkarni, S. R. et al. 1999 in *Gamma Ray Bursts*, AIP Conf. Proc. 526, Kippen, M. et al., ed. AIP: New York, 277

[38] Kulkarni, S. R. et al. 1999, *Nature*, **393**, 35

[39] Kulkarni, S. R. et al., 2000, *Nature*, **395**, 663

[40] Landau, L. D. & Lifšits, E. M., *Fisica teorica 2 - Teoria dei campi*, Editori Riuniti (2004)

[41] Landau, L. D. & Lifšits, E. M., *Fisica teorica 5 - Fisica statistica*, Editori Riuniti (1999)

[42] Landau, L. D. & Lifšits, E. M., *Physique théorique 6 - Mécanique des fluides*, Éditions MIR Moscou (1989)

[43] Mazets, E. P., Golenetskii, S. V. & Ilinskii, V. N. 1974, *JETP Lett.*, **19**, 77

[44] Meegan, C. A. et al. 1992, *Nature*, **355**, 143

[45] Mészáros, P. 2002, *ARA&A*, **40**, 137

[46] Mészáros, P., Laguna, P. & Rees, M. J. 1993, *ApJ*, **415**, 181

[47] Mészáros, P. & Rees, M. J. 1993, *ApJ*, **405**, 278

[48] Mészáros, P., Rees, M. J. & Papathanassiou, H. 1994, *ApJ*, **432**, 181

[49] Metzger, M et al. 1997, *Nature*, **387**, 878

[50] Narayan, R., Paczyński, B. & Piran, T. 1992, *ApJ*, **395**, L83

[51] Paczyński, B. 1998, *ApJ*, **494**, 45

[52] Panaitescu, A. & Mészáros, P. 1998, *ApJ*, **501**, 772

[53] Perna, R. & Vietri, M. 2002, *ApJ*, **569**, L47

[54] Pian, E. 2001, arXiv:astro-ph/0110051

[55] Piran, T. 2000, *Phys. Rep.*, **333**, 529

[56] Raizer, Y. P. 1964, *Zh. Prikl. Mat. Fiz.*, **4**, 49

[57] Rees, M. J. & Mészáros, P. 1994, *ApJ*, **430**, L93

[58] Rhoads, J. E. 1999, *ApJ*, **525**, 737

[59] Rosswog, S. et al. 1999, *A&A*, **341**, 499

[60] Ruffet, M. & Janka, H.-Th. 1999, *A&A*, **344**, 573

[61] Ryde, F. & Svensson R. 2001 in *Gamma-Ray Bursts in the Afterglow Era*, Proceedings of the International workshop held in Rome, CNR headquarters, 17-20 October, 2000, Springer, 81

[62] Ryu, D. & Vishniac, E. T. 1987, *ApJ*, **313**, 820

[63] Sari, R., Narayan, R. & Piran, T. 1996, *ApJ*, **473**, 204

[64] Sari, R. & Piran, T. 1995, *ApJ*, **455**, L143

[65] Sari, R. & Piran, T. 1997, *ApJ*, **485**, 270

[66] Sari, P., Piran, T. & Halpern, J. 1999, *ApJ*, **519**, L17

[67] Taub, H. 1948, *Phys. Rev.*, **74**, 328

[68] Thompson, C. 1994, *MNRAS*, **270**, 480

[69] Tutukov, A. V. & Yungelson, L. R. 1994, *MNRAS*, **268**, 871

[70] Usov, V. V. 1994, *MNRAS*, **267**, 1035

[71] van Paradijs, J. et al. 1997, *Nature*, **386**, 686

[72] van Paradijs, J., Kouveliotou, C. & Wijers, R. 2000, *ARA&A*, **38**, 379

[73] Vietri, M. 1999, arXiv:astro-ph/9911523

[74] Vietri, M. 2003, *ApJ*, **591**, 954

[75] Wang, L. & Wheeler, J. C. 1998, *ApJ*, **504**, L87

[76] Wang, X., Loeb, A. & Waxman, E. 2003, *ApJ*, **594**, 924

[77] Woosley, S. E. 1993, *ApJ*, **405**, 273

[78] Zhang, W., Woosley, S. E. & MacFadyen, A. I. 2003, *ApJ*, **586**, 356