

TESI DI LAUREA  
IN  
INGEGNERIA AEROSPAZIALE  
INDIRIZZO SPAZIALE

**SVILUPPO DI UN MODELLO IBRIDO-PARTICELLARE PER LO STUDIO  
DI UN MOTORE MPD CON CAMPO MAGNETICO APPLICATO**

Giacomo Dimarco

Anno Accademico 2003-2004

T150







**Università degli Studi di Pisa  
Facoltà di Ingegneria**

**Tesi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale**

**SVILUPPO DI UN MODELLO IBRIDO-PARTICELLARE PER LO STUDIO  
DI UN MOTORE MPD CON CAMPO MAGNETICO APPLICATO**

**Candidato**

Giacomo Dimarco

**Relatori**

Prof. F. Paganucci

Prof. M. Andrenucci

Prof. S. Marcuccio

Anno Accademico 2003-2004



# Sommario

Nel presente lavoro sono stati sviluppati due codici bidimensionali assialsimmetrici per la valutazione del comportamento del plasma dentro e fuori della camera accelerativa di un propulsore MPD con campo magnetico applicato. Entrambi i codici utilizzano uno schema ibrido per lo studio delle caratteristiche del plasma. Le particelle pesanti sono trattate attraverso un algoritmo PIC, mentre i campi elettromagnetici dovuti, sia alla differenza di potenziale che al moto delle particelle, sono determinati attraverso uno schema fluidodinamico per gli elettroni. Si sono inoltre simulati i fenomeni collisionali fra elettroni e ioni nonché il fenomeno della ricombinazione all'esterno della camera accelerativa. Si è voluta porre l'attenzione, durante la realizzazione del modello, principalmente sulla soluzione delle equazioni di Maxwell, ritenendo che i campi magnetici indotti dalle correnti fossero fondamentali per un adeguato approccio al problema dell'accelerazione. Una appropriata trattazione ha richiesto la soluzione delle equazioni complete dell'elettromagnetismo, salvo che per il termine della corrente di spostamento che si è ritenuto di poter trascurare. Si sono riportati i risultati ottenuti durante le simulazioni; essi risultano in linea con i dati sperimentali disponibili e con i risultati che si ottengono attraverso trattazioni analitiche semplificate.



# Abstract

In the present work two bidimensional axisymmetric codes have been developed to evaluate the behaviour of a plasma within and outside of the acceleration channel of a MPD thruster with applied magnetic field. Both codes use a hybrid scheme to study the plasma characteristics. The heavy particles are treated through a PIC algorithm, while the electromagnetic fields due, both to the potential drop and to the motion of particles, are determined through a fluid-dynamic scheme for electrons. Moreover the collision process between ions and electrons are simulated as well as the recombination process out of the acceleration channel. It's been intentional to mainly look out, during the realization of the model, the solution of Maxwell equations, thinking that the induced magnetic fields was fundamental for a good approach to the electromagnetic acceleration problem. A appropriated analysis has demanded the solution of the complete electromagnetism equations, except for the displacement current term that has been thought of being able to neglect. Results obtained during the simulations are reported; they seemed to reflect the thruster laboratory experience behaviour and the results obtained through simplified analytical model.





# Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Mariano Andrenucci, il Prof. Fabrizio Paganucci e il Prof. Salvo Marcuccio per i loro insegnamenti, per la loro disponibilità e per avermi dato l'opportunità di svolgere questo lavoro.

Desidero inoltre ringraziare i ragazzi che ho conosciuto al Centrosazio Matteo, Stefano, Lorenzo, Marco, Massimiliano, Giorgio, Devis che mi hanno aiutato durante questo periodo.

Infine desidero ringraziare la mia famiglia per il sostegno che mi ha dato in questi anni e per la grande pazienza che ha avuto. Un ringraziamento anche a Fede che mi ha aiutato a superare tanti problemi e a tutti i miei amici.



## Indice

<b>INTRODUZIONE .....</b>	<b>1</b>
1.1 <i>Introduzione.....</i>	1
1.2 <i>I propulsori elettrici.....</i>	2
<b>ORGANIZZAZIONE DELLA TESI .....</b>	<b>7</b>
2.1 <i>Introduzione.....</i>	7
2.2 <i>Motivazioni.....</i>	8
2.3 <i>Obbiettivi.....</i>	9
<b>IL PROPULSORE MPD.....</b>	<b>13</b>
3.1 <i>Introduzione.....</i>	13
3.2 <i>Scarica nei gas.....</i>	15
3.3 <i>Effetto Hall.....</i>	17
3.4 <i>Descrizione magnetogasdinamica.....</i>	21
3.5 <i>Descrizione particellare.....</i>	26
3.6 <i>Descrizione collisionale euristica.....</i>	28
3.7 <i>Il propulsore a campo magnetico applicato.....</i>	30
3.8 <i>Fenomeni di onset.....</i>	33
<b>METODI NUMERICI PER LA SIMULAZIONE DI PLASMI.....</b>	<b>35</b>
4.1 <i>Introduzione.....</i>	35
4.2 <i>I codici particellari.....</i>	36
4.3 <i>I codici magnetoidrodinamici.....</i>	37
4.4 <i>Metodo del centro di guida.....</i>	43
4.5 <i>Metodi ibridi.....</i>	44
4.6 <i>Sommario.....</i>	53
<b>IL CODICE IBRIDO .....</b>	<b>55</b>
5.1 <i>Introduzione.....</i>	55
5.2 <i>Il codice ibrido.....</i>	56
5.2.1 <i>Struttura del codice magnetoinduttivo.....</i>	57
5.3 <i>Geometria.....</i>	60
5.4 <i>Generazione della griglia.....</i>	61
5.5 <i>Passo temporale.....</i>	66
5.6 <i>Campo magnetostatico.....</i>	67
5.7 <i>Condizioni al contorno.....</i>	75
5.8 <i>Sommario.....</i>	79
<b>MODELLO FLUIDODINAMICO DEGLI ELETTRONI.....</b>	<b>81</b>
6.1 <i>Introduzione.....</i>	81
6.2 <i>Equazione generale del trasporto.....</i>	82
6.3 <i>Conservazione della massa.....</i>	83
6.3.1 <i>Il termine collisionale.....</i>	84
6.4 <i>Conservazione della quantità di moto.....</i>	86
6.4.1 <i>Il termine collisionale.....</i>	88
6.5 <i>Conservazione dell'energia.....</i>	89
6.5.1 <i>Interpretazione fisica e approssimazioni.....</i>	91
6.6 <i>Il modello plasma freddo.....</i>	92

6.7	<i>Il modello plasma caldo o approssimazione adiabatica</i> .....	93
6.8	<i>Diffusione di Bohm</i> .....	94
6.9	<i>Ionizzazione e ricombinazione</i> .....	95
6.10	<i>Sommario</i> .....	98
<b>MODELLO PARTICELLARE</b> .....		<b>101</b>
7.1	<i>introduzione</i> .....	101
7.2	<i>Il metodo PIC</i> .....	101
7.2.1	<i>Interpolazione particelle ai nodi della griglia: Scatter step</i> .....	102
7.2.2	<i>Interpolazione dei campi sulle particelle: Gather step</i> .....	103
7.2.3	<i>Inizializzazione e iniezione degli ioni</i> .....	104
7.2.4	<i>Il metodo di avanzamento della corrente: CAM-CI</i> .....	106
7.2.5	<i>Ottimizzazione dello schema leapfrog</i> .....	107
7.2.6	<i>Correnti ioniche</i> .....	110
7.2.7	<i>Avanzamento della densità di corrente ionica</i> .....	111
7.2.8	<i>Leapfrog ciclico per la determinazione del campo magnetico</i> .....	112
7.2.9	<i>Implementazione numerica</i> .....	113
7.2.10	<i>Calcolo del campo elettrico</i> .....	115
7.2.11	<i>Algoritmo di avanzamento nel tempo</i> .....	116
7.3	<i>Collisioni</i> .....	119
7.3.1	<i>Ricombinazione</i> .....	119
7.3.2	<i>Il metodo Monte Carlo</i> .....	120
7.4	<i>Avanzamento dei neutri</i> .....	122
7.5	<i>Collisione particelle-pareti</i> .....	122
7.6	<i>Il codice ibrido all'interno del propulsore</i> .....	123
7.6.1	<i>Approssimazione elettrostatica</i> .....	124
7.6.2	<i>Modello di Darwin</i> .....	126
7.6.3	<i>Trasformazione di gauge</i> .....	128
7.6.4	<i>Soluzione numerica del modello di Darwin</i> .....	129
7.7	<i>Sommario</i> .....	131
<b>RISULTATI</b> .....		<b>133</b>
8.1	<i>Introduzione</i> .....	133
8.2	<i>Parametri della simulazione</i> .....	134
8.3	<i>Validazione dei codici</i> .....	135
8.4	<i>Risultati</i> .....	136
8.4.1	<i>Risultati della simulazione all'esterno del motore</i> .....	136
8.4.2	<i>Risultati della simulazione all'interno del motore</i> .....	150
<b>CONCLUSIONI</b> .....		<b>157</b>
9.1	<i>Conclusioni</i> .....	157
9.2	<i>Sviluppi futuri</i> .....	159
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....		<b>163</b>
<b>APPENDICE A</b> .....		<b>167</b>
<b>APPENDICE B</b> .....		<b>169</b>
<b>APPENDICE C</b> .....		<b>171</b>
<b>APPENDICE D</b> .....		<b>173</b>

# Introduzione

## 1.1 Introduzione

La grande importanza che il sistema propulsivo ha all'interno di un veicolo spaziale ha consentito uno sviluppo considerevole della tecnologia in questi decenni. I sistemi con cui si imprime una spinta a un razzo allo stato attuale si distinguono in due grandi famiglie: la propulsione chimica e la propulsione elettrica. La propulsione chimica ha beneficiato di un più precoce sviluppo agli albori della ricerca spaziale per due grandi motivi: il primo è la necessità di una spinta molto elevata per sfuggire all'attrazione terrestre che solo questi motori sono in grado di sviluppare, la seconda è la più elevata conoscenza dei fenomeni fisici che avvengono in un tale razzo. La propulsione elettrica trova invece la sua naturale collocazione nei sistemi di spinta presenti sui satelliti per il controllo di assetto, il cambio di orbita o anche per viaggi spaziali di lunga durata; questo grazie alle sue caratteristiche di bassa spinta e di basso consumo di propellente; quest'ultimo dovuto alle elevate velocità di uscita delle particelle dal motore. Verranno illustrati nel prossimo paragrafo le caratteristiche dei motori elettrici e successivamente si porrà l'attenzione sul motore oggetto della tesi.

## **1.2 I propulsori elettrici**

La tecnologia dei propulsori elettrici utilizza una svariata quantità di strategie per ottenere velocità di uscita molto grandi per ridurre la quantità di propellente totale trasportato e corrispondentemente il carico totale di un sistema di trasporto spaziale. Queste strategie si possono raggruppare in tre categorie: propulsione elettrotermica, dove il propellente è riscaldato elettricamente e successivamente fatto espandere gasdinamicamente attraverso un ugello; propulsione elettrostatica dove le particelle di propellente ionizzato sono accelerate attraverso un campo elettrico; propulsione elettromagnetica dove la corrente che scorre attraverso un plasma utilizzato come propellente interagisce con un campo magnetico indotto od esterno per fornire una forza di massa che accelera le particelle. Questi sistemi possono produrre una gamma di velocità di uscita e frazioni di carichi paganti di un ordine di grandezza più grande del miglior razzo chimico a propellente liquido; per questo motivo possono essere attraenti per molti tipi di missione. D'altra parte la densità di spinta che si può ottenere con questi sistemi è molto minore; questo ci obbliga a tempi più lunghi necessari per compiere la missione, e a traiettorie più complicate. Inoltre questi sistemi richiedono che l'energia venga fornita dal veicolo spaziale attraverso celle a combustibile o pannelli solari aumentando così la massa che deve essere trasportata dal veicolo. L'ottimizzazione di un propulsore elettrico così coinvolge vari aspetti fra cui l'oggetto della missione, propellente, sistema di generazione di potenza, durata della missione, fattori ambientali esterni ed interni e una notevole affidabilità.

La legge fondamentale che governa gli endoreattori è il terzo principio della dinamica di Newton: la legge di azione e reazione. Un razzo in volo libero deve la sua accelerazione solamente alla massa di propellente che ne fuoriesce. La sua

## Introduzione

equazione del moto deriva direttamente dalla conservazione della quantità di moto per l'intero veicolo spaziale:

$$m\dot{\mathbf{v}} = \dot{m}\mathbf{v}_e \quad (1.1)$$

Dove  $m$  è la massa del veicolo ad un istante temporale  $\dot{\mathbf{v}}$  è il vettore accelerazione,  $\mathbf{v}_e$  il vettore velocità equivalente, la cui definizione è: velocità che se attribuita a ciascuna particella costituente il getto fornirebbe la spinta voluta con la portata di massa  $\dot{m}$  fissata, in formule:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{T} / \dot{m} \quad (1.2)$$

Dove con  $\mathbf{T}$  si è indicata la spinta. Solitamente, piuttosto che la velocità equivalente si fa uso di un'altra grandezza per caratterizzare il motore, chiamata impulso specifico e legato alla velocità dalla seguente relazione:

$$I_{sp} = v_e / g_0 \quad (1.3)$$

Ricaviamo ora l'equazione di Tsiolkovsky o equazione del razzo libero, valida nel caso di corpo che accelera con moto rettilineo senza la presenza di altre forze, dall'equazione (1.1):

$$\Delta v = v_e \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) \quad (1.4)$$

Dove una definizione per  $\Delta v$  può essere la seguente: incremento di velocità che ogni veicolo capace di svolgere la missione otterrebbe se posto in condizione di muoversi in moto rettilineo in assenza di gravità e atmosfera con lo stesso rapporto di massa e motore. Si può vedere quindi che, ai fini dell'incremento di velocità equivalente all'espletamento della missione, due cose contano: velocità equivalente o di scarico e il rapporto di massa. Dalla analisi di questa equazione possiamo vedere come il campo di interesse dei motori elettrici sia quello degli

alti  $\Delta v$ ; infatti solo questi motori hanno la possibilità di fornire velocità di scarico sufficientemente alte, i motori chimici sono invece limitati dalla massima energia che la reazione può fornire all'interno della camera di combustione e hanno un limite teorico massimo intorno ai 500 [s] di impulso specifico. I propulsori elettrici hanno invece potenzialità da questo punto di vista molto maggiori potendo fornire impulsi specifici fino anche a 10000 [s], anche se le densità di spinta risultano in questo caso molto ridotte. Non bisogna dimenticare infine che per far funzionare questi motori è necessario fornire loro energia dall'esterno, questa energia corrisponde a massa che deve essere introdotta nel veicolo a scapito del carico pagante. Si può stimare la massa nel seguente modo:

$$m_p = \alpha \cdot P = \frac{\alpha \cdot T \cdot v_e}{2\eta} = \frac{\alpha \cdot \dot{m} \cdot v_e^2}{2\eta} \quad (1.5)$$

Dove con  $P$  si è indicata la potenza necessaria e con  $\eta$  l'efficienza con la quale il propulsore converte la potenza in ingresso in potenza di spinta. Ora la massa del propellente diminuisce all'aumentare dell'impulso specifico mentre la massa del sistema di generazione di potenza aumenta con il quadrato di questo, ne segue che per ogni missione identificata da un certo  $\Delta v$  esiste un ottimo  $I_{sp}$  o  $v_e$  che minimizza la massa totale necessaria per generare la spinta, possiamo vedere meglio questo concetto con un esempio. Fissiamo la massa del satellite a 6000 [kg] e consideriamo un  $\Delta v$  tipico per la missione di mantenimento orbitale intorno a 50 [m/s] annui, variando gli impulsi specifici da valori intorno ai 1000 [s] fino a valori intorno ai 10000 [s] e stimando un valore per  $\alpha$ , considerando dati storici della massa del sistema di generazione di potenza in funzione della potenza richiesta, possiamo avere un'idea dell'andamento delle due curve e della massa totale del sistema propulsivo.



## Introduzione

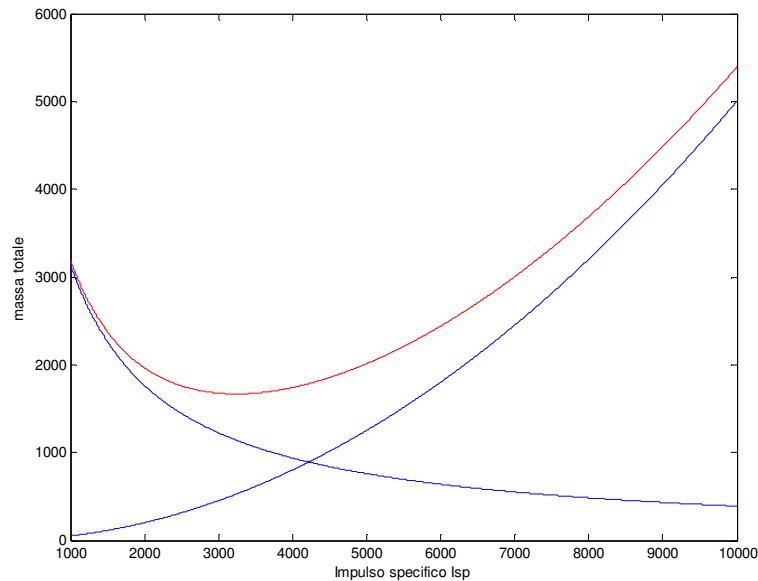


Figura 1.1 Andamento della massa di propellente, della massa del sistema di generazione di potenza e della massa totale del sistema propulsivo al variare dell'impulso specifico. Per ogni missione è possibile determinare il minimo dalla somma delle due curve.

Per caratterizzare completamente un motore elettrico è sufficiente determinare il suo impulso specifico e la potenza specifica rispetto alla spinta, quest'ultima è facilmente quantificabile come rapporto della potenza in ingresso e la potenza di spinta:

$$\frac{P}{F} = \frac{v_e}{2\eta} \quad (1.6)$$

Da questa relazione si capisce facilmente come non sia possibile ottenere delle spinte troppo grandi con dei motori elettrici almeno allo stato attuale dell'arte; infatti con un motore che fornisce ad esempio un impulso specifico di 3000 [s] per avere 1 [N] di spinta sarebbero necessari circa 30 [kW], mentre la potenza disponibile oggi su un satellite si aggira mediamente attorno al kilowatt. Si

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

riportano infine alcuni valori tipici che caratterizzano i motori spaziali, il tipo di processo che interessa l'accelerazione delle particelle e il rendimento di spinta proprio di ogni propulsore .

tipo	Impulso specifico $I_{sp}$ (s)	Spinta (N)	Processo accelerativo	rendimento
Resistogetto	300	0.5	Gasdinamico $v_e \propto \sqrt{T/m}$	0.3
Arcogetto	500	0.2	Gasdinamico $v_e \propto \sqrt{T/m}$	0.3
MPD con campo autoindotto (MW)	5000	10-100	Elettromagnetico $v_e \propto I^2/m$	0.5
MPD con campo applicato (kW)	1300	4	Elettromagnetico $v_e \propto I^2/m$	0.2
SPT Effetto Hall	2000	0.1-1	Elettromagnetico $v_e \propto \sqrt{2qV/m}$	0.6
Motore a ioni	2000-10000	0.1-1	Elettrostatico $v_e \propto \sqrt{2qV/m}$	0.9
FEED	10000	$10^{-6}$	Elettrostatico $v_e \propto \sqrt{2qV/m}$	0.9

Tabella 1.1 Principali caratteristiche dei propulsori elettrici più diffusi

# Organizzazione della tesi

## 2.1 Introduzione

Il lavoro è così strutturato: nel capitolo 3 si parla in modo dettagliato del propulsore MPD, con riferimento in particolare alla versione a campo magnetico applicato, della quale esiste un prototipo utilizzato per le prove, realizzato al Centrosazio, oggetto particolare dello studio. Nel capitolo 4 viene fatta una panoramica sui metodi utilizzati per la simulazione; in questo lavoro si è voluto porre l'attenzione sui metodi generali che vengono utilizzati per le simulazioni dei plasmi, siano essi da laboratorio o spaziali. La ricerca che ha preceduto la scrittura del codice non è avvenuta solamente nel campo della propulsione ma più in generale nel campo della fisica dei plasmi, ritenendo che fosse utile avere una solida base sui fenomeni fisici e i metodi di indagine numerica, utilizzati in letteratura per modellarli, così da avere in futuro un riferimento generale utile prima di intraprendere un lavoro di simulazione numerica sui plasmi. Nel capitolo 5 si introducono i metodi scelti, perché ritenuti più adatti, per la simulazione del motore MPD; si evidenziano le strutture generali dei due codici scritti, e si dà spiegazione sulla divisione del campo di simulazione in due zone distinte e della scrittura di due codici distinti utilizzati per modellarli. Nel capitolo 6 si introducono i modelli fluidodinamici che vengono adoperati per la descrizione del moto degli elettroni, mentre nel capitolo 7 si parla in dettaglio del metodo PIC

(particle-in-cell) di cui ci si avvale per simulare il moto delle particelle pesanti, e del metodo Monte Carlo per l'indagine stocastica del fenomeno della ricombinazione; infine vengono trattati in dettaglio i passaggi dei due algoritmi di calcolo. Nel capitolo 8 vengono mostrati e discussi i risultati ottenuti con i due modelli utilizzati e nel capitolo 9 si valutano i risultati e si evidenziano quali sviluppi ulteriori possono essere fatti per migliorare gli algoritmi di calcolo e rendere più dettagliata la descrizione del fenomeno accelerativo del motore MPD.

## **2.2 Motivazioni**

Lo sviluppo della tecnologia propulsiva ad uso spaziale ha visto nascere in questi ultimi anni nuove tipologie di motori. L'introduzione della propulsione elettrica nel campo della navigazione spaziale è già stata giustificata; si può qui ribadire il concetto secondo il quale, per realizzare missioni ad alti  $\Delta v$ , sono necessari alti impulsi specifici che solo questi propulsori sono in grado di dare. Sfortunatamente la volontà di utilizzare questa tecnologia non ha coinciso con un più alto grado di conoscenza del fenomeno e tuttora non esistono esemplari di alcuni di questi motori operativi per missioni spaziali. In particolare il propulsore magnetoplasmadinamico o brevemente MPD, ha incontrato notevoli difficoltà che non lo hanno reso ancora operativo e lo hanno fatto rimanere in fase di sviluppo durante tutti questi anni cioè da quando fu concepito intorno agli anni '60 ad oggi. Il motivo essenziale risulta essere la forte erosione del catodo nonché il surriscaldamento dell'anodo dovuta alla grande caduta di potenziale che si sperimenta in quella zona. Dopo lungo tempo in cui numerose sperimentazioni sono state compiute utilizzando varie geometrie e varie tecniche per tentare di aumentare l'efficienza ed evitare il sorgere dei fenomeni di onset tipici di questi motori, oggi si apre un'altra finestra che permette un nuovo approccio al problema in questione; infatti lo sviluppo della tecnologia informatica apre le porte a metodi di indagine numerica che prima non erano utilizzabili, o lo erano solamente

facendo forti restrizioni sui metodi applicabili. Un approccio analitico non si è mostrato sufficiente per la comprensione di tutti i fenomeni che coinvolgono i motori MPD; infatti le forti semplificazioni che è necessario fare portano a risultati che sono comparabili con quelli sperimentali solo attraverso gli ordini di grandezza; oggi è però possibile utilizzare algoritmi di calcolo notevolmente più complessi poiché le soluzioni numeriche di sistemi di equazioni più complete non richiedono più tempi estremamente lunghi per essere risolte.

### **2.3 Obiettivi**

L'obiettivo di questo lavoro è principalmente quello di utilizzare le metodologie di analisi numerica per risolvere il problema della accelerazione elettromagnetica che lega aspetti di gasdinamica compressibile, fisica dei gas ionizzati, teoria dei campi elettromagnetici ed elettrodinamica delle particelle. La complessità analitica di ognuna di queste discipline contribuisce a creare difficoltà enormi per una descrizione teorica del problema. Progressi dal punto di vista analitico si vedono solamente dopo aver fatto scelte incisive sui modelli semplificati, tenendo in considerazione solamente l'aspetto fisico essenziale nella situazione in esame; ad esempio nell'analisi di un motore MPD solitamente non si tiene conto dell'effetto Hall. Ci sono vari approcci che si possono utilizzare per la descrizione del processo di accelerazione; solitamente quello più utilizzato è quello della magnetogasdinamica dove il gas ionizzato è visto come un continuo le cui proprietà fisiche possono essere adeguatamente descritte da un insieme di variabili macroscopiche e il cui comportamento dinamico può essere descritto da un set di equazioni del trasporto. Il sistema è poi chiuso dalle equazioni di Maxwell e da equazioni costitutive opportune; con questo approccio rimane comunque impossibile descrivere il problema prima di aver fatto numerose semplificazioni. Un altro sistema potrebbe essere quello di utilizzare la teoria delle orbite per le particelle cariche, ma anche in questo modo risulta impossibile integrare le

equazioni del moto se non per una particella che si muove all'interno di un campo magnetico ed elettrico, il moto di ciascuna particella può essere determinato solo se si trascurano le interazioni fra le vari particelle considerando predominante l'interazione della singola con i campi esterni, questo approccio di solito si usa con plasmi altamente rarefatti. Un metodo intermedio fra i due citati è quello di descrivere il plasma come un miscuglio di diversi fluidi; questo approccio viene utilizzato quando le collisioni, come nel metodo a un fluido, fra le particelle del plasma sono molto frequenti così che ogni specie è in grado di mantenere una funzione di distribuzione in equilibrio locale.

L'obiettivo di questa tesi è stato lo sviluppo di un codice di simulazione di un plasma che presentasse dei caratteri ibridi, ovvero simulasse gli ioni e i neutri come particelle e gli elettroni come un fluido; le motivazioni di questa scelta sono evidenziate a partire dal capitolo 5. Si vuole infine sottolineare l'importanza che può avere un'analisi numerica nel prevedere fenomeni particolari come ad esempio la rarefazione del plasma all'anodo al variare della geometria e delle condizioni operative oppure nel determinare qual è il contributo dell'effetto Hall nel processo di accelerazione di un MPD. Un ulteriore obiettivo è stato quello di tentare di realizzare un primo approccio al problema della scalatura per via numerica di un propulsore MPD. Infine si è voluta porre l'attenzione, oltre che sul problema dell'accelerazione elettromagnetica, anche più in generale sullo studio della dinamica dei plasmi attraverso un'analisi computazionale ritenendo che gli algoritmi sviluppati insieme a quelli di cui si farà menzione nel capitolo 4 possano essere utili in futuro per lo studio anche di altri fenomeni nei quali si volesse valutare il comportamento di un gas ionizzato.

Concludendo un'analisi di tipo numerico consente di non effettuare una eliminazione così netta dei termini che costituiscono le equazioni che descrivono il fenomeno e permette di ottenere un'analisi più approfondita dello stesso. Inoltre può essere affiancata all'analisi sperimentale permettendo di confrontare i

### *Organizzazione della tesi*

risultati, di ottenere validi indizi nella progettazione prima che vengano sviluppati modelli e di ridurre i tempi di progetto oltre alle spese.





# Il propulsore MPD

## 3.1 Introduzione

Poiché l'oggetto su cui si è focalizzato lo studio è il propulsore MPD, si ritiene utile illustrarne i principi di funzionamento e, più in generale, illustrare il concetto di accelerazione elettromagnetica, attraverso una trattazione analitica semplificata ed alcuni modelli empirici. Le informazioni riguardanti il motore MPD sono tratte dal testo del Jahn "*Physics of Electric Propulsion*". Alcune osservazioni fenomenologiche possono risultare utili per la comprensione dei meccanismi che operano all'interno del motore. La struttura del getto all'uscita è di tipo coassiale, con maggiore luminosità nella zona centrale e nella zona dell'anodo, queste due zone sono separate da una zona a minor luminosità. Sebbene il motore funzioni anche senza campo magnetico esterno, la presenza di quest'ultimo tende a renderlo più stabile, inoltre si osserva una contrazione del getto verso l'asse all'aumentare dell'intensità del campo, mentre un'analisi più approfondita è necessaria per determinare la variazione delle prestazioni al variare della grandezza e della collocazione assiale della bobina che genera il campo magnetico. Riportiamo qualche misura di sperimentale per quanto riguarda densità di corrente, impulso specifico, spinta, differenza di potenziale e rendimento di questi propulsori.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

Propellente	Idrogeno			Ammoniaca				Argon	
Corrente [A]	1500	2000		1500	2000	2500		1500	2100
Portata [gm/s]	0.05	0.02	0.05	0.03	0.03	0.01	0.01	0.032	0.032
Voltaggio [V]	71	68	78	36	39	37	35	25	30
Spinta [N]	1.21	0.98	2.22	0.88	1.13	0.9	0.95	0.54	0.68
Impulso specifico [s]	2460	5000	4520	3000	3840	6140	6500	1720	2160
Rendimento %	13.7	23.6	25.4	24	27	36.6	34.4	12.1	11.5

Tabella 3.1 Caratteristiche tipiche di un propulsore MPD (Jahn)

La densità elettronica e la temperatura elettronica nel getto sembrano essere abbastanza costanti intorno a  $10^{14}$  [cm<sup>-3</sup>] e  $10^4$  [K] rispettivamente, per le portate che normalmente si utilizzano in questi propulsori, sebbene esistano zone a più alta concentrazione di particelle e misure mostrino anche zone in cui la temperatura è leggermente più alta. Per interpretare queste osservazioni sarebbe necessario una completa conoscenza del processo accelerativo e questo può essere ottenuto in qualche misura attraverso le tecniche già citate della magnetogasdinamica e della teoria delle orbite tenendo anche in considerazione il ruolo che svolgono le collisioni fra le particelle nel processo. Si riporta un'immagine di un propulsore MPD durante il funzionamento in una prova svolta al Centrosazio:

## Il propulsore MPD

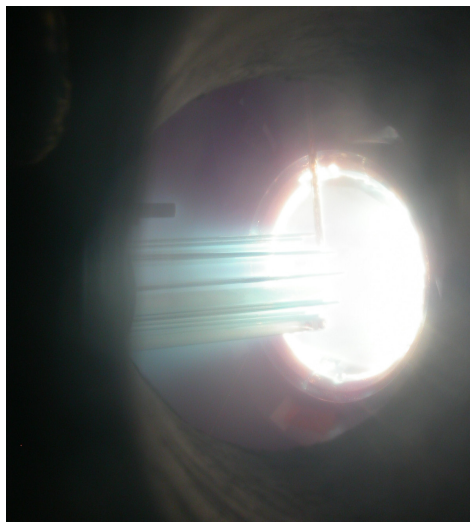


Figura 3.1: Motore MPD durante il funzionamento nella camera a vuoto

### 3.2 Scarica nei gas

Poiché in un motore MPD uno dei meccanismi essenziali è dovuto all'instaurarsi di una scarica fra anodo e catodo, si è ritenuto importante farne una breve descrizione. La zona della caratteristica elettrica di una scarica che ha interessi propulsivi è l'arco. In figura è possibile identificarlo fra G ed H.

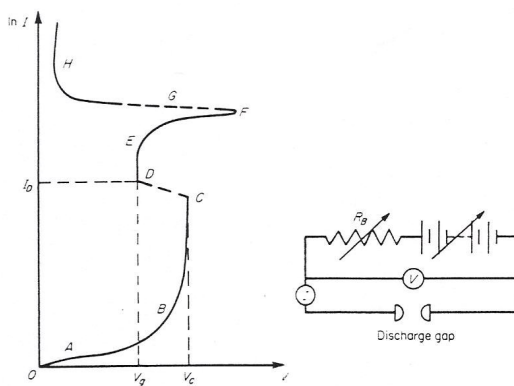


Figura 3.2 Caratteristica elettrica per una scarica gassosa.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

Si possono distinguere tre zone essenzialmente in una scarica : la zona anodica, la zona catodica e la colonna positiva. La colonna positiva occupa praticamente tutta la regione dove avviene la scarica mentre le due restanti regioni sono di ordini di grandezza molto minori. Nelle due zone di estremità avvengono delle cadute di potenziali notevoli mentre l'andamento del potenziale all'interno della colonna positiva rimane lineare; infatti questa zona è in buona approssimazione un plasma che consiste di un miscuglio di elettroni, atomi neutri e ioni a circa la stessa temperatura ovvero intorno ai  $10^4$  [K] con un grado di ionizzazione che può arrivare anche al 100%. La velocità di agitazione termica degli elettroni supera di molto la velocità media dovuta al debole campo elettrico e così il meccanismo predominante della ionizzazione è dato dalle collisioni termiche. Nella colonna positiva e nella guaina intorno all'anodo la conduzione è essenzialmente dovuta agli elettroni, mentre nella zona catodica gli ioni contribuiscono significativamente alla conduzione durante la loro accelerazione verso la buca di potenziale catodica. Riportiamo il profilo di potenziale per una scarica.

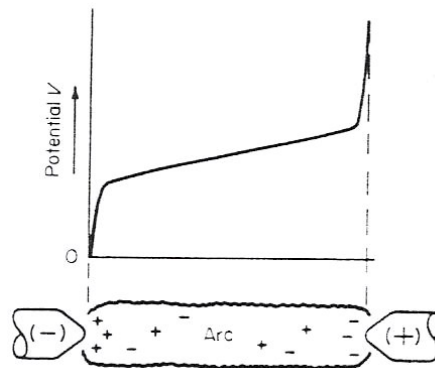


Figura 3.3 Profilo di potenziale per un scarica ad arco

### **3.3 Effetto Hall**

La descrizione dell'effetto Hall e in generale della conduttività elettrica risulta utile per un'adeguata comprensione dei fenomeni che avvengono in un motore MPD. Per stabilire come la densità di corrente sia legata al campo elettrico e magnetico attraverso il coefficiente di conduttività, è necessario vedere qual è il comportamento di una carica all'interno di questi campi. Una carica isolata che si muove in un campo magnetico sente una forza perpendicolare alla sua velocità e alla direzione del campo magnetico. Se la velocità è solamente perpendicolare a  $\vec{B}$  la particella assume un moto circolare, se ha una componente anche lungo  $\vec{B}$  la particella ha un moto ad elica con asse parallelo a  $\vec{B}$ . La frequenza angolare, il raggio e il passo sono dati rispettivamente da:

$$r = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad (3.1)$$

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (3.2)$$

$$p = 2\pi v_{\parallel} / \omega \quad (3.3)$$

Se si introduce anche un campo elettrico il moto diventa più complesso, l'equazione del moto può tuttavia ancora essere integrata. Piuttosto che risolvere le tre componenti scalari dell'equazione, si può più facilmente ottenere una soluzione introducendo una velocità fittizia  $\tilde{v}$  perpendicolare sia a  $\vec{E}$  che a  $\vec{B}$ , in questo modo il moto risulterà uguale alla situazione precedente salvo che per un'accelerazione lungo  $\vec{B}$  data dalla componente del campo elettrico parallela a esso  $E_{\parallel}$  e del moto di deriva perpendicolare ai due campi dato da:

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

$$\vec{v} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (3.4)$$

Se si volesse adesso introdurre una conduttività elettrica per un gas non collisionale si avrebbero dei problemi, otterremmo infatti un moto sia per gli ioni che per gli elettroni dotato della stessa velocità, direzione e verso non fornendo di conseguenza alcuna corrente, l'unica corrente che potrebbe scorrere è quella nella direzione parallela a B; in ogni caso non essendoci smorzamento la conduttività elettrica risulterebbe ancora mal definita poiché le particelle accelererebbero linearmente nel tempo. Risulta quindi importante introdurre il fenomeno delle collisioni per descrivere adeguatamente il moto stazionario dei portatori di carica e una corrente stazionaria. Incorporare le collisioni nel calcolo del moto di ogni particella sarebbe troppo difficile e non necessario; è più semplice e rimane comunque adeguato considerare il moto medio di un gran numero di queste particelle, in questo modo è possibile considerare l'effetto di molte collisioni come un agente smorzante del moto in risposta ai campi applicati. Così facendo si può definire  $\nu$  come il tasso secondo il quale le particelle perdono la loro quantità di moto e si può scrivere un'equazione del moto così fatta:

$$\frac{d}{dt} nm\vec{v} = nq\vec{E} - \nu nm\vec{v} \quad (3.5)$$

Indipendentemente dal valore della frequenza e del modo in cui può essere calcolata, la soluzione dell'equazione differenziale per la velocità può essere scritta come:

$$\dot{\vec{v}} = \frac{q}{m\nu} \vec{E} + C e^{-\nu t} \quad (3.6)$$

E dopo che il transitorio è svanito si ottiene per la corrente in regime stazionario:

### *Il propulsore MPD*

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \frac{nq^2}{m\nu} \vec{E} \quad (3.7)$$

In questo caso è possibile definire una conduttività che risulta scalare ed è pari al coefficiente di  $\vec{E}$ . Quando un campo magnetico è applicato non è più possibile definire una conduttività scalare, e in questo caso il rapporto fra la frequenza di ciclotrone e la frequenza di collisione distingue il comportamento delle particelle rispetto ai campi  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Il rapporto  $\omega/\nu$  è chiamato parametro di Hall e la corrente nella direzione  $\vec{E} \times \vec{B}$  corrente di Hall; se  $\omega/\nu \gg 1$  le cariche compiono un gran numero di giri prima di essere disturbati da una collisione e la maggior parte della corrente scorre in direzione  $\vec{E} \times \vec{B}$ , se  $\omega/\nu \ll 1$  le cariche non completano neanche un giro prima di un evento collisionale, in questo caso la componente maggiore della corrente risulta in direzione di  $\vec{E}$ , nei casi intermedi le correnti nelle due direzioni sono di grandezza comparabile. Chiaramente il parametro di Hall ha valori differenti a seconda delle specie considerate, dipendendo principalmente dal rapporto peso-carica, così può accadere che in certe situazioni gli elettroni contribuiscano a una corrente di Hall mentre gli ioni ad una corrente parallela ad  $\vec{E}$ . Infine è possibile identificare un simile effetto anche nelle vicinanze delle pareti di un contenitore che contenga il gas, anche in assenza di collisioni, dovuto ai differenti raggi di ciclotrone delle particelle. Si riportano alcuni esempi di questo effetto nelle figure sottostanti.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore MPD con campo magnetico applicato*

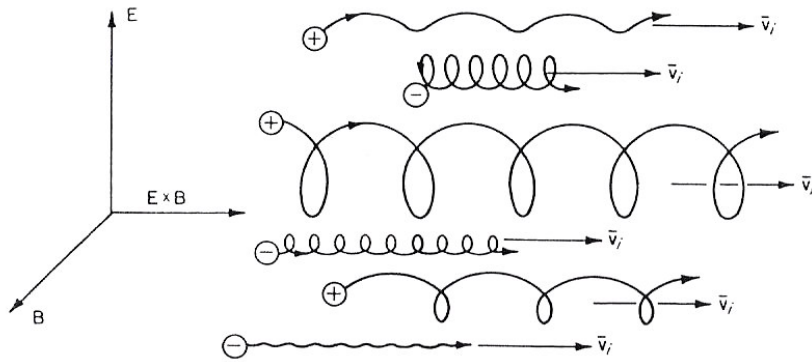


Figura 3.4 Rappresentazione schematica della velocità di deriva di ioni ed elettroni in presenza di un campo elettrico e magnetico ortogonali e gas non collisionale

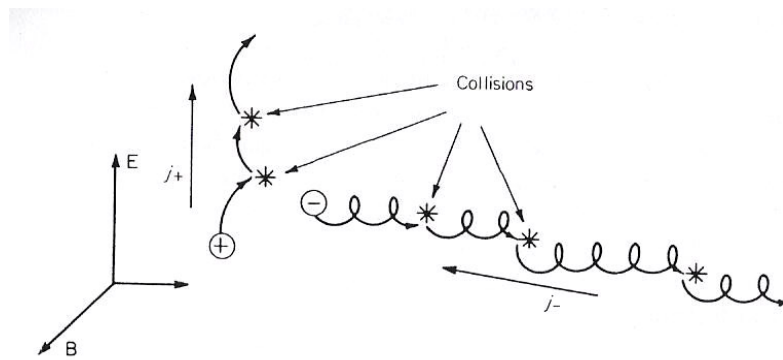


Figura 3.5 Esempi di conduzione di ioni e elettroni in un gas: gli elettroni causano una corrente di Hall mentre gli ioni una corrente scalare parallela ad E



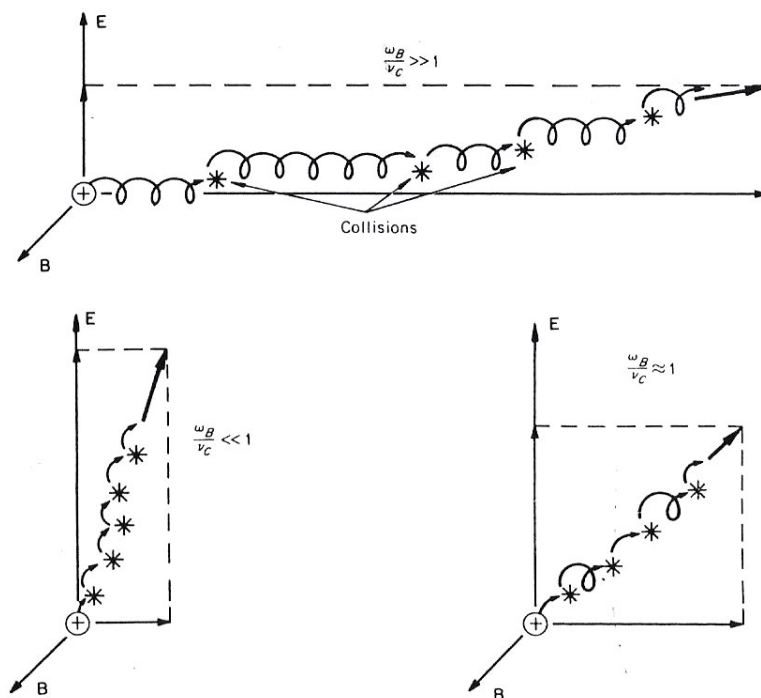


Figura 3.6 Moto di particelle cariche in un campo magnetico ed elettrico al variare del parametro di Hall

### 3.4 Descrizione magnetogasdinamica

Nella rappresentazione del gas come un continuo, varie componenti della interazione magnetogasdinamica possono essere proposti. Con riferimento alla figura (3.7), possiamo identificare un' accelerazione assiale dovuta all' interazione di una corrente radiale con il campo magnetico autoindotto azimuthale; ci si riferisce solitamente a questo come il “blowing” elettromagnetico che è l'accelerazione scalare a cui ci riferisce solitamente quando si trattano gli acceleratori scalari, i più semplici dispositivi di accelerazione elettromagnetica; si può inoltre identificare una forza elettromagnetica che causa il restringimento del plasma vicino all'asse noto come “pumping” dovuto all' interazione di una

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

corrente assiale con il campo magnetico autoindotto azimutale. Se si pensa di introdurre anche un campo magnetico esterno con componenti assiale e radiale, questo può generare fenomeni di rotazione delle particelle in direzione azimutale. Infine se si considerano gli effetti di conduttività tensoriale, varie correnti di Hall possono sorgere. Per poter fare una trattazione analitica al momento consideriamo solamente gli effetti di “pumping” e “blowing” riservandoci di valutare gli altri effetti per vie alternative.

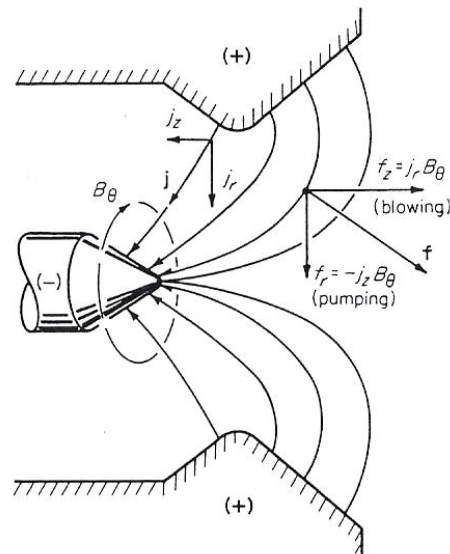


Figura 3.7: Modello magnetogasdinamico del propulsore MPD

Mostriamo prima l'effetto delle due interazioni in modo separato attraverso due modelli più semplici, poi sarà visto un modello più realistico che comprende entrambi gli effetti. Il meccanismo di spinta assiale (blowing) può essere valutato considerando che solamente una corrente radiale scorra all'interno della camera (fig. 3.8) :

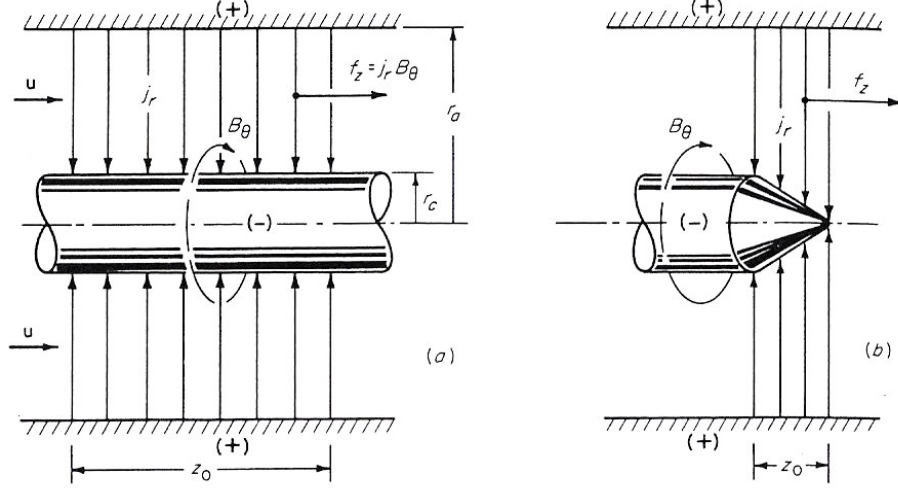


Figura 3.8: Modello idealizzato dove scorre solamente corrente radiale. (a) catodo cilindrico (b) catodo conico

Dall'equazione di Maxwell si può valutare il campo magnetico in funzione della corrente, il campo indotto risulta puramente azimutale, lineare in direzione assiale  $z$  e inversamente proporzionale al raggio  $r$ :

$$B_{\theta}(r, z) = \frac{\mu J}{2\pi r} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) \quad (3.8)$$

Dove  $J = 2\pi r z_0 j_r$  è la corrente totale che scorre all'interno della camera. La forza di massa è così puramente assiale e proporzionale a  $z/r^2$ , mentre la forza totale a cui è soggetto il gas corrisponde all'integrale della forza di massa su tutto il dominio:

$$f_z(r, z) = j_r B_{\theta} = \frac{\mu J^2}{4\pi^2 r^2 z_0^2} (z_0 - z) \quad (3.9)$$

$$F_z = \frac{\mu J^2}{4\pi^2 z_0^2} \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_{r_c}^{r_a} \frac{(z_0 - z)}{r^2} r dr d\theta dz = \frac{\mu J^2}{4\pi} \ln \frac{r_a}{r_c} \quad (3.10)$$

Se il catodo fosse conico invece che cilindrico, l'unica differenza consisterebbe nei limiti di integrazione sull'integrale più interno, inoltre una supposizione sulla distribuzione della corrente sarebbe necessario: se si suppone variabile sulla superficie del catodo come  $1/r$  (3.11), oppure costante su questa superficie e corrispondentemente variabile sulla superficie dell'anodo come  $1/z$  (3.12):

$$F_z = \frac{\mu J^2}{4\pi} \left( \ln \frac{r_a}{r_c} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.11)$$

$$F_z = \frac{\mu J^2}{4\pi} \left( \ln \frac{r_a}{r_c} + \frac{1}{4} \right) \quad (3.12)$$

Consideriamo ora il contributo all'accelerazione elettromagnetica dovuto all'azione di "pumping" ovvero di pompaggio che contribuisce all'azione di spinta se l'aumento di pressione al catodo non è compensata all'anodo. Possiamo utilizzare un altro modello semplificato per valutare quantitativamente questo effetto, con riferimento alla figura sottostante:

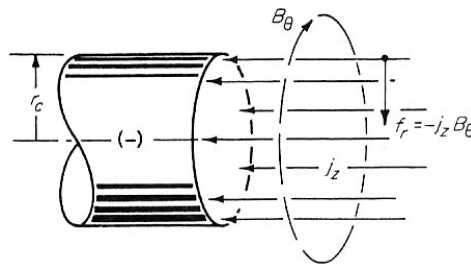


Figura 3.9: Modello idealizzato dove scorre solamente una corrente assiale

In questo caso la corrente entra dalla superficie di un catodo cilindrico cavo. Il campo magnetico indotto generato è ancora azimutale e vale:

Il propulsore MPD

$$B_{\theta}(r) = \frac{\mu J r}{2\pi r_c^2} \quad (3.13)$$

La forza di massa è perciò radiale e deve essere bilanciata all' equilibrio da un gradiente della pressione radiale. Il contributo alla spinta vale perciò:

$$F = 2\pi \int_0^{r_c} (p - p_0) r dr = \frac{\mu J^2}{8\pi} \quad (3.14)$$

Se vogliamo costruire il modello completo vedremo che la spinta totale che viene fornita è semplicemente data dalla somma dei due contributi:

$$F = \frac{\mu J^2}{4\pi} \left( \ln \frac{r_a}{r_c} + A \right) \quad (3.15)$$

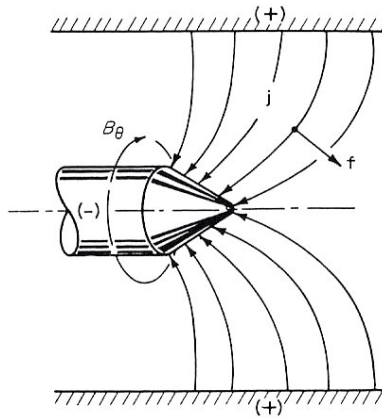


Figura 3.10: Modello ibrido dell'accelerazione elettromagnetica

Osserviamo che la spinta totale è indipendente dal percorso seguito dalla corrente, con eccezione del rapporto fra i raggi di anodo e catodo, e per la piccola dipendenza della corrente sulla superficie del catodo. Notiamo inoltre che la spinta è indipendente dalla portata di massa, segue quindi che la velocità di

scarico sarà inversamente proporzionale alla portata. Nel tentativo di spiegare questa dipendenza si può utilizzare un altro approccio, quello particellare per descrivere il processo che avviene all'interno del MPD.

### 3.5 Descrizione particellare

Un secondo modello che si può proporre per studiare le prestazioni di un MPD è il modello particellare, in quanto in certe circostanze la bassa pressione a cui si usano questi motori, ci suggerisce che le orbite delle particelle diventino comparabili con le dimensioni della camera. Consideriamo ora una situazione opposta a quella del continuo, ovvero un insieme di particelle non collisionali che vengono accelerate fuori dal motore, si assume che le uniche collisioni siano quelle che generano gli ioni all'anodo; una volta formati essi vengono direttamente accelerati senza altre collisioni verso l'asse e ruotati esternamente dal campo magnetico, dove incontrano un fascio di elettroni assiale; da questo punto di vista si può considerare l' MPD come un acceleratore elettrostatico.

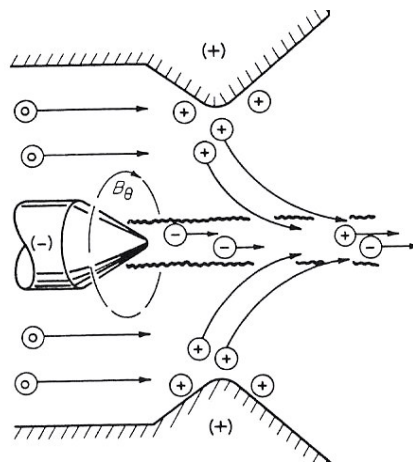


Figura 3.11: Modello non collisionale di MPD

### *Il propulsore MPD*

Questo modello è in grado di fornire alcune correlazioni fra le proprietà del motore che differiscono dal caso continuo, e perciò possono essere utilizzate per testarne la validità. Poiché la corrente radiale è dovuta agli ioni è di conseguenza limitata dalla portata disponibile:

$$J \leq \frac{\dot{m}q}{m_+} \quad (3.16)$$

Dove  $m_+$  è la massa degli ioni. Inoltre gli ioni devono essere in grado di ruotare la loro velocità da radiale ad assiale quindi:

$$r^+(r) = \frac{m_+v_+}{qB} = \frac{2\pi m_+v_+}{\mu q J} \leq r_p \quad (3.17)$$

Dove  $r_p$  rappresenta la posizione radiale della particella. Di conseguenza la velocità sarà limitata approssimativamente a:

$$u \leq \frac{\mu q J}{2\pi m_+} \quad (3.18)$$

La velocità di scarico sarà inoltre limitata in questo modello equivalentemente ai propulsori elettrostatici a:

$$u \leq \left( \frac{2Vq}{m_+} \right)^{1/2} \quad (3.19)$$

Le relazioni sopra riportate legano il voltaggio al quadrato della corrente, inoltre la spinta varia anch'essa con il quadrato della corrente mentre la velocità di scarico si vede essere proporzionale alla corrente e inversamente alla portata di massa. L'essenziale differenza dal modello visto prima è il legame fra la velocità e la portata che prima non era visibile. La validità di un modello particellare non collisionale è evidentemente bassa per le situazioni di interesse propulsivo (sono

richieste possibilmente alte spinte e quindi portate grandi); rimangono comunque validi indizi su certi aspetti del comportamento del propulsore. Attraverso questo schema è infatti possibile spiegare la possibilità che ha il catodo di sostenere alti livelli di corrente senza fondersi, infatti l'ipotesi è che il forte campo magnetico vicino al catodo defletta gli ioni rallentandone il bombardamento; questo ci si aspetta che avverrà in zone dove  $\omega/v \gg 1$  e dove il raggio di ciclotrone degli ioni è piccolo rispetto alle dimensioni del catodo; entrambe le richieste sono più facilmente rispettate a regimi dove la teoria collisionale non è più utilizzabile. Una descrizione delle orbite comprendente le collisioni può in qualche modo riempire i vuoti fra una disciplina e l'altra .

### **3.6 Descrizione collisionale euristica**

Sfortunatamente l'introduzione delle collisioni nella teoria delle orbite rende il problema difficilmente risolvibile per via analitica. Rimane comunque possibile valutare i percorsi qualitativi della corrente e prevedere la densità di spinta attraverso l'analisi dei parametri di Hall per gli ioni e per gli elettroni e dei rispettivi raggi di ciclotrone nella regione del getto e all'interno della camera. Tralasciando i metodi utilizzati per determinare i parametri citati, è possibile determinare le traiettorie medie di elettroni e ioni, come riportato in figura :



### Il propulsore MPD

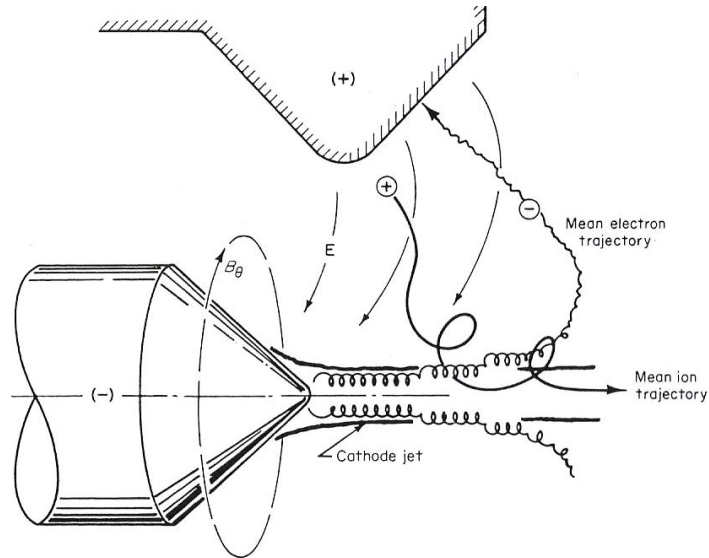


Figura 3.12: Moto di elettroni e ioni in un MPD

Si può notare un grande valore per il parametro di Hall per gli elettroni nel vertice del catodo che costringe gli elettroni emessi dalla superficie del catodo a mantenere un moto di migrazione assiale finché raggiunta una posizione sufficientemente a valle dove  $\Omega$  è diminuito di intensità, è permesso lo sviluppo di una migrazione collisionale radiale; solamente dopo quel punto gli elettroni possono migrare indietro verso l'anodo. Poiché non esiste una corrente radiale elettronica, la corrente radiale ionica diventa importante in prossimità degli elettrodi. In questa visione il meccanismo dominante della spinta segue dall'analisi dei percorsi delle particelle. Nella regione esterna del getto si trova una zona dominata dalle collisioni in cui una conduttività scalare domina fornendo una forza di massa  $\vec{j} \times \vec{B}$ . La diminuzione del campo magnetico indotto in questa regione comunque preclude un grosso contributo alla spinta totale data da questo meccanismo. In posizione intermedia sia radiale che assiale si osserva un regime di corrente scalare ionica e di Hall elettronica, che fornisce una

componente radiale alla spinta associata con l'accelerazione diretta degli ioni a causa del campo elettrico. All'interno del getto che fuoriesce dal catodo c'è una regione nella quale sia gli ioni che gli elettroni sperimentano una migrazione forzata dal campo magnetico data dal rapporto  $E/B$ , la quale contribuisce a una spinta assiale determinata dalla portata che scorre nel getto.

### **3.7 Il propulsore a campo magnetico applicato**

I problemi principali che danno questi propulsori come il surriscaldamento del catodo e la turbolenza del plasma, hanno suggerito l'utilizzo di campi magnetici esterni per tentare di migliorarne le prestazioni, abbassando il carico termico che agisce sulle pareti e cercando di sfruttare altri meccanismi di spinta oltre a quelli citati. Il campo magnetico applicato è stato anche recentemente utilizzato, attraverso l'uso di componenti radiali rotanti, per cercare di prevenire effetti di instabilità dovuti alla rotazione della colonna di plasma. Inoltre il fenomeno della rarefazione all'anodo provocato dall'impovertimento della massa che si riscontra in quella zona a certi regimi di funzionamento, provoca un innalzamento della resistività del plasma con conseguente peggioramento delle prestazioni. E' così stato proposto l'introduzione di gas già ionizzato all'interno della camera vicino all'anodo nel tentativo di limitare questo problema. Dall'esperienze precedenti e tenendo presente questi fatti è stata realizzata al Centrosazio un prototipo di MPD che avesse queste caratteristiche per essere testato in camera di prova.

### *Il propulsore MPD*

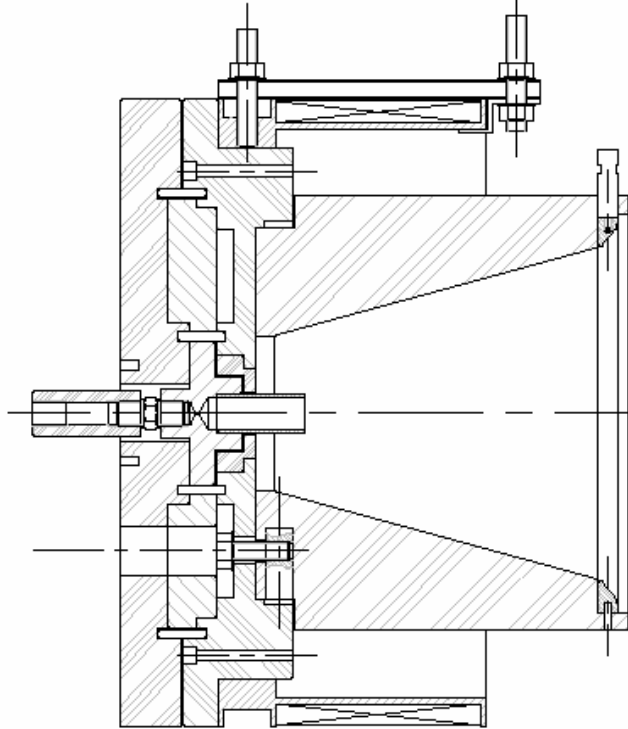


Figura 3.13: Sezione del propulsore MPD con campo magnetico applicato realizzato al Centrosazio.

Il propulsore, riportato in figura, come si vedrà in seguito è stato con le opportune modifiche utilizzato per la definizione della griglia computazionale nell'implementazione del codice. Le caratteristiche importanti di questo motore sono, oltre la bobina esterna, il catodo cavo e la parete isolante che occupa quasi tutta la camera accelerativa lasciando solamente un piccolo anello di conduttore all'estremità che funziona da anodo.

Si può tentare di tenere conto dell'effetto che il campo magnetico ha sul comportamento delle particelle ioni ed elettroni all'interno del motore con la tecnica utilizzata prima, per tener conto delle collisioni nella teoria orbitale. Partendo da una rappresentazione empirica delle linee di campo magnetico, si

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

costruisce ancora la mappa dei parametri di Hall e dei raggi di ciclotrone sulla regione di interesse. Attraverso queste supposizioni le traiettorie degli ioni e degli elettroni possono essere tracciate. Con riferimento alla figura (3.9) che mostra una situazione di campo magnetico assiale predominante rispetto al campo magnetico indotto, vediamo che ad esempio un elettrone emesso dal catodo si trova in una situazione con grande  $\Omega$  (parametro di Hall), ma ora la sua migrazione dettata da  $\vec{E} \times \vec{B}$  è in direzione azimutale. Inoltre poiché il campo elettrico e magnetico non sono ortogonali, esisterà una componente del moto lungo le linee di  $\vec{B}$ . Perciò le traiettorie degli elettroni in questa zona sono delle spirali intorno all'asse z, che partono dal catodo e confinate nelle superfici di cui le linee di campo magnetico sono un elemento. Questo tipo di moto continua finché gli elettroni arrivati a valle in una zona con  $\Omega$  minore possono attraversare le linee di campo magnetico e andare verso l'anodo. Quando si avvicinano all'anodo però rientrano in una zona ad alti  $\Omega$  e sono quindi costretti a traiettorie spiraleggianti come vicino al catodo. In questo calcolo i raggi di ciclotrone degli ioni in prossimità di anodo e catodo sono più piccoli dello spazio fra gli elettrodi e perciò suggeriscono traiettorie a spirale simili a quelle degli elettroni. Ma nuovamente, quando raggiungono zone a più bassi valori del parametro di Hall, gli ioni attraversano le linee di campo magnetico. Poiché la direzione azimutale della migrazione dovuta a  $\vec{E} \times \vec{B}$  è la stessa per ioni e elettroni questo modello non prevede corrente di Hall ma solamente un moto vorticoso intorno a catodo e anodo.

## Il propulsore MPD

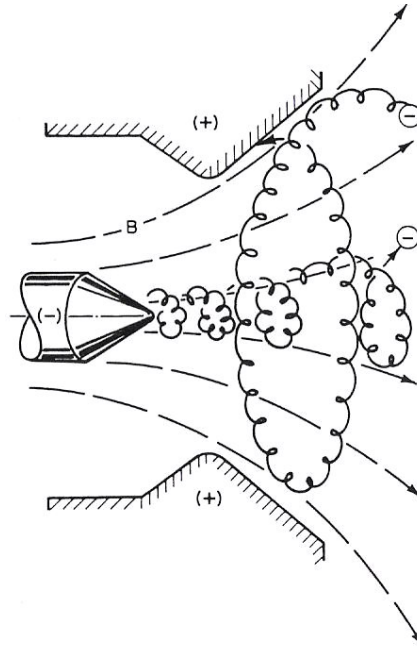


Figura 3.9 Moto degli elettroni in un propulsore MPD con campo magnetico applicato

### 3.8 Fenomeni di onset

Le più serie limitazioni sulle prestazioni dei motori MPD sono legate ai fenomeni di onset: grandi fluttuazioni nel voltaggio degli elettrodi e aumento della loro erosione e dell'erosione dell'isolante nascono quando la corrente di scarica supera certi valori critici che dipendono dalla portata di massa a cui lavora il motore. Sono state proposte varie teorie per tentare di spiegare i fenomeni di onset e per cercare di predire il limite di onset per un dato disegno del motore. Due sono le interpretazioni più accreditate:

- Rottura della guaina all'anodo: questa teoria è dovuta principalmente a Hughel. Egli mostra la dipendenza della pressione radiale dal valore del parametro caratteristico  $k$  ( $i^2 / \dot{m}$ ) e definisce un parametro critico  $k^*$  come il valore che determina la mancanza di massa alle pareti dell'anodo.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

I fenomeni di onset avvengono perciò quando la densità del gas all'anodo non è sufficiente per sostenere la corrente. Studi sperimentali hanno mostrato la dipendenza di questi fenomeni con lo sviluppo di una corrente assiale lungo il catodo; essa è dovuta a una conduttività perpendicolare e quindi a un valore grande del parametro di Hall. Perciò si può specificare il limite di onset attraverso il valore massimo che può essere supportato dal parametro di Hall. In quest'ottica sarebbe possibile superare il problema attraverso l'introduzione di una maggiore massa all'interno del motore, massa che dovrebbe essere introdotta in prossimità dell'anodo.

- Eccessiva forza controelettrica: questa teoria è dovuta a Lawless, Subramanian e a Kuriki. In accordo con essa i fenomeni di onset sono associati con dei valori di campi e flussi che determinano un'eccessiva forza controelettrica che impedisce l'ulteriore aumento della corrente. I metodi per superare questo problema sarebbero quelli di introdurre degli elettrodi segmentati che permetterebbero di variare il voltaggio nelle regioni di eccessiva forza controelettrica, oppure l'uso di canali divergenti-convergenti per aumentare il campo elettrico nelle medesime.

# Metodi numerici per la simulazione di plasmi

## 4.1 Introduzione

Prima di effettuare una scelta riguardo all'approccio migliore per la simulazione di un motore MPD, è stata fatta un'analisi riguardo ai metodi che sono stati e sono utilizzati in letteratura, in generale, per la simulazione numerica di plasmi. Lavori precedenti sono inoltre già stati effettuati al Centrosazio riguardo a queste problematiche, sia su motori MPD che su motori ad effetto Hall. In particolare la prima parte di questo lavoro ha coinciso con l'analisi di un codice che era in sviluppo e, solo successivamente, si è scelto di tentare un'altra via ritenuta più adeguata per il problema in questione; si vuole evidenziare però che la metodologia PIC-FES a cui si fa riferimento potrebbe in futuro essere applicata sia in contemporanea con il codice magnetoinduttivo qui sviluppato che singolarmente per lo studio delle guaine che si formano alle pareti sia isolanti che conduttrici ritenendolo appropriato per un'analisi di plasmi dove l'ipotesi di neutralità non è soddisfatta, inoltre un'analisi di questo tipo potrebbe fornire validissimi indizi sul comportamento del plasma in prossimità degli elettrodi, suggerendo altri approcci geometrici al problema della accelerazione magnetica e possibili soluzioni riguardo a problemi esistenti.

I metodi che solitamente vengono impiegati appartengono a due grandi famiglie: particellari o fluidi, all'interno di questi poi, varie altre suddivisioni vengono effettuate. Esistono poi altri metodi così detti ibridi perché legano fra di loro queste due metodologie considerando le varie specie che sono presenti nei plasmi in un modo oppure nell'altro. L'algoritmo magnetoiduttivo e il PIC-FES appartengono a quest' ultima categoria.

## **4.2 I codici particellari**

Questo tipo di codici sono più recenti di quelli che trattano il plasma come un fluido. L'introduzione tardiva di algoritmi che risolvessero il problema dell'integrazione dell'equazione del moto per una particella è dovuta al notevole costo computazionale che essi hanno rispetto a schemi che risolvono il moto per un fluido. Il costo maggiore è dovuto sia al numero di particelle molto alto che compongono un sistema sia al passo di integrazione che solitamente è minore per questo tipo di approccio; infatti una simulazione numerica ha un'ovvia difficoltà a calcolare un grande numero di ioni e di elettroni per un plasma che sia realistico. Esistono metodi di simulazione diretta particella-particella in cui sia gli effetti a lungo raggio che gli effetti a corto raggio sono direttamente calcolati per ognuna delle  $N$  particelle considerate. Chiaramente  $N$  dovrà essere molto grande e le particelle scelte dovranno essere un numero staticamente significativo di tutte le particelle costituenti il sistema, il costo computazionale di questi metodi sale come  $N^2$  diventando proibitivo al crescere del numero di particelle. L'equazione fondamentale che deve essere integrata risulta :

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{f}_{coll}$$

Dove il secondo termine a destra dell' uguale corrisponde all'effetto che hanno le collisioni nel moto della particella. Un altro metodo che si è rivelato più efficace



nella simulazione del plasma e che verrà trattato in dettaglio nel capitolo 5 è il metodo PIC, esso appartiene alla famiglia dei metodi chiamati particella-griglia, nei quali le interazioni fra le particelle non sono calcolate direttamente ma vengono determinate attraverso il calcolo del campo che viene fatto sul nodo della griglia. Il potenziale necessario per determinare il campo elettrico in questo modo viene calcolato attraverso la soluzione dell'equazione di Poisson, il costo computazionale di un metodo simile è dipendente da N diversamente da prima.

### **4.3 I codici magnetoidrodinamici**

Uno degli approcci più popolari che traslascia la simulazione di effetti microscopici è l'approccio fluido. In un plasma magnetizzato la descrizione prende il nome di magnetoidrodinamica (MHD). Le equazioni che descrivono il modello MHD derivano dall'equazione di Vlasov per la funzione di distribuzione [31] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} &= \vec{J} \times \vec{B} - \nabla \cdot \overline{\overline{P}}\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{q} \nabla \overline{\overline{P}} = \eta \vec{J}$$

Dove con  $\eta$  si è indicata la resistività e con  $\overline{\overline{P}}$  il tensore degli sforzi; l'equazione della corrente è stata semplificata supponendo la quasi-neutralità e constatando che la frequenza MHD è piccola rispetto alla frequenza del plasma. Un sistema di equazioni più semplici può essere ottenuto se si fanno ulteriori semplificazioni; si trascurano la resistività e il termine di pressione:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla \cdot \vec{P} \quad (4.2)$$

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$$

L'ultima equazione del sistema equivale a dire che la conduttività nel plasma è infinita e non esiste campo elettrico nel sistema di riferimento fisso con il plasma. Un altro approccio può essere utilizzato nella descrizione fluida di un plasma: il modello a due fluidi; osservando che nell'ambito della frequenza MHD l'oscillazione degli elettroni è molto rapida, può essere trascurato il termine inerziale nell'equazione del moto per gli elettroni :

$$0 = -m \frac{d\vec{V}_e}{dt} = q(E + \vec{V}_e \times \vec{B}) + \frac{1}{n_e} \nabla \cdot \vec{P} - m v_{ei} (\vec{V}_i - \vec{V}_e) \quad (4.3)$$

Mentre per gli ioni:

$$m \frac{d\vec{V}_i}{dt} = q(E + \vec{V}_i \times \vec{B}) - \frac{1}{n_i} \nabla \cdot \vec{P} - M v_{ie} (\vec{V}_i - \vec{V}_e) \quad (4.4)$$

Queste equazioni devono poi essere chiuse attraverso l'utilizzo delle equazioni di Maxwell e di appropriate equazioni per l'energia. I sistemi MHD proposti non sono semplici da trattare per quanto riguarda la loro integrazione temporale. Tutte le equazioni di conservazione viste contengono il termine convettivo, che contiene sia la derivata rispetto al tempo che la derivata rispetto allo spazio. L'approccio di discretizzare sia nel tempo che nello spazio è chiamato Euleriano ,nel quale la variazione temporale è osservata a coordinate spaziali fissate. Poiché il problema è la derivata temporale fissata nello spazio, sono stati proposti differenti approcci al problema; il più famoso è l'approccio Lagrangiano, dove la derivata temporale

è vista nel sistema di riferimento che si muove con il fluido. Analizziamo la difficoltà con l'algoritmo di Eulero ad esempio nell'equazione di conservazione della massa:

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} = -\vec{v} \cdot \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

L'analisi del fattore di amplificazione ci dice che :

$$|g|^2 = 1 + \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x) > 1$$

e perciò l'algoritmo è sempre instabile. Si utilizza di solito per aggirare il problema lo schema di Lax o lo schema di Lax-Wendroff:

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} &= \langle \rho_j^n \rangle - \vec{v} \cdot \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) = \\ &= \frac{1}{2} (\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n) - \vec{v} \cdot \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n) \end{aligned}$$

In questo caso il fattore di amplificazione risulta :

$$|g|^2 = 1 - \left[ 1 - \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \right] \sin^2(k\Delta x)$$

e perciò la condizione di stabilità  $|g|^2 \leq 1$  diventa:

$$\Delta t \leq \Delta x / v$$

Che è una condizione di Courant-Friedrichs-Lewy. Per eliminare l'eccessiva diffusione numerica dello schema di Lax si può utilizzare lo schema di Lax-

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

Wendroff. Ponendo  $F = v\rho$  introduciamo il seguente algoritmo a due passi per l'equazione di conservazione della massa come prima:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Il primo passo risulta il passo dello schema di Lax precedente applicato su metà passo :

$$\rho_j^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n) - \bar{v} \cdot \frac{\Delta t / 2}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n)$$

Il secondo passo è invece un passo completo:

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^{n+1/2} - \bar{v} \cdot \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^{n+1/2} - F_{j-1}^{n+1/2})$$

L'aspetto più importante dell'algoritmo è che

1. Il primo passo serve per valutare una derivata centrata nel tempo per la variabile  $\rho_j^{n+1/2}$  sebbene il suo valore sia piuttosto impreciso.
2. Il secondo passo è virtualmente centrato nel tempo usando il valore predetto precedentemente.

Come risultato si ottiene un metodo accurato al secondo ordine e numericamente stabile. Valutiamo ora nuovamente il fattore di amplificazione:

$$|g|^2 = 1 - \alpha^2(1 - \alpha^2)[1 - \cos(2k\Delta x)]^2 \leq 1$$

Dove  $\alpha \equiv v\Delta t / 2\Delta x$  e perciò:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}$$

Fra i metodi espliciti è utile ricordare lo schema Leapfrog per integrare l'equazione del moto:

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n)$$

$$u_{j+1}^{n+2} = u_{j+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+2}^{n+1} - F_j^{n+1})$$

Come al solito per valutare la stabilità lineare si calcola il fattore di amplificazione:

$$g = i\alpha \pm \sqrt{-\alpha^2 + 1}$$

con  $\alpha = \frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)$ . Esistono due radici: se  $|\alpha| \leq 1$  e  $|g| = 1$  c'è la stabilità. Se  $|\alpha| > 1$  e  $|g| > 1$  l'algoritmo è instabile. Perciò la stabilità lineare per tutti i  $k$  richiede:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}$$

Ovvero una condizione CFL. Esistono vari altri schemi di integrazione esplicita, ma i citati rimangono i più utilizzati nella simulazione dei plasmi per una più completa panoramica ci si può riferire a [31]. Riportiamo alcuni esempi di un codice sviluppato utilizzando schemi MHD.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore MPD con campo magnetico applicato*

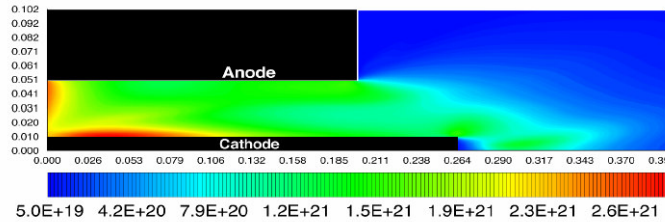


Figura 4.1 Distribuzione della densità elettronica in un MPD calcolata con un codice MHD. (fonte Kameshwaran Princeton University)

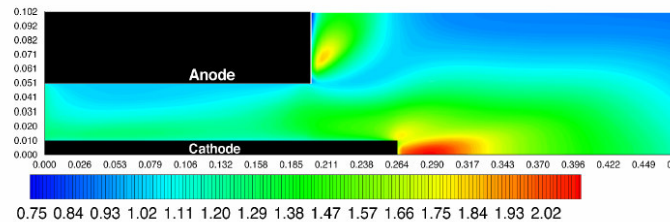


Figura 4.2 Distribuzione della temperatura elettronica in un MPD calcolata con un codice MHD. (fonte Kameshwaran Princeton University)

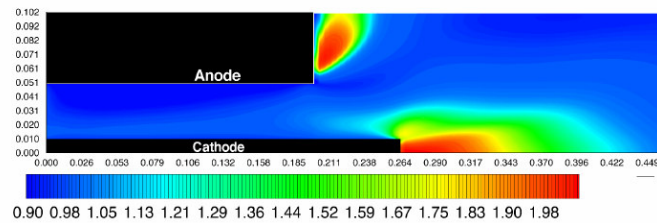


Figura 4.3 Distribuzione del livello di ionizzazione in un MPD calcolata con un codice MHD. (fonte Kameshwaran Princeton University)

Due tipi di codici sono stati menzionati Lagrangiani e Euleriani; entrambi però presentano aspetti negativi come la difficoltà per la non conservazione della massa del flusso e della quantità di moto oltre che per l'elevato costo computazionale dovuto alla complessità dei codici per il primo, e la stabilità del termine

convettivo o la densità negativa per il secondo. Nell'ottica di eliminare queste difficoltà sono stati sviluppati codici MHD-particellari che trattano gli elementi fluidi come delle particelle di grandezza finita, le quantità associate alle particelle sono fatte avanzare in maniera Lagrangiana, mentre gli elementi della griglia sono fissati e uniformi. Esistono anche algoritmi di calcolo impliciti e semi-impliciti; si è però ritenuto di non utilizzarli in questo lavoro, se non necessari, per il tempo computazionale già alto impiegato dalla simulazione.

Sono stati analizzati alcuni dei metodi numerici utilizzati per la simulazione fluida di un plasma. Queste metodologie sono state lungamente impiegate in passato a causa della scala temporale più grande e spaziale più larga oltre che per la difficoltà che si è incontrata nell'utilizzare metodi particellari per le simulazioni, raggiungendo così un alto livello di sviluppo.

#### **4.4 Metodo del centro di guida**

Fra i metodi ibridi citiamo anche il metodo del centro di guida. In generale, più veloce è il fenomeno più il comportamento del plasma è di tipo particellare, al contrario più è lento il fenomeno più assume un comportamento di tipo fluido. A causa di questa tendenza l'approccio numerico ad alte frequenze tende ad essere particellare mentre a basse fluidodinamico; fenomeni non all'estremo della situazione descritta solitamente mostrano un comportamento misto; per questi problemi un approccio ibrido sembra il più indicato. Il metodo qui citato mostra un comportamento fluido in direzione perpendicolare al campo magnetico in cui si trova immerso, mentre il plasma viene trattato in modo particellare nella direzione delle linee di campo magnetico.

## **4.5 Metodi ibridi**

Due codici ibridi sono stati sviluppati in questo lavoro, e verranno descritti a partire dal capitolo 5. Analizziamo in questo paragrafo la struttura generale di tutti i codici ibridi.

La simulazione ibrida come la simulazione particella-griglia vista in precedenza include i seguenti passi fondamentali:

- Assegnazione della densità e della corrente ai nodi della griglia
- Soluzione delle equazioni del campo elettromagnetico sulla griglia
- Calcolo del campo di forza sui nodi della griglia
- Interpolazione delle forze sulle particelle
- Avanzamento della velocità e posizione delle particelle
- Assorbimento e iniezione delle particelle ai bordi del campo computazionale

Poiché all'interno di questa struttura possono esserci equazioni non lineari implicite, per ottenere l'accuratezza voluta, in alcuni casi può essere necessario iterare fra alcuni di questi passi. Esiste una vasta gamma di possibili rappresentazioni di codici ibridi convenzionali, a partire da schemi espliciti del primo ordine a schemi impliciti a schemi di predizione e correzione fino a schemi impliciti iterativi; vediamo i più largamente usati per dimostrare la possibilità di simulare sistemi di gas ionizzati che esibiscono comportamenti multiscala.

L'algoritmo ibrido predittore-correttore con avanzamento globale nel tempo ha un passo temporale base come segue: all'istante  $n\Delta t$  si assume che  $\vec{E}^n$  e  $\vec{B}^n$  siano noti. Gli ioni sono mossi da uno schema *leapfrog* standard per ottenere la loro



posizione  $x^n$  e velocità  $v^{n+1/2}$  determinando la densità di carica  $n_i^{n+1/2}$  e corrente  $\vec{J}_i^{n+1/2}$  all'interno del processo. Successivamente:

1.  $\vec{B}^n$  è fatto avanzare verso  $\vec{B}^{n+1/2}$  usando la legge di Faraday:

$$\vec{B}^{n+1/2} = \vec{B}^n - \Delta t / 2 \nabla \times \vec{E}^n$$

$E^n$  è fatto avanzare utilizzando la legge di Ohm:

$$\vec{E}^{n+1/2} = F(\vec{B}^{n+1/2}, n_i^{n+1/2}, \vec{J}_i^{n+1/2})$$

2. Quindi,  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono predetti al passo temporale n+1:

$$\vec{E}_p^{n+1} = 2\vec{E}^{n+1/2} - \vec{E}^n$$

$$\vec{B}_p^{n+1} = \vec{B}^{n+1/2} - \Delta t / 2 \nabla \times \vec{E}_p^{n+1}$$

3. Utilizzando questi campi predetti, le particelle sono fatte avanzare di un passo temporale per determinare i predetti valori delle sorgenti ioniche  $n_i^{n+3/2}$  e  $\vec{J}_i^{n+3/2}$ .

4.  $\vec{E}_p$  e  $\vec{B}_p$  sono quindi calcolate al passo n+3/2 usando le formula del passo 1:

$$\vec{B}_p^{n+3/2} = \vec{B}_p^{n+1} - \Delta t / 2 \nabla \times \vec{E}_p^{n+1}$$

$$\vec{E}_p^{n+3/2} = F(\vec{B}_p^{n+3/2}, n_{ip}^{n+3/2}, \vec{J}_{ip}^{n+3/2})$$

5. Alla fine,  $\vec{E}^{n+1}$  e  $\vec{B}^{n+1}$  sono determinati da:

$$\vec{E}^{n+1} = \frac{1}{2} (\vec{E}_p^{n+3/2} + \vec{E}^{n+1/2})$$

$$\vec{B}^{n+1} = \vec{B}^{n+1/2} - \Delta t / 2 \nabla \times \vec{E}^{n+1}$$

6. Se richiesto  $\vec{E}^{n+1}$  e  $\vec{B}^{n+1}$  calcolati al passo 5 possono essere come predittori per i campi e il processo può essere ripetuto dal passo 3

Lo schema predittore-correttore è stato utilizzato con successo nella simulazione cinetica delle onde d'urto non collisionali, dinamica dei fasci e simulazione globale dell'interazione del vento solare con Venere, Marte e le comete[31,19,20]. Un altro algoritmo largamente usato è l'integrazione implicita nel tempo delle equazioni dell'elettromagnetismo. Questo metodo è stato ideato ed è utilizzato con lo stesso passo temporale per i campi e le particelle. Supponiamo che il valore della densità sia noto al passo temporale  $n$ , la velocità ionica al passo  $n-1/2$ , e il campo elettromagnetico all'istante  $n\Delta t$ . Per l'avanzamento delle particelle si utilizza lo schema *leapfrog*:

$$\vec{v}^{n+1/2} = \vec{v}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{M} \left( \vec{E}^n + \frac{(\vec{v}^{n+1/2} + \vec{v}^{n-1/2}) \times \vec{B}^n}{2} \right)$$

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \Delta t \cdot \vec{v}^{n+1/2} \quad \vec{x}^{n+1/2} = \vec{x}^n + \Delta t / 2 \cdot \vec{v}^{n+1/2}$$

Per il campo elettromagnetico si usa:

$$\vec{B}_{k+1}^{n+1} = \vec{B}^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \times (\vec{E}_k^{n+1} + \vec{E}^n)$$

$$\vec{J}_{e,k+1}^{n+1/2} = -\vec{J}_i^{n+1/2} + 1/\mu \nabla \times (\vec{B}_{k+1}^{n+1} + \vec{B}^n)$$

$$\vec{E}_{k+1}^{n+1} = -\vec{E}^n + \frac{1}{qn_i^{n+1/2}} \vec{J}_{e,k+1}^{n+1/2} \times (\vec{B}_{k+1}^{n+1} + \vec{B}^n)$$

Poiché la prima di queste equazioni richiede la conoscenza di  $\vec{E}$  al nuovo passo temporale, si ipotizza il suo valore e si trova un nuovo valore per l'ultima equazione. Perciò questo diventa uno schema iterativo con  $k$  che indica l'iterazione. Le derivate spaziali sono rappresentate come differenze centrate. Per iniziare l'iterazione si usa  $\vec{E}^{n+1} = \vec{E}^n$ . Tipicamente un numero di iterazioni compreso tra 4 e 9 da un errore relativo di  $10^{-3}$ . In questo schema si incontra solo un giro per avanzare la posizione e la velocità delle particelle. L'algoritmo implicito mostrato è stato utilizzato con successo per simulare la riconnessione magnetica in strati di corrente.

Il metodo del momento, invece, consiste in sottopassi per la determinazione dei campi per ognuno dei passi di avanzamento delle particelle; mostriamo un metodo di questo genere dove i sottocicli sono determinati attraverso l'algoritmo di Runge-Kutta del 4° ordine. Per iniziare si assume che  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  siano noti al passo  $n$ , anche la densità  $n_i$  e la velocità ionica  $\vec{U}_i$  sia nota al passo  $n-1/2$ . Tutte le quantità sono definite al centro della cella, eccetto  $\vec{B}$  che è definita agli angoli. La velocità della macroparticella ionica  $\vec{v}$  è nota al tempo  $(n-1/2)\Delta t$ , mentre la posizione è nota al tempo  $n$ . Le quantità sono avanzate al successivo passo temporale attraverso i seguenti passi:

1. Avanzare le velocità delle macroparticelle usando un convenzionale metodo *leapfrog*:

$$\vec{v}^{n+1/2} = \vec{v}^{n-1/2} + \frac{q\Delta t}{M} (\vec{E}^n + \vec{v}^n \times \vec{B}^n)$$

2. Avanzare la posizione degli ioni con *leapfrog*:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \Delta t \cdot \vec{v}^{n+1/2}$$

3. Calcolare le quantità medie degli ioni  $n_i^{n+1/2}$ ,  $n_i^{n+1}$  e  $\vec{U}_i^{n+1/2}$

4. Calcolare  $\vec{B}^{n+1}$  utilizzando algoritmo di Runge-Kutta del quarto ordine e sottocicli. Durante questa operazione si fissa  $\vec{U}_i$  e la densità  $n_i$  al loro valore determinato a  $n+1/2$ . Il sottociclo è necessario per la mancanza di convergenza del metodo di Runge-Kutta per larghi  $\Delta t$ . Definendo il passo temporale per l'integrazione del campo  $\Delta t'$ , e ponendo  $\theta = \Delta t / \Delta t'$ , con  $\theta$  intero positivo, il campo magnetico al tempo  $n + \theta$  è:

$$\vec{B}^{n+\theta} = \vec{B}^n + \frac{\Delta t}{6} (\vec{K}_1^n + 2\vec{K}_2^n + 2\vec{K}_3^n + \vec{K}_4^n)$$

Dove:

$$\vec{K}_1^n = -\nabla \times \vec{F}(\vec{B}^n)$$

$$\vec{K}_2^n = -\nabla \times \vec{F}(\vec{B}^n + \frac{\Delta t'}{2} \vec{K}_1^n)$$

$$\vec{K}_3^n = -\nabla \times \vec{F}(\vec{B}^n + \frac{\Delta t'}{2} \vec{K}_2^n)$$

$$\vec{K}_4^n = -\nabla \times \vec{F}(\vec{B}^n + \frac{\Delta t'}{2} \vec{K}_3^n)$$

e

$$\vec{F}(\vec{B}) = \vec{U}_i^{n+1/2} \times \vec{B} - \frac{1}{qn_i^{n+1/2}} \nabla p_e - \frac{\mu}{qn_i^{n+1/2}} \vec{B} \times \nabla \times \vec{B}$$

$\vec{F}$  è il campo elettrico, ma calcolato a livelli temporali mischiati. Il campo magnetico al passo  $n+1$  è ottenuto ripetendo il calcolo sopra riportato un numero di volte pari a  $\theta$ .

5. Avendo calcolato  $\vec{B}$  al passo  $n+1$ , ora è necessario determinare  $\vec{E}$  allo stesso passo per completare il ciclo temporale. La sola quantità che manca per effettuare il suddetto calcolo è  $\vec{U}_i$ . Questo può essere ottenuta da:

$$\vec{U}_i^{n+1} = \vec{U}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} (\vec{U}_i \cdot \nabla \vec{U}_i)^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2M_i n_i^{n+1/2}} [\nabla p_e + \nabla p_i - (\vec{J} \times \vec{B})^{n+1}]$$

6. Dato  $\vec{U}_i$  la passo  $n+1$ , il campo elettrico risulta:

$$\vec{E} = -\vec{U}_i \times \vec{B} - \frac{\nabla p_e}{qn_i} - \mu \frac{\vec{B} \times \nabla \times \vec{B}}{qn_i}$$

Dove tutti i termini alla destra dell'equazione sono calcolati al passo  $n+1$ . Il metodo del momento è stato già utilizzato con successo per la simulazione di urti non collisionali, strati di corrente e dinamica dei fasci.

Analizziamo ora un metodo ibrido che è già stato utilizzato per la simulazione di un motore MPD in passato. Il codice è denominato PIC-FES, nato come completamento di un codice PIC utilizzato per studiare l'interazione delle particelle in uscita da un motore ad effetto Hall con il veicolo spaziale. La struttura del codice è di seguito riportata:

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore MPD con campo magnetico applicato*

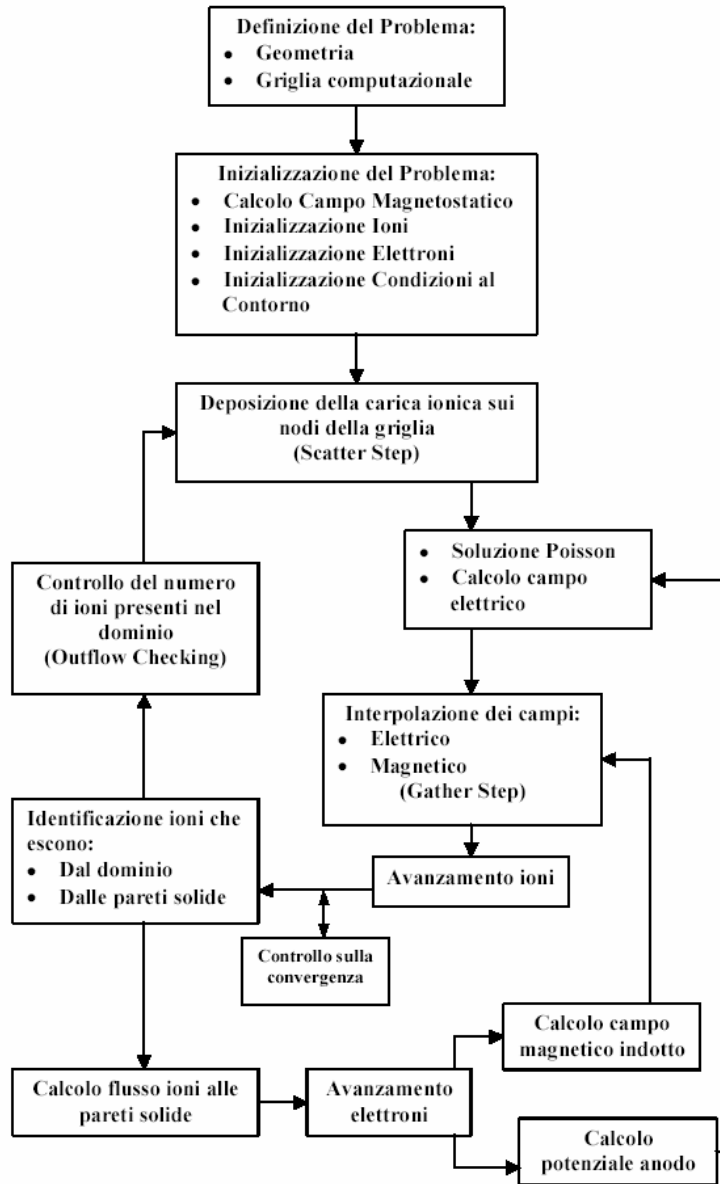


Figura 4.4 struttura del codice PIC-FES

L'idea di base di questo algoritmo è quella di studiare gli ioni costituenti il plasma come particelle, mentre gli elettroni come un fluido. I due schemi sono

indipendenti tra di loro a differenza dei normali schemi ibridi e vengono integrati attraverso la soluzione dell'equazione di Poisson che determina il campo elettrico.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\rho_i - \rho_e}{\epsilon_0}$$

Data la sua struttura, il codice PIC-FES si potrebbe rivelare utile per la descrizione di situazioni di non-neutralità in quanto i due codici lavorano con densità numeriche differenti oppure con sistemi neutri ma attraverso l'utilizzo di griglie molto fini. Infatti un codice che utilizza l'equazione di Poisson si propone di determinare quei campi elettrici che nascono per separazione di carica in un punto della griglia. Come si sa il plasma macroscopicamente è però un sistema neutro e perciò l'applicazione di questa equazione deve essere fatta su scala microscopica. Se la neutralità macroscopica non fosse mantenuta l'energia potenziale associata con le risultanti forze Coulombiane potrebbe risultare enorme rispetto all'energia di agitazione termica delle particelle. Per esempio se avessimo un plasma con una densità di  $10^{20}$  [m<sup>-3</sup>] ( densità tipica a cui lavora un MPD) e supponendo che la densità elettronica differisca dell'1% rispetto alla densità ionica e prendendo una sfera di raggio  $10^{-3}$  [m] dimensione tipica di una cella computazionale, la carica netta totale all'interno di questa sfera diventerebbe:

$$q = (4\pi r^3 / 3)(n_i - n_e) \cdot e$$

Dove con  $e$  si è indicata la carica elettronica pari a  $1.6 \cdot 10^{-19}$  [C]. Il potenziale elettrico sulla superficie della sfera diventerebbe:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{r^2 (n_i - n_e) e}{3\epsilon_0}$$

Mettendo valori numerici nella relazione sopra si ottiene per il potenziale un valore di  $\phi = 6 \cdot 10^3$  [V]. Ricordando che  $1$  [eV] =  $1.6 \cdot 10^{-19}$  [J] , osserviamo che

per equilibrare questa energia sarebbero necessari  $6 \cdot 10^3$  [eV] di temperatura ovvero diversi milioni di gradi Kelvin. La temperatura che si misura all'interno di un MPD è invece di alcuni [eV], per misurare perciò variazioni di densità di carica sarebbe necessario utilizzare griglie di diversi ordini di grandezza più fini aumentando i tempi di calcolo in modo insostenibile. Un altro punto da tenere in considerazione è che per sua natura un approccio fluido a un problema non può essere fatto se c'è assenza di massa, non è perciò possibile effettuare una simulazione partendo dal vuoto ma è necessario postulare la presenza di una certa quantità di massa elettronica all'interno del campo di simulazione. Inoltre per evitare problemi di campi elettrici troppo grandi la densità elettronica dovrà essere necessariamente bilanciata da un'uguale densità ionica. In ogni caso sono stati effettuati dei tentativi per studiare il comportamento del plasma all'interno del motore attraverso questo algoritmo; si riportano i risultati ottenuti quando per lo studio degli elettroni si fa l'ipotesi di validità dell'equazione isoterma di Boltzmann:

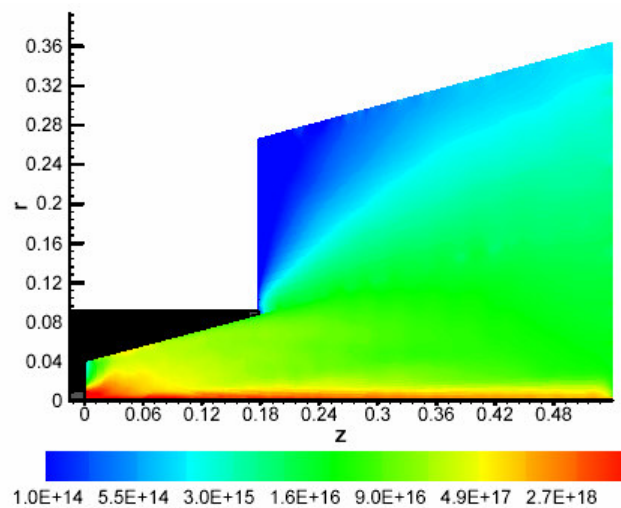


Figura 4.4 densità numerica ionica [ $\text{m}^{-3}$ ]



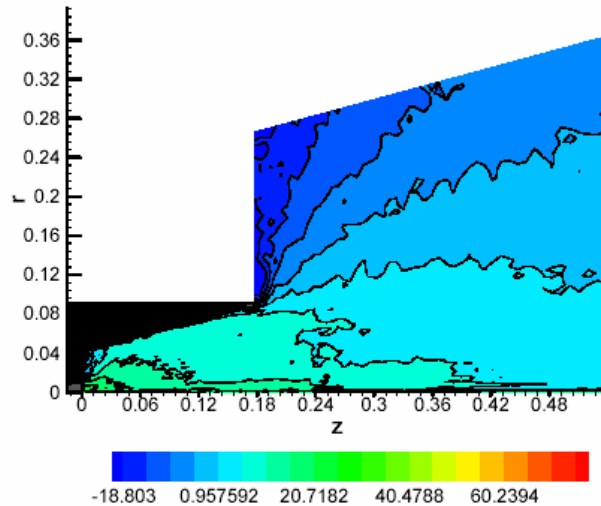


Figura 4.5 Andamento del potenziale del plasma [V]

## 4.6 Sommario

In questo capitolo sono stati indicati i vari approcci utilizzati per la descrizione di un plasma, inoltre sono state viste le tecniche numeriche che vengono più largamente usate per la simulazione. E' da notare che sebbene l'analisi attraverso tali tecniche sia molto diffusa per diversi tipi di problemi, non è facile trovare in letteratura esempi che trattino gas ionizzati connessi a circuiti esterni come nel caso dei motori elettrici. Nonostante ciò è stata implementato un codice, descritto nei prossimi capitoli, che tenta di effettuare una simulazione di questo genere integrando alcune delle tecniche riportate in questo capitolo e soprattutto introducendo un nuovo modello chiamato di Darwin che raramente è stato impiegato a causa della sua complessità. L'approccio fluido al problema della simulazione numerica è stato, in passato, solitamente preferito rispetto a quello particellare o ibrido per i motivi prima detti; nonostante questo la scelta del modello per il codice è caduta su un modello ibrido ritenendo che la dinamica delle particelle risulti importante nel comportamento di un motore MPD.



## Il codice ibrido

### 5.1 Introduzione

La complessità dei fenomeni che avvengono in un motore MPD costringono ad adottare metodi di indagine numerica sufficientemente rappresentativi della realtà fisica. Nella situazione in esame non è possibile fare troppe semplificazioni poiché i risultati che si conseguirebbero, con queste simulazioni, non sarebbero solamente imprecisi ma molto probabilmente non rappresenterebbero neanche la realtà. Il rischio è in pratica di ottenere, con approssimazioni grossolane, un flusso che si comporta diversamente da come i risultati sperimentali ci indicano; ad esempio se si decide di trascurare il campo magnetico indotto, l'unico processo accelerativo è quello relativo all'espansione del gas, oppure se si decide di trascurare l'effetto Hall in un propulsore HET anche qui l'effetto di accelerazione del plasma svanisce. E' da notare che questo effetto è di norma invece trascurabile in moltissimi altri plasmi, come può esserlo il campo magnetico indotto quando le correnti totali sono molto piccole. Una simulazione, per essere corretta, deve avere presente quali sono i fenomeni che sono coinvolti nel processo e quali di essi vogliono essere indagati. Infatti a causa delle diverse scale temporali coinvolte nella dinamica dei plasmi risulterebbe, se non impossibile, perlomeno molto dispendioso dal punto di vista computazionale indagarli tutti. E' perciò necessario effettuare una scelta, questa a sua volta determinerà anche il metodo

matematico più adatto che verrà poi utilizzato. E' consuetudine passare da modelli di tipo particellare a modelli di tipo fluido all'aumentare della scala temporale; seguendo questo principio, ci si è attestati in questo studio su un modello di tipo ibrido che descrive gli ioni come particelle e gli elettroni come un fluido, scelta consigliata, inoltre, dal numero elevato di urti che gli elettroni sperimentano in un passo temporale a causa della loro ridotta massa e quindi più elevata mobilità. Si riportano di seguito le diverse scale temporali dei fenomeni più tipici che avvengono in un plasma.

$$\omega_{pe} = \left( \frac{n_e \cdot e^2}{m_e \cdot \epsilon_0} \right)^{1/2} = 56.5 \cdot n_e^{1/2} = \text{frequenza elettronica del plasma} \quad (5.1)$$

$$\omega_{pi} = \left( \frac{n_i \cdot e^2 \cdot Z^2}{m_i \cdot \epsilon_0} \right)^{1/2} = \text{frequenza ionica del plasma} \quad (5.2)$$

$$\omega_{ce} = \frac{e \cdot B}{m_e} = 1.76 \cdot 10^{11} \cdot B = \text{frequenza di ciclotrone degli elettroni} \quad (5.3)$$

$$\omega_{ci} = \frac{Z \cdot e \cdot B}{m_i} = \text{frequenza di ciclotrone degli ioni} \quad (5.4)$$

## 5.2 Il codice ibrido

Il codice ibrido qui adottato è tradizionalmente chiamato magnetoinduttivo; data la particolare geometria del problema è stata sufficiente una implementazione in 2D, ma non è comunque stata trascurata la terza componente della velocità ritenendola utile per un'adeguata descrizione del processo accelerativo e del processo di confinamento dovuto all'interazione di una corrente tangenziale con un campo magnetico assiale. La parte che si occupa della descrizione del moto degli ioni trae spunto da un codice già presente al Centrosazio denominato PICPlus. La metodologia *particle- in- cell* ha raggiunto un buon grado di

sviluppo ed è stata utilizzata in passato con successo in diverse simulazioni, in particolare il PICPlus è stato realizzato con lo scopo di predire l'evoluzione del getto in uscita da un propulsore ad effetto Hall; sono stati quindi apportati numerosi cambiamenti per adottarlo allo scopo; in seguito verrà descritto nel particolare questa nuova versione.

### **5.2.1 Struttura del codice magnetoiduttivo**

In questo lavoro sono stati sviluppati due diversi codici per l'analisi del motore; questa scelta è stata dettata da criteri di semplicità, si è cioè ritenuto opportuno utilizzare l'algoritmo che meglio si adattava alla situazione in esame. Si è quindi suddiviso lo spazio della simulazione in due zone una interna al motore e una esterna; si può osservare come le strutture degli algoritmi siano molto simili, questo ha fornito la possibilità di svilupparli entrambi in un unico lavoro. Si riportano di seguito in forma di diagramma di flusso le strutture generali degli schemi adottati.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

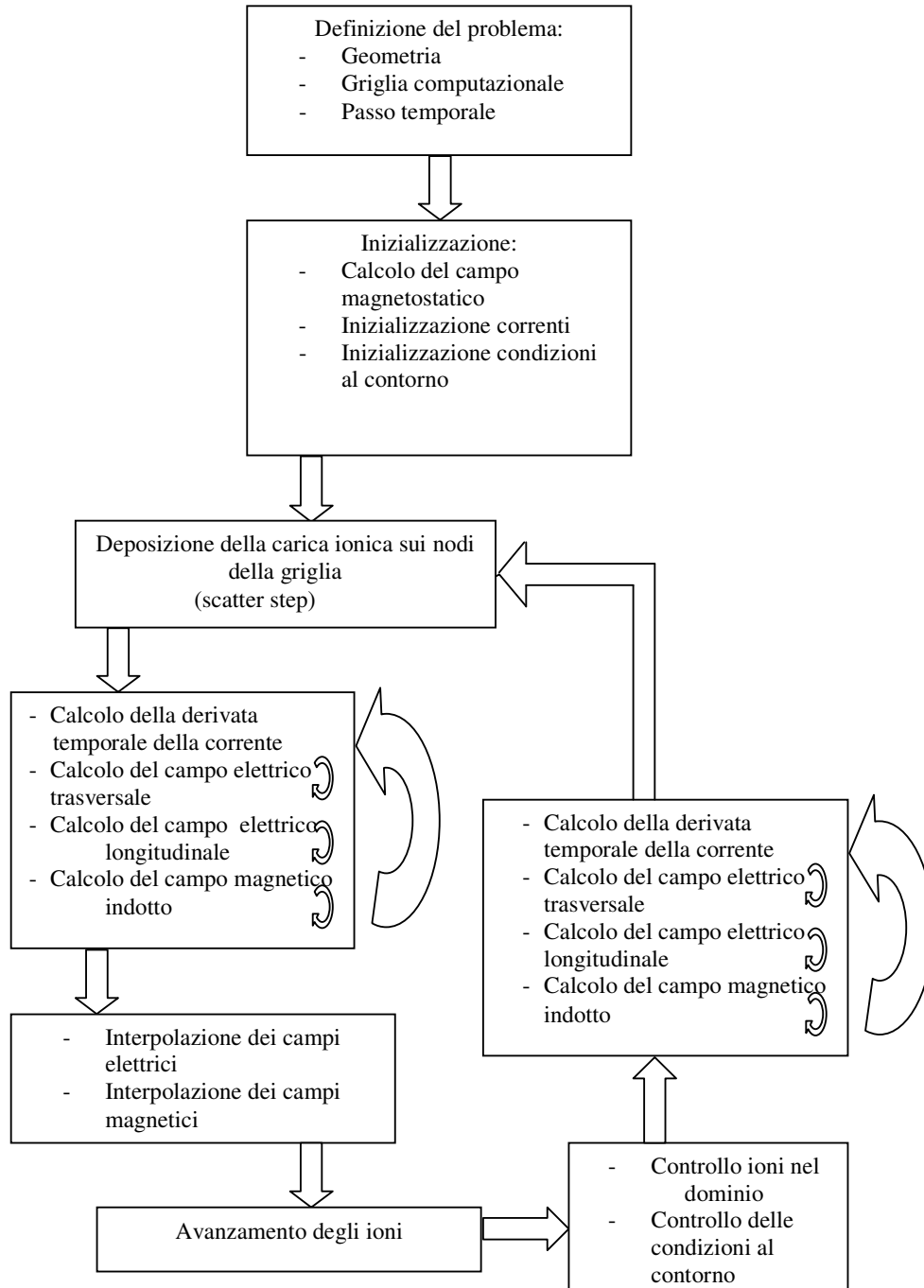


Figura 5.1 Diagramma di flusso per la simulazione all'interno del propulsore

*Il codice ibrido*

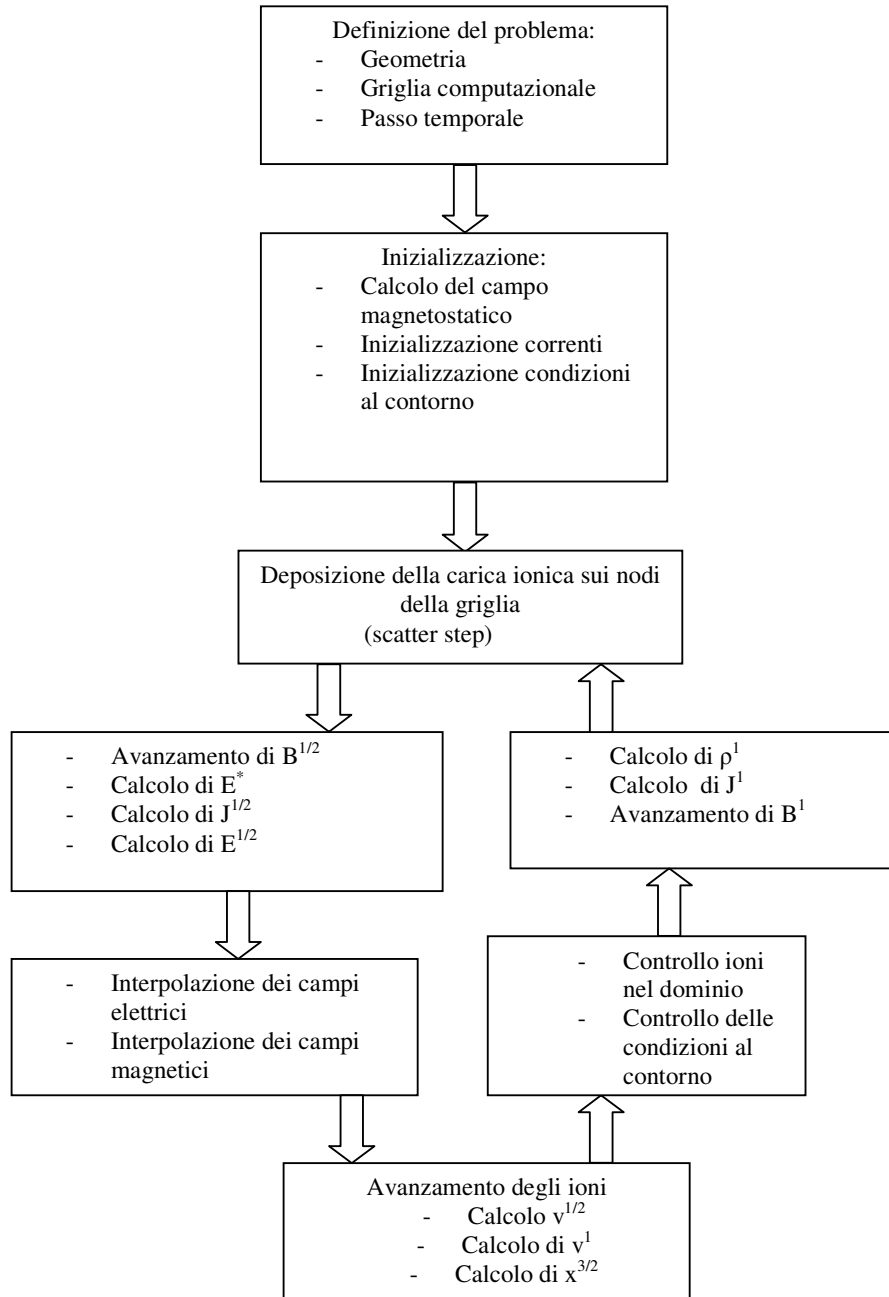


Figura 5.2 Diagramma di flusso per la simulazione nello spazio esterno al propulsore

### **5.3 Geometria**

Sebbene possa sembrare che la geometria del problema non comporti alcuna decisione ci si trova anche in questo caso davanti ad alcune scelte; infatti mentre la geometria del motore è definita per quanto riguarda lo spazio esterno, la scelta rimane vincolata da decisioni di tipo fenomenologico, ovvero cosa si è interessati a simulare, e da decisioni di carattere pratico; è infatti opportuno tenere sempre in considerazione il tempo di calcolo: a spazi di simulazione più grandi corrispondono tempi di calcolo altrettanto lunghi e di conseguenza diverrebbe inutile avere un codice che impiega tempi enormi per fornire risultati. La scelta fatta in questo lavoro è di affrontare il problema in maniera bidimensionale sfruttando l'assialsimmetria, inoltre è stata scelta di simulare lo spazio esterno al motore e il propulsore in due momenti distinti con due griglie separate. Le motivazioni sono molteplici, dettate da un principio di guadagno in termini temporali e di semplicità di implementazione. Infatti i due processi di accelerazione e scarica all'interno del motore e di espansione e ricombinazione all'esterno sono più facilmente simulabili attraverso due codici diversi, la diversità, che verrà spiegata meglio in seguito, risiede principalmente nella soluzione delle equazioni di Maxwell e nella modellazione di catodo e anodo non presenti all'esterno, inoltre il codice utilizzato all'interno è privo dei termini di ricombinazione; questo è stato fatto per non appesantire troppo la simulazione all'interno del motore già molto complessa. Per le condizioni di ingresso nella parte esterna al motore si potranno utilizzare sia i risultati dati dal codice che risultati di tipo sperimentale. Si riportano una figura del motore originale e di quello modificato per la costruzione della griglia:



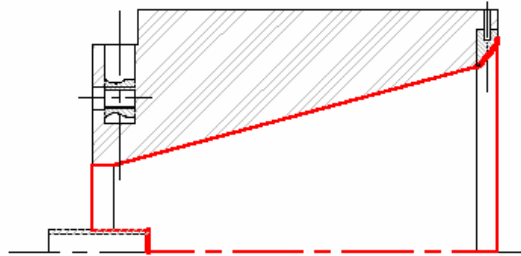


Figura 5.3 sezione del motore MPD utilizzato nella simulazione

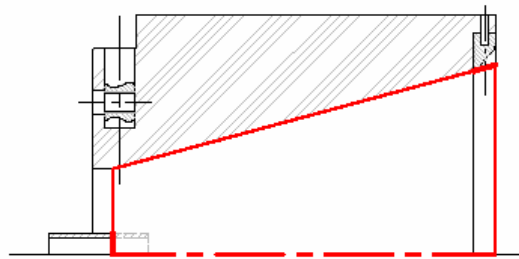


Figura 5.4 sezione del motore MPD con semplificazioni per costruzione della griglia

## 5.4 Generazione della griglia

La geometria dovrebbe rappresentare quanto più possibile la realtà, l'ottenimento di questo risultato è però limitato dal tipo di griglia che si vuole utilizzare. Esistono fondamentalmente due tipi di griglia in letteratura: griglie strutturate e griglie non strutturate; le seconde sono per loro natura le più adatte a modellare contorni anche difficili e spazi complessi, sono inoltre di solito accompagnate da metodologie numeriche di tipo agli elementi finiti, mentre le prime sono di solito utilizzate con discretizzazioni alle differenze finite. Poiché sicuramente le seconde sono più complesse ed inoltre in lavori simili precedenti sviluppati al Centrosazio sono state utilizzate griglie strutturate e differenze finite, anche in

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

questo lavoro si è seguita questa strada. Un altro aspetto importante o addirittura fondamentale per un corretto approccio alla simulazione è la dimensione della maglia di griglia; infatti è noto che le azioni che avvengono all'interno di un plasma lo portano ad essere non neutro solo all'interno di una sfera il cui raggio equivale alla lunghezza di Debye locale:

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \cdot K_B \cdot T}{q^2 \cdot n}} \quad (5.5)$$

Questa lunghezza è caratteristica del tipo di plasma ovvero è sempre quasi uguale a seconda del plasma che si sta indagando, più in generale si possono definire delle grandezze caratteristiche per vari tipi di plasma.

*Il codice ibrido*

Plasma	$n_0$ ( $m^3$ )	T (eV)	$\omega_{pe}$ ( $sec^{-1}$ )	$\lambda_d$ (m)	$n_0 \lambda_d^3$
Gas interstellare	$10^6$	$10^{-1}$	$6 \cdot 10^4$	1	$10^6$
Corona solare	$10^{12}$	$10^2$	$6 \cdot 10^7$	$10^{-1}$	$10^9$
Atmosfera solare	$10^{20}$	1	$6 \cdot 10^{11}$	$10^{-6}$	$10^2$
Ionosfera	$10^{12}$	$10^{-1}$	$6 \cdot 10^7$	$10^{-3}$	$10^4$
Plasma caldo denso	$10^{20}$	$10^2$	$6 \cdot 10^{11}$	$10^{-5}$	$10^5$
Plasma caldo rarefatto	$10^{18}$	$10^2$	$6 \cdot 10^{10}$	$10^{-4}$	$10^6$
Plasma caldo	$10^{22}$	$10^2$	$6 \cdot 10^{12}$	$10^{-6}$	$10^4$
Plasma termonucleare	$10^{22}$	$10^4$	$6 \cdot 10^{12}$	$10^{-5}$	$10^7$
Scarica	$10^{20}$	1	$6 \cdot 10^{11}$	$10^{-6}$	$10^2$
Gas interplanetario	$10^8$	1	$6 \cdot 10^5$	1	$10^8$

Tabella 5.1 Grandezze caratteristiche incontrate nell'analisi di vari tipi di plasma

Nel motore MPD ci sono tipicamente densità elevate rispetto ad esempio ad un motore ad effetto Hall e temperature comprese fra 1-4 [eV] . Queste grandezze

portano ad avere lunghezze di Debye circa di 1  $\mu\text{m}$  ad esempio in prossimità del catodo dove la densità è maggiore ( $10^{20} - 10^{22}$  particelle/ $\text{m}^3$ ), non è pertanto possibile utilizzare maglie di queste dimensioni. Di conseguenza risultano di difficile implementazione codici che risolvono l'equazione di Poisson poiché necessitano della differenza di densità fra specie ioniche ed elettroniche; tale differenza, se misurata in due punti e di fatto interpolata linearmente come di solito avviene in un codice di questo tipo, potrebbe portare a degli errori di valutazione. Attraverso l'implementazione di un codice magnetoinduttivo questo problema viene aggirato ed è possibile quindi utilizzare dimensioni di maglia notevolmente più grandi. Un'ultima osservazione riguarda l'aumento delle dimensioni di griglia spostandosi verso zone a densità minore, questa procedura era già presente in lavori precedenti che utilizzavano l'equazione di Poisson per il calcolo del campo elettrico, una tale griglia viene denominata adattiva ; i dati di partenza sono le densità sulla bocca del catodo e alla fine della zona di simulazione oltre alla lunghezza totale nelle due direzioni r e z del campo, quindi risultano noti il primo e l'ultimo elemento delle progressioni, quello che si cerca sono le ragioni  $\alpha$  e  $\beta$  e il numero degli elementi delle progressioni  $N_r$  e  $N_z$ , traducendo in formule:

$$L_r = \sum_{j=1}^{N_r} \Delta r_j = \Delta r_1 \frac{1 - \alpha^{N_r}}{1 - \alpha} \quad (5.6)$$

$$\Delta r_{N_r} = \Delta r_1 \alpha^{N_r - 1} \quad (5.7)$$

Per la direzione radiale ed:

$$L_z = \sum_{k=1}^{N_z} \Delta z_k = \Delta z_1 \frac{1 - \beta^{N_z}}{1 - \beta} \quad (5.8)$$

$$\Delta z_{N_z} = \Delta z_1 \beta^{N_z - 1} \quad (5.9)$$

*Il codice ibrido*

Per la direzione assiale. Fortunatamente si è osservato che queste successioni hanno una soluzione che è stata implementata nel caso si volesse fare uso di questa tecnica:

$$N_r = \frac{\log(\Delta r_{N_r} / \Delta r_1)}{\log(\Delta r_1 / N_r \cdot (\Delta r_{N_r} / \Delta r_1 - 1) + 1)} \quad (5.10)$$

$$N_z = \frac{\log(\Delta z_{N_z} / \Delta z_1)}{\log(\Delta z_1 / N_z \cdot (\Delta z_{N_z} / \Delta z_1 - 1) + 1)} \quad (5.11)$$

$$\alpha = (\Delta r_{N_r} / \Delta r_1)^{1/(N_r-1)} \quad (5.12)$$

$$\beta = (\Delta z_{N_z} / \Delta z_1)^{1/(N_z-1)} \quad (5.13)$$

Qui è stato deciso di non avvalersene pertanto le dimensioni della maglia risultano uguali in ogni zona del campo. In definitiva la distanza fra i nodi è stata scelta per effettuare il calcolo in tempi relativamente brevi considerando anche che il passo temporale è una funzione di quest'ultima .

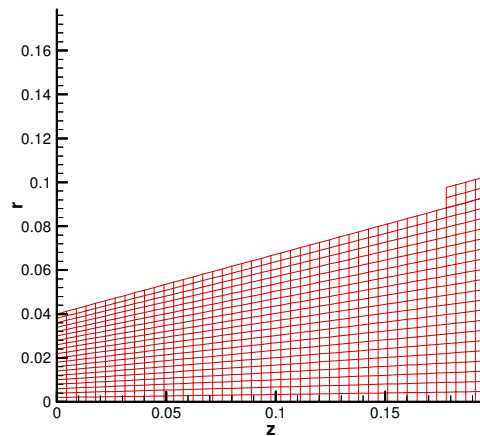


Figura 5.5 griglia computazionale all' interno del propulsore

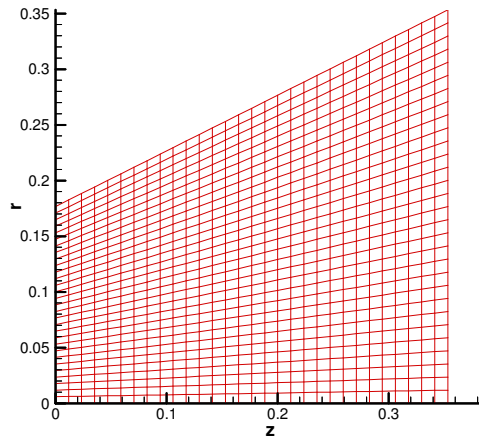


Figura 5.6 Griglia computazionale all'esterno di propulsore

## 5.5 Passo temporale

La determinazione del passo temporale più opportuno da utilizzare è stato uno dei problemi più difficili da risolvere in quanto da esso dipende non solo il numero dei nodi, ma anche gli effetti di cui vogliamo tener conto sono vincolati a questa scelta. Per quanto riguarda il primo punto è da osservare che si vuole che ogni particella non attraversi più di una cella per passo, quindi se si infittisce la griglia è norma anche diminuire il passo temporale, i tempi di calcolo aumentano perciò doppiamente. In un plasma sono coinvolti una molteplicità di fenomeni ognuno con la sua caratteristica scala temporale; sfortunatamente queste scale sono di molti ordini di grandezza diverse fra di loro; è quindi necessario effettuare una scelta: di solito il fenomeno che avviene più velocemente deve essere 0.1 volte più lento del passo di integrazione da noi scelto, così facendo si perderanno fenomeni con frequenze più alte e fenomeni con frequenze molto basse, gli uni saranno già giunti all'equilibrio in un passo mentre gli altri non porteranno alcun effetto considerevole per l'intera durata della nostra simulazione. Infine è utile definire il numero di Courant per il problema in questione:

*Il codice ibrido*

$$cfl = a / (\Delta x / \Delta t) \quad (5.14)$$

Questo è una quantità dimensionale e può essere interpretato come il rapporto tra due velocità la velocità di propagazione delle informazioni e la velocità di griglia definita dalla discretizzazione del dominio. Nel caso di un plasma si pone spesso:

$$a = V_a \quad (5.15)$$

Dove  $V_a$  è la velocità di Alfvén definita a sua volta da:

$$V_a = \frac{B_0}{(\mu_0 \cdot \rho)^{0.5}} \quad (5.16)$$

la condizione di Courant si trasforma in:

$$\Delta t \leq cfl \cdot \Delta x / V_a \quad (5.17)$$

dove con  $\Delta x$  si intende una generica distanza tra due punti di griglia.

Scegliendo un numero compreso tra 0-1 per il CFL e valori per il campo magnetico e densità tipici di un motore MPD risulta:

$$\Delta t \leq 10^{-9} \text{ [s]} \quad (5.18)$$

Questo è il passo temporale che sarebbe più opportuno utilizzare nelle simulazioni.

## **5.6 Campo magnetostatico**

In un propulsore MPD il campo magnetico svolge un ruolo fondamentale; classicamente questi motori sono stati concepiti per funzionare grazie al campo magnetico indotto dovuto alle elevate correnti che scorrono all'interno della camera, successivamente si è pensato di introdurre campi magnetici esterni con lo

scopo di contenere il plasma in una zona più ristretta per evitare un contatto con le pareti troppo elevato, e di fornire ulteriori contributi alla generazione della spinta. Nel motore oggetto dello studio il campo è generato da una serie di avvolgimenti, si può evidenziare come questo sia simile al campo generato da una singola spira posta nella mezzeria della bobina e percorsa dalla corrente totale che scorre nella bobina. In questa tesi si è sviluppata la suddetta procedura mentre il campo magnetostatico generato dalla bobina è stato calcolato dal Consorzio RFX di Padova. Illustriamo di seguito il metodo numerico utilizzato e le differenze fra i due modelli. In ognuno dei modelli si fa uso della legge di Biot-Savart per l'induzione magnetica:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \quad (5.19)$$

Consideriamo una spira di raggio  $\bar{a}$  contenuta nel piano xy, per ragioni di simmetria il campo sull'asse può avere solo componente lungo z, in questo caso:

$$dl = a \cdot d\phi \quad (5.20)$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot a}{R^3} \cdot d\phi \cdot \frac{a}{R} \quad (5.21)$$

ponendo  $R^2 = a^2 + z^2$  e integrando:

$$B_z = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2}{2 \cdot (a^2 + z^2)^{(3/2)}} \quad (5.22)$$



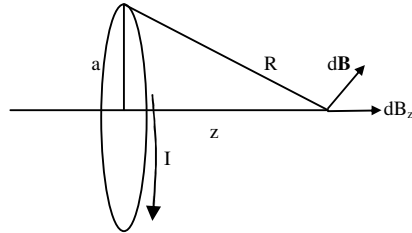


Figura 5.7 Determinazione del campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente sul proprio asse.

Per determinare il campo  $\vec{B}$  in un punto  $\vec{r}$  qualsiasi è sufficiente definire  $\vec{R}$  in modo corretto, dovendo inoltre il campo essere simmetrico possiamo scegliere come asse x la retta perpendicolare all'asse z che passa nel punto in cui si vuole calcolare il campo:

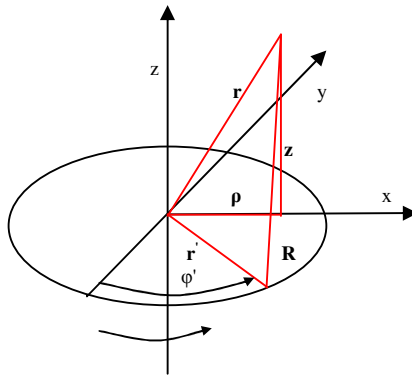


Figura 5.8 Determinazione del campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente in un punto generico al di fuori dell'asse.

$$d\vec{l} = ad\phi'(-\sin\phi'\vec{i} + \cos\phi'\vec{j}) \quad (5.24)$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (5.25)$$

$$\vec{r}' = a(\cos \phi' \vec{i} + \sin \phi' \vec{j}) \quad (5.26)$$

$$\vec{r} = \rho \vec{i} + z \vec{k} \quad (5.27)$$

Si può pertanto scrivere, con riferimento alla figura:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot \vec{I} \cdot a}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z(\cos \phi' \vec{i} + \sin \phi' \vec{j}) + (a - \rho \cos \phi') \vec{k}}{(a^2 + z^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} d\phi' \quad (5.28)$$

Essendo gli estremi di integrazione simmetrici:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot \vec{I} \cdot a}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{z \cos \phi' \vec{i} + (a - \rho \cos \phi') \vec{k}}{(a^2 + z^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} d\phi' \quad (5.29)$$

Questa integrazione deve essere effettuata numericamente. Nel presente lavoro sono state utilizzate le formule newtoniane composte ovvero si è ottenuta l'integrazione numerica attraverso l'uso ripetuto di formule di quadratura interpolatorie con  $n \leq 7$  dove  $n$  è il numero dei nodi, questo perché con  $n \geq 8$  i pesi possono essere anche negativi e al crescere di  $n$  non verificano più la condizione che la serie dei pesi sia assolutamente convergente. In questo caso dividendo l'intervallo  $[a, b]$  in  $N$  sottointervalli e ponendo  $n=2$  si ottiene la formula di Cavalieri-Simpson:

$$J = \frac{b-a}{6N} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + 4 \sum_{j=0}^{N-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + f(x_n) \right] \quad (5.30)$$

con resto dato da:

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880 \cdot N^4} f^4(x_i) \quad (5.31)$$

E' interessante vedere la differenza fra i due approcci al problema, infatti i tempi di calcolo necessari per la determinazione del campo magnetico sono molto

diversi (la spira è un modello più semplice), perché nonostante il campo venga calcolato solamente una volta prima del ciclo iterativo, non sono da escludersi sviluppi futuri nei quali il campo esterno venga variato durante il funzionamento del motore così da valutare altri possibili effetti, in questa ottica una notevole riduzione dei tempi di calcolo sarebbe possibile oltre che auspicabile. Si può notare che la differenza di campo misurata in termini percentuali sia molto piccola sia per  $B_z$  che per  $B_r$ , infatti gli errori massimi sono in tutti i casi al di sotto del 10% sia dentro che fuori dal motore.

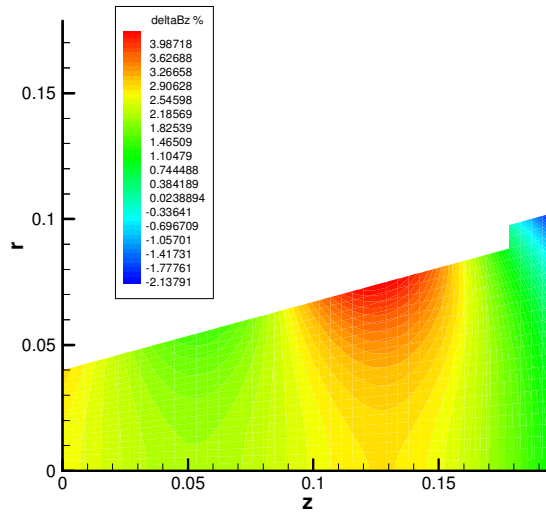


Figura 5.9 Differenza fra il campo assiale generato da una spira e da una bobina. Propulsore.

$$\left( B_{zavv} - B_{zspira} \right) / B_{zavv}$$

Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato

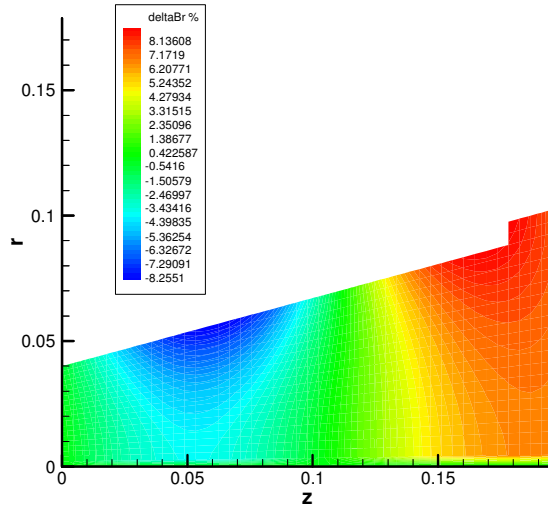


Figura 5.10 Differenza fra il campo radiale generato da una spira e da una bobina. Propulsore.

$$(B_{r_{avv}} - B_{r_{spira}}) / B_{r_{avv}}$$

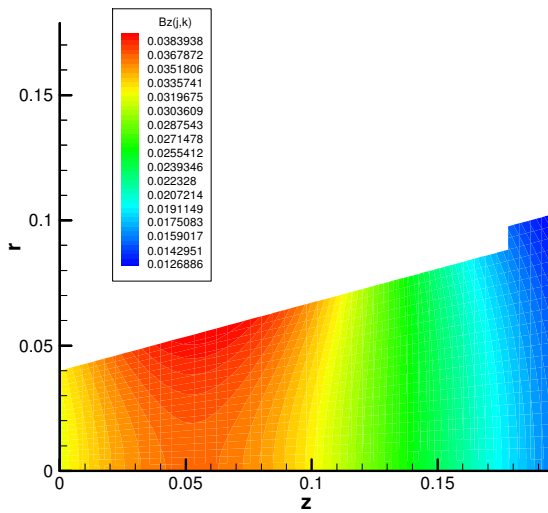


Figura 5.11 Campo magnetico assiale generato da una bobina  $B_z$ . Propulsore.

Il codice ibrido

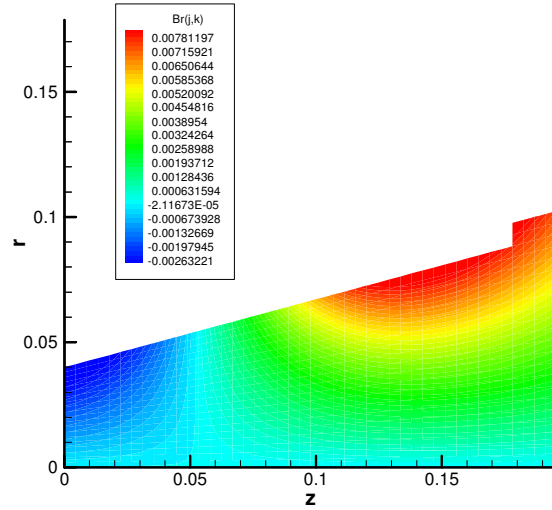


Figura 5.12 Campo magnetico radiale generato da una bobina  $B_r$ . Propulsore.

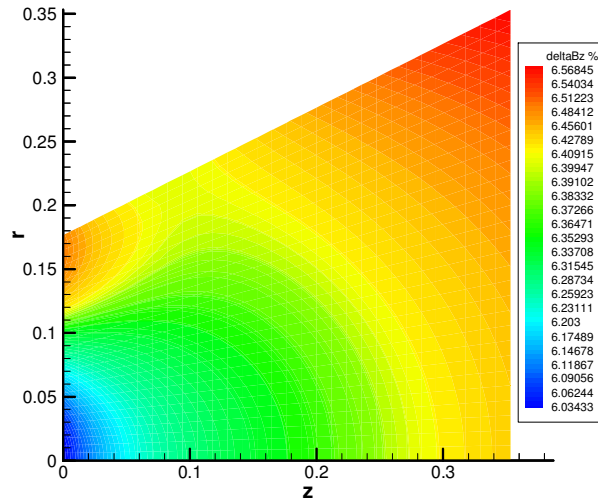


Figura 5.13 Differenza fra il campo assiale generato da una spira e da una bobina. Esterno.

$$\left( B_{z\text{avv}} - B_{z\text{spira}} \right) / B_{z\text{avv}}$$

Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato

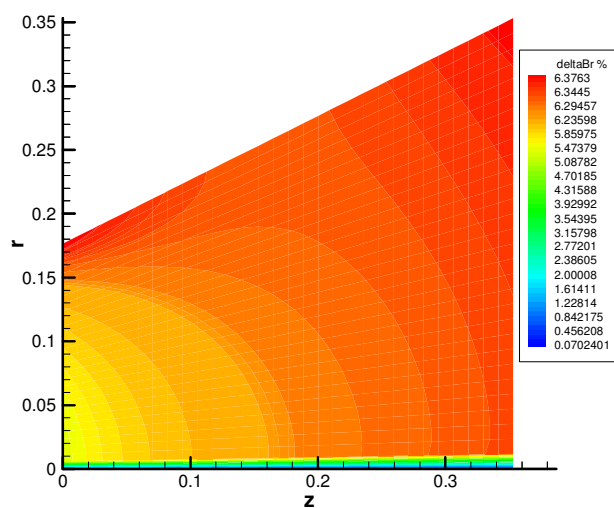


Figura 5.14 Differenza fra il campo radiale generato da una spira e da una bobina. Esterno.

$$(B_{ravv} - B_{rspira}) / B_{ravv}$$

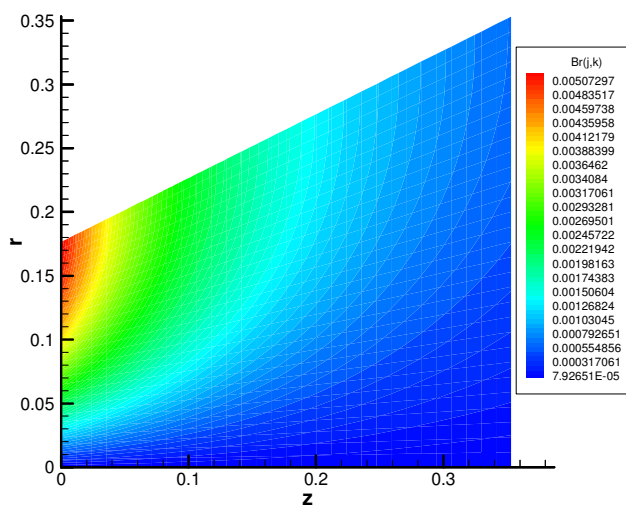


Figura 5.15 Campo magnetico radiale generato da una bobina  $B_r$ . Esterno

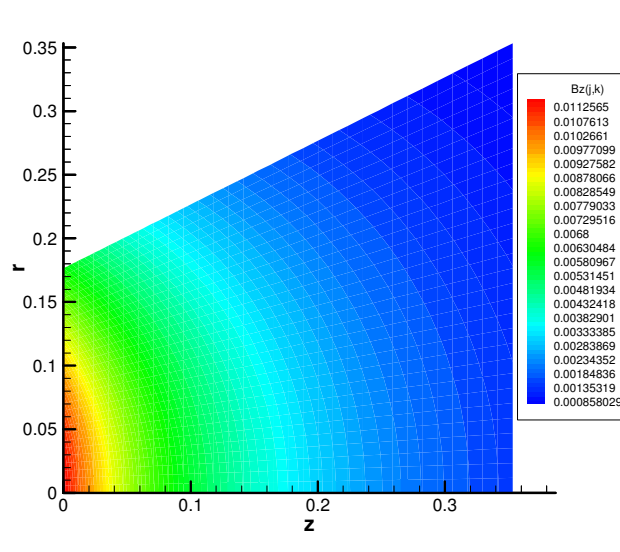


Figura 5.16 Campo magnetico assiale generato da una bobina  $B_z$ . Esterno

## 5.7 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno utilizzate nelle due simulazioni sono diverse. Si discuteranno prima le condizioni al contorno per l'interno del motore e poi quelle per l'esterno evidenziando eventualmente differenze ed analogie. Le condizioni all'inizio della simulazione sono date sul potenziale alle pareti, su catodo anodo e sull'asse di simmetria e sono le seguenti:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad \text{sull'asse di simmetria}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sulle pareti}$$

$$\phi = 80 \text{ [V]} \quad \text{anodo}$$

$$\phi = 30 \text{ [V]} \quad \text{catodo}$$

Il potenziale di anodo e catodo sono forniti all'inizio della simulazione, i potenziali dell'anodo e della parete vengono aggiustati quando il plasma lambisce la parete a causa della formazione della guaina, mentre al catodo rimane fisso con valore determinato sperimentalmente. Quando un corpo sia esso conduttore o isolante è immerso in un plasma assume una carica netta negativa e quindi un potenziale negativo rispetto al potenziale di plasma. Nella regione vicino al corpo che prende il nome di guaina il numero di elettroni e di ioni è diverso. Dentro la guaina il potenziale cresce monotonicamente da un valore negativo sulla parete al valore corrispondente al plasma non perturbato dal muro. Lo spessore della guaina dove ci sono variazioni rispetto alla neutralità si vede essere dell'ordine della lunghezza di Debye locale. Il problema è fortemente dipendente dalla geometria della parete, ma una trattazione semplificata porta a risultati non tanto diversi. Le particelle cariche che in virtù del loro moto di agitazione termica colpiscono il muro sono per la maggior parte perse. Gli ioni generalmente si ricombinano e tornano al plasma come particelle neutre mentre gli elettroni possono sia ricombinarsi che entrare nella banda di conduzione se la superficie è un metallo, questo è il caso degli elettrodi. Il flusso di particelle ovvero il numero di particelle che colpisce la superficie per unità di area e per unità di tempo per il caso di una funzione di distribuzione di velocità isotropica è dato da:

$$\Gamma_{\alpha} = n_{\alpha} \langle v \rangle_{\alpha} / 4 \quad (5.32)$$

dove  $\langle v \rangle_{\alpha}$  è la velocità media della specie  $\alpha$ . Per la distribuzione di Maxwell-Boltzmann :

$$\langle v \rangle_{\alpha} = (8/\pi)^{1/2} (kT_{\alpha} / m_{\alpha})^{1/2} \quad (5.33)$$

E quindi:

$$\Gamma_{\alpha} = n_{\alpha} (kT_{\alpha} / 2\pi m_{\alpha})^{1/2} \quad (5.34)$$



E' evidente che se inizialmente il numero di ioni ed elettroni è uguale il flusso di elettroni è molto maggiore di quello di ioni e perciò la parete a contatto con il plasma rapidamente acquisisce una carica negativa, a questo punto il potenziale negativo respinge gli elettroni ed attira gli ioni, all'equilibrio la corrente netta sarà uguale a zero a meno che gli elettroni non vengano assorbiti come nell'anodo, in tal caso si raggiungerà comunque un equilibrio ma la corrente non sarà più nulla. Per stimare il potenziale alla parete dopo che la guaina si è formata possiamo considerare una situazione stazionaria chiamando il potenziale alla parete  $\phi_w$  e il potenziale del plasma lontano dalla parete  $\phi_p$ , assumiamo che gli elettroni e gli ioni siano in equilibrio termodinamico alla temperatura T, possiamo scrivere le densità elettroniche e ioniche come :

$$n_e(\mathbf{r}) = n_0 \cdot e^{-\frac{q\phi(\mathbf{r})}{kT}} \quad (5.35)$$

$$n_i(\mathbf{r}) = n_0 \cdot e^{\frac{q\phi(\mathbf{r})}{kT}} \quad (5.36)$$

Una delle condizioni al contorno del problema è che in condizioni di equilibrio non ci deve essere carica accumulata alla parete, quindi:

$$J_e(0) = J_i(0) \quad (5.37)$$

Dalle relazioni precedenti considerando solo ioni con carica +1:

$$(1/m_e)^{1/2} e^{-\frac{q\phi_w}{kT}} = (1/m_i)^{1/2} e^{\frac{q\phi_w}{kT}} \quad (5.38)$$

Rielaborando:

$$e^{-\frac{2q\phi_w}{kT}} = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \quad (5.39)$$

Risolvendo infine per il potenziale alla parete:

$$\phi_w = -\frac{kT}{4q} \ln(m_i / m_e) \quad (5.40)$$

Nel caso più complesso dell'anodo si può scrivere facendo l'ipotesi di non collisionalità che la corrente che scorre sia data da:

$$I_a = A_a q n_e \left[ e^{\frac{q\phi_a}{kT} \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}}} - e^{-1/2 \sqrt{\frac{kT}{m_i}}} \right] \quad (5.41)$$

Dove  $\phi_a$  è la caduta di potenziale sull'anodo, risolvendo per quest'ultima:

$$\phi_a = \frac{kT}{q} \ln \left[ \frac{I_a}{A_a q n_e \sqrt{\frac{kT}{2\pi m_e}}} + e^{-1/2 \sqrt{\frac{2\pi m_e}{m_i}}} \right] \quad (5.42)$$

Il potenziale all'anodo risulterà quindi :

$$\phi_{anode} = V_d - \phi_a \quad (5.43)$$

Dove  $V_d$  è il potenziale di scarica imposto al motore.

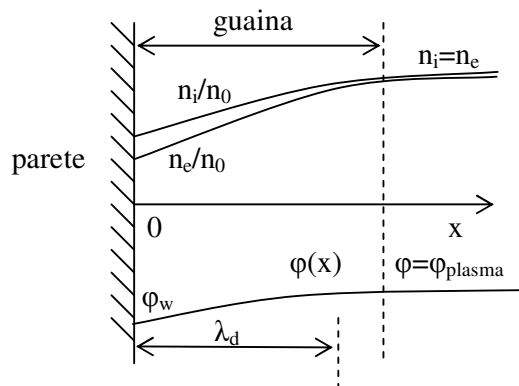


Figura 5.17 Formazione della guaina di plasma per la presenza di una parete

La simulazione trascura la modellazione della guaina per due motivi: primo perché richiederebbe distanze nodali troppo piccole secondo perché una trattazione di questo tipo richiederebbe di abbandonare il modello di quasi neutralità ovvero di rivedere il codice; perciò si è scelto come già altri lavori in precedenza di tener conto solamente degli effetti di questo fenomeno evitando di simularlo, l'effetto è cioè introdotto in forma di condizione al contorno sul potenziale. Per quanto riguarda lo spazio esterno al propulsore le seguenti condizioni al contorno sono state adottate:

$$\left. \begin{array}{l} E_z \\ E_r \end{array} \right\} \text{ Su tutto il dominio dalla soluzione del} \\ \text{ campo potenziale all'inizio della} \\ \text{ simulazione}$$

$$\left. \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_r = 0 \end{array} \right\} \text{ Su tutte le altre superfici}$$

$$B_\theta = 0 \quad \text{Ovunque}$$

$$\left. \begin{array}{l} B_z \\ B_r \end{array} \right\} \text{ campo magnetostatico esterno}$$

## **5.8 Sommario**

In questo capitolo sono stati descritti i codici adottati nelle linee generali, per l'interno e l'esterno del propulsore MPD con campo magnetico applicato. Si è

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

ritenuto opportuno separare le due zone per motivi fenomenologici, riducendo così i tempi di calcolo, si è ritenuto inoltre di descrivere la dinamica del processo di accelerazione in entrambi i casi attraverso un codice ibrido che trattasse gli ioni come particelle e gli elettroni come un fluido; i codici sfruttano l'assialsimmetria del problema pur non trascurando la terza componente della velocità, infine si è ritenuto opportuno ipotizzare la quasi neutralità del plasma, condizione che si verifica in tutta la zona di simulazione eccezion fatta per le pareti e gli elettrodi, queste zone dove ci si aspettava la formazione di una guaina sono state modellate come condizione al contorno. Si è voluto in questo capitolo tralasciare la descrizione dell'inizializzazione dei codici ritenendo che fosse più opportuno affiancarla alla descrizione più particolareggiata che segue.

# Modello fluidodinamico degli elettroni

## 6.1 Introduzione

Ciascuna specie presente nel plasma può essere descritta attraverso delle variabili macroscopiche di interesse fisico come densità numerica, velocità media e temperatura. Queste grandezze possono essere calcolate se si conosce la funzione di distribuzione per il sistema considerato. Generalmente la funzione di distribuzione per un sistema non in equilibrio può essere ottenuta dalla soluzione dell'equazione di Boltzmann, che in ogni caso rappresenta un problema di difficile risoluzione. Fortunatamente è possibile derivare le grandezze macroscopiche di interesse senza risolvere l'equazione di Boltzmann. Queste equazioni differenziali sono note come equazioni di trasporto macroscopiche. Se il plasma è costituito da varie specie come elettroni, ioni, neutri, è possibile definire un sistema di equazioni di trasporto per ognuna di esse, ed è quindi legittima la scelta di utilizzarle per descrivere il moto degli elettroni nel motore.

## 6.2 Equazione generale del trasporto

Le variabili macroscopiche sono legate ai momenti della funzione di distribuzione, e le equazioni di distribuzione soddisfatte da queste variabili possono essere ottenute dai momenti dell'equazione di Boltzmann. I primi tre momenti dell'equazione di Boltzmann si ottengono moltiplicando questa per  $m_\alpha$ ,  $m_\alpha \mathbf{v}$ ,  $m_\alpha v^2/2$ , dove  $\alpha$  identifica la specie, ed integrandola lungo lo spazio delle velocità. Comunque ad ogni passo della gerarchia dei momenti il sistema risultante di equazioni non è completo nel senso che il numero delle equazioni non è sufficiente per determinare tutte le variabili macroscopiche che vi appaiono. E' necessario perciò troncare il sistema a qualche stadio ed introdurre una ipotesi semplificativa che riguarda il più alto momento della funzione di distribuzione. Di tutte le ipotesi semplificative che si fanno, solitamente due sono le più comunemente usate: il modello *plasma freddo* e il modello *plasma caldo*; questi verranno descritti in seguito e in particolare il secondo dei due verrà utilizzato nel codice per l'avanzamento degli elettroni. Consideriamo ora l'equazione di Boltzmann nella forma generale:

$$\partial f / \partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v f = (\partial f / \partial t)_{coll} \quad (6.1)$$

La funzione di distribuzione  $f$  è definita come la densità dei punti rappresentativi delle particelle di una specie nello spazio delle fasi:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = d^6 n(\vec{r}, \vec{v}, t) / (d^3 r \cdot d^3 v) \quad (6.2)$$

Di conseguenza la densità numerica definita come il numero di particelle per unità di volume indipendentemente dalla velocità diventerà:

$$n(\vec{r}, t) = \int_v f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v \quad (6.3)$$

Dove si usa l'operatore nabla per lo spazio e si definisce un operatore nabla nello spazio delle velocità (si suppongono coordinate cartesiane):

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.4)$$

$$\vec{\nabla}_v = \hat{x} \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial v_z} \quad (6.5)$$

Infine  $\vec{a} = \vec{F} / m$  è l'accelerazione delle particelle e  $m$  la loro massa.

Per ottenere un'equazione di trasporto generale moltiplichiamo  $f$  per una proprietà fisica generica  $\chi(\vec{v})$  ed integriamo il prodotto lungo lo spazio delle velocità:

$$\int_v \chi (\partial f / \partial t) d^3 v + \int_v (\chi \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f) d^3 v + \int_v (\chi \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v f) d^3 v = \int_v \chi (\partial f / \partial t)_{coll} d^3 v \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \chi \rangle) + \vec{\nabla} \cdot (n \langle \chi \vec{v} \rangle) - n \langle \vec{a} \cdot \vec{\nabla}_v \chi \rangle = \left[ \frac{\delta}{\delta t} (n \langle \chi \rangle) \right]_{coll} \quad (6.7)$$

Dove il termine alla destra dell'uguale rappresenta la variazione temporale della quantità  $\chi$  per unità di volume dovuta alle collisioni; mentre il valore medio di  $\chi(\vec{r}, \vec{v}, t)$  è definito tramite:

$$\langle \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int_v \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v \quad (6.8)$$

### 6.3 Conservazione della massa

L'equazione di continuità può essere ottenuta dall'equazione generale del trasporto ponendo  $\chi=m$ , quindi:

$$\langle \chi \rangle = m \quad (6.9)$$

$$\langle \chi \vec{v} \rangle = m \langle \vec{v} \rangle = m \vec{u} \quad (6.10)$$

$$\vec{\nabla}_v \chi = \vec{\nabla}_v m = 0 \quad (6.11)$$

La sostituzione di questi risultati nell'equazione generale ci dà la conservazione della massa:

$$\partial \rho_m / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}) = S \quad (6.12)$$

Dove  $\rho = n \cdot m$  rappresenta la densità di massa e S il termine di collisione definito da:

$$S \equiv m \int_v (\delta f / \delta t)_{coll} d^3v = (\delta \rho_m / \delta t)_{coll} \quad (6.13)$$

Rappresenta il tasso per unità di volume al quale gli elettroni sono prodotti o persi a causa delle collisioni. Contributi a questo termine sono dovuti a ionizzazione, ricombinazione e trasferimento di carica. In assenza di questo termine la massa si conserva cioè:

$$\partial \rho_m / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}) = 0 \quad (6.14)$$

L'equazione di conservazione della carica elettrica si ottiene moltiplicando l'equazione di conservazione per la carica q e dividendo per m:

$$\partial \rho / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}) = 0 \quad (6.15)$$

Dove  $\rho = n \cdot q$  è la densità di carica e  $\vec{J} = \rho \cdot \vec{u}$  è la densità di corrente elettronica.

### **6.3.1 Il termine collisionale**

Il termine collisionale rappresenta la produzione o perdita di elettroni nel plasma. Questo processo è solitamente legato a collisioni anelastiche, come quelle che coinvolgono, ad esempio, ionizzazione e ricombinazione. L'effetto della ionizzazione può essere introdotto attraverso un coefficiente  $k_i$  di modo che il



### Modello fluidodinamico degli elettroni

numero degli elettroni prodotti per unità di tempo sia dato da  $k_i n_e$ . Un processo importante che porta alla perdita di elettroni e ioni in un plasma è la ricombinazione ioni-elettroni. Chiamando con  $k_r$  il coefficiente di ricombinazione, il termine di perdita degli elettroni può essere scritto come  $k_r n_e^2$ . In definitiva possiamo quindi scrivere il termine collisionale S:

$$S_e = m_e (k_i n_e - k_r n_e^2) \quad (6.16)$$

$$k_r = 1.09 \cdot 10^{-20} \cdot n_e \cdot T_e^{-9/2} \quad (6.17)$$

$$k_i = n_n \cdot \sqrt{\frac{8KT}{\pi m_e}} Q_{ion} \quad (6.18)$$

Con  $Q_{ion}$  sezione d'urto che rappresenta il numero degli urti per  $[m^3]$  che si accompagnano al fenomeno della ionizzazione ogni secondo ed ha quindi la dimensione di una superficie ed  $n_n$  numero dei neutri. La sezione d'urto è di difficile determinazione per via analitica; si sono quindi utilizzati risultati sperimentali che si riportano nella figura sottostante:

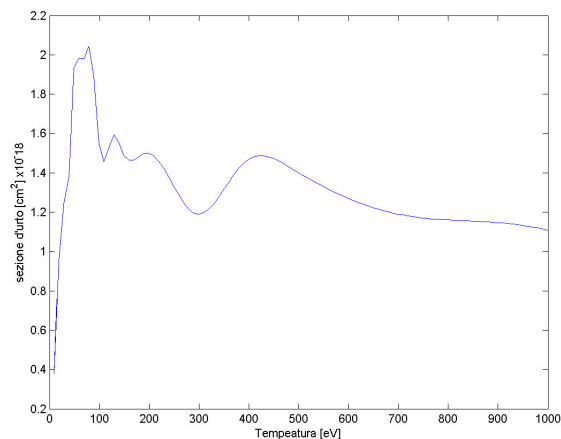


Figura 6.1 Sezione d'urto per il fenomeno della ricombinazione Argon. Dati sperimentali

## 6.4 Conservazione della quantità di moto

Per derivare l'equazione del trasporto della quantità di moto poniamo  $\chi(\vec{v}) = m_e \vec{v}$  nell'equazione generale. Poiché  $\vec{v} = \vec{c} + \vec{u}$  dove  $\vec{c}$  è la velocità di agitazione termica e  $\vec{u}$  è la velocità media macroscopica:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{n_e(\vec{r}, t)} \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (6.19)$$

$$\vec{c} = \vec{v} - \vec{u} \quad (6.20)$$

quindi  $\langle \vec{c} \rangle = 0$  e:

$$\rho_m \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \langle \vec{c} \cdot \vec{c} \rangle) - n_e \langle \vec{F} \rangle = \vec{A} \quad (6.21)$$

E' l'equazione della quantità di moto con  $\vec{A}$  termine collisionale espresso da:

$$\vec{A} \equiv m_e \int \vec{v} \cdot (\delta f / \delta t)_{coll} d^3v = (\delta \rho_m \vec{u} / \delta t)_{coll} \quad (6.22)$$

L'espressione  $\rho_m \langle \vec{c} \cdot \vec{c} \rangle$  equivale al tensore degli sforzi  $\bar{\bar{p}}$ . La pressione di un gas di solito si definisce come la forza per unità di area esercitata dalle molecole di gas attraverso le collisioni con una parete, questa forza equivale al tasso di trasferimento di quantità di moto alla parete; questa definizione si può applicare a qualunque superficie immersa nel gas; generalizzando la possiamo applicare ad ogni superficie fittizia all'interno del gas che si muove con velocità media  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ , la pressione su  $d\vec{S}$  si definisce quindi come il tasso di trasporto di quantità di moto per unità di area dovuto al moto di agitazione termica della specie elettronica, perciò:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_m \langle \vec{c} \cdot \vec{c} \rangle) = \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{p}} \quad (6.23)$$

Si definisce inoltre un' altra importante variabile macroscopica: la pressione scalare come 1/3 della traccia del tensore degli sforzi:

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i,j} p_{ij} \delta_{ij} = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \quad (6.24)$$

$$p = \rho_m \langle c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 \rangle / 3 \quad (6.25)$$

Poiché  $c^2 = c_x^2 + c_y^2 + c_z^2$

$$p = \rho_m \langle c^2 \rangle / 3 \quad (6.26)$$

Rielaborando, utilizzando la derivata totale  $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}$  che corrisponde alla variazione temporale che può essere osservata in un sistema di riferimento che si muove con velocità media  $\vec{u}$ , se si considerano la forza di Lorentz e la forza gravitazionale, la conservazione della quantità di moto si può scrivere:

$$\rho_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{u} \cdot S + \rho_m \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{p}} + n_e \cdot q \cdot (E + \vec{u} \times B) + \vec{A} \quad (6.27)$$

Fisicamente questa equazione esprime che la variazione della quantità di moto è dovuta alle forze applicate, alle forze d'attrito e di pressione e alle forze interne associate alle interazioni collisionali. Il tensore  $\bar{\bar{p}}$  include le forze associate con la pressione scalare e con le forze di attrito tangenziali. Le componenti del tensore sulla diagonale rappresentano la forza normale alla superficie, mentre le altre componenti rappresentano la forza che agisce sulla superficie tangenzialmente. Se si trascurano i termini fuori dalla diagonale del tensore e si fa l'ipotesi che la distribuzione di velocità sia isotropica, i termini sulla diagonale corrispondono alla pressione scalare. Possiamo quindi scrivere:

$$\bar{\bar{p}} = \bar{1} p \quad (6.28)$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\bar{p}} = -\vec{\nabla} p \quad (6.29)$$

Dove  $\vec{\bar{I}}$  è la matrice diagonale unitaria e infine:

$$\rho_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{u} \cdot S + \rho_m \vec{g} - \vec{\nabla} p + n_e \cdot q \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \vec{A} \quad (6.30)$$

### 6.4.1 Il termine collisionale

Il simbolo  $\vec{A}$  denota la variazione di quantità di moto per unità di volume dovuta alle collisioni. Come conseguenza della conservazione totale della quantità di moto in un urto elastico, la variazione di quantità di moto di una particella sarà uguale ed opposto a quella dell' altra particella partecipante all'evento. Questo significa che, per collisioni fra particelle della stessa specie, non c'è variazione nella quantità di moto totale per unità di volume ovvero  $\vec{A}=0$ . Comunque per un plasma composto da particelle di specie diverse  $\vec{A} \neq 0$ . Per collisioni fra elettroni e neutri c'è un netto passaggio di quantità di moto e lo stesso vale per urti fra elettroni e ioni. Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{A} = -\rho_m \nu_{ie} (\vec{u}_e - \vec{u}_i) - \rho_m \nu_{en} (\vec{u}_e - \vec{u}_n) \quad (6.31)$$

Dove  $\nu_{ie}$  e  $\nu_{en}$  [ $s^{-1}$ ] sono chiamate frequenze di collisione per lo scambio di quantità di moto rispettivamente ioni-elettroni e elettroni-neutri. Per la conservazione varrà quindi:

$$\rho_{me} \nu_{ei} (\vec{u}_e - \vec{u}_i) + \rho_{mi} \nu_{ie} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) = 0 \quad (6.32)$$

$$\rho_{me} \nu_{en} (\vec{u}_e - \vec{u}_n) + \rho_{mn} \nu_{ne} (\vec{u}_n - \vec{u}_e) = 0 \quad (6.33)$$

E in generale:

$$\rho_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha} \nu_{\beta\alpha} \quad (6.34)$$

Dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono due specie qualsiasi presenti nel plasma. Valori per le frequenze sono di sotto riportati:

$$\nu_{ei} = 3.62 \cdot 10^{-6} \cdot n_i \cdot T_e^{-3/2} \ln \Lambda \quad (6.35)$$

$$\nu_{en} = 2.60 \cdot 10^4 \cdot Q_{ion}^2 \cdot n_n \cdot T_e^{1/2} \quad (6.36)$$

$$\Lambda = 12 \cdot \pi \cdot n_e \cdot \lambda_d^3 = 1.23 \cdot 10^7 \frac{T_e^{3/2}}{n_e^{1/2}} \quad (6.37)$$

Dove  $Q_{ion}$  è la sezione d'urto delle particelle che collidono ed è dell'ordine di  $10^{-10}$  [m<sup>2</sup>].

## 6.5 Conservazione dell'energia

Prima di introdurre l'equazione dell'energia definiamo l'ultimo importante parametro macroscopico la temperatura assoluta. La temperatura assoluta  $T$ , per ogni specie di particelle, è una misura della energia cinetica media dovuta al moto incoerente delle particelle. In accordo con la definizione termodinamica, all'equilibrio, esiste una energia termica di  $kT/2$  associata con ognuno dei gradi di libertà alla traslazione:

$$kT/2 = m \langle c_i^2 \rangle / 2 \quad (6.38)$$

Con  $k$  costante di Boltzmann. Quando la velocità incoerente è isotropica ovvero il plasma è in equilibrio termico otteniamo:

$$p = nkT \quad (6.39)$$

Che equivale all'equazione di stato per un gas ideale.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

Può essere utile introdurre la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. I gas in equilibrio termodinamico obbediscono a questa espressione della funzione di distribuzione, la sua espressione è:

$$f = C \cdot e^{[-(ma_2/2)(\vec{v}-\vec{v}_0)^2]} \quad (6.40)$$

Dove  $a_2$  e  $C$  sono costanti. Queste costanti possono essere espresse in termini di grandezze osservabili macroscopiche quali temperatura, densità numerica e velocità media. Legando le costanti a queste grandezze otteniamo una forma più utilizzata per la funzione di distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$f(c) = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi \cdot k \cdot T}\right)^{3/2} \cdot e^{-(mc^2/2kT)} \quad (6.41)$$

Si dimostra che questa rappresenta la più probabile distribuzione che soddisfa le condizioni macroscopiche imposte al sistema. Definiamo alcune grandezze caratteristiche ovvero la velocità media, la velocità più probabile e lo scarto quadratico medio della velocità:

$$\langle v \rangle = (8/\pi)^{1/2} (kT/m)^{1/2} \quad (6.42)$$

$$v_{rms} = \langle v^2 \rangle^{1/2} = (3kT/m)^{1/2} \quad (6.43)$$

$$v_{mp} = (2kT/m)^{1/2} \quad (6.44)$$

Per derivare l'equazione di trasporto dell' energia sostituiamo la variabile generica  $\chi(\vec{v})$  con  $mv^2/2$  nell' equazione generale del trasporto:

$$\begin{aligned} n \langle \chi \rangle &= \rho_m \langle v^2 \rangle / 2 = \rho_m \langle c^2 \rangle + \rho_m u^2 / 2 = \\ &= 3p/2 + \rho_m u^2 / 2 \end{aligned} \quad (6.45)$$

Di conseguenza l'equazione diventerà:

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_m u^2 / 2) + \vec{\nabla} \cdot [\rho_m \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle / 2] - n \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle = M \quad (6.46)$$

Dove M rappresenta la variazione di densità di energia dovuta alle collisioni.

$$M \equiv m / 2 \int_v v^2 \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3 v = \left[ \frac{\partial (\rho_m \langle v^2 \rangle / 2)}{\partial t} \right]_{coll} \quad (6.47)$$

L'equazione dell' energia può essere scritta in forma alternativa utilizzando il concetto di flusso di calore  $\vec{q}$ . La componente di flusso di calore  $q_n$  è definita come il flusso di energia termica attraverso una superficie la cui normale è  $\vec{n}$ :

$$q_n = \rho_m \langle c^2 \vec{c} \cdot \vec{n} \rangle / 2 \quad (6.48)$$

Il vettore flusso di calore è quindi:

$$\vec{q} = \rho_m \langle c^2 \vec{c} \rangle / 2 \quad (6.49)$$

E in definitiva:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (3p/2) + (3p/2)(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \\ = M - \vec{u} \cdot \vec{A} + (u^2 / 2) S \end{aligned} \quad (6.50)$$

### 6.5.1 Interpretazione fisica e approssimazioni

L'interpretazione fisica è la seguente: il primo termine alla sinistra dell'uguale rappresenta la variazione totale dell'energia termica degli elettroni in un volume che si muove con velocità media  $\vec{u}$ . Gli altri termini contribuiscono con vari pesi a questa variazione; il secondo termine alla sinistra dell'uguale può essere interpretato come il cambio nell'energia termica dovuto alle particelle che entrano nel volume con velocità media  $\vec{u}$ . Il terzo è legato al lavoro fatto per unità

di volume dalla pressione, mentre il quarto rappresenta la variazione di energia dovuta al flusso di calore. I termini alla destra dell'uguale rappresentano il rateo di variazione di energia termica a causa delle collisioni. Alcune approssimazioni che semplifichino l'equazione dell'energia possono essere considerate a seconda della situazione di interesse:

- Il termine collisionale è trascurabile e la velocità media  $\bar{u}$  è uguale a zero:

$$\frac{3}{2}(nk) \frac{DT}{Dt} = \bar{\nabla} \cdot (K\bar{\nabla}T) \quad (6.51)$$

Il coefficiente di conducibilità termica  $K$  è legato al coefficiente di viscosità del fluido.

- Il fluido è non viscoso, il termine collisionale è trascurabile:

$$p\rho_m^{-5/3} = \cos t \quad (6.52)$$

questa equazione indica che il fluido subisce una trasformazione adiabatica.

- $T = \cos t$

## **6.6 Il modello plasma freddo**

Si è visto che le equazioni che governano le variazioni delle variabili macroscopiche possono essere ottenute dai momenti dell'equazione di Boltzmann. I primi quattro momenti della funzione di distribuzione ci danno la densità numerica, la velocità media, il tensore degli sforzi, e il tensore di terzo ordine chiamato flusso di energia totale ricavabile in analogia alla definizione di flusso di calore e tensore del terzo ordine del calore:



$$\overline{\overline{Q}} = \rho_m \langle \overline{c\overline{c}c} \rangle \quad (6.53)$$

$$q_n = (Q_{xxn} + Q_{yyx} + Q_{zxn})/2 \quad (6.54)$$

$$\overline{\overline{E}}(\vec{r}, t) = \rho_m \langle v_i v_j v_k \rangle \quad (6.55)$$

Il flusso totale di energia espresso da un tensore del terzo ordine può essere considerato come la somma del flusso di energia trasportata per convezione e del flusso di energia termica dovuto al moto di agitazione incoerente delle particelle. Ogni momento dell'equazione di Boltzmann ci lega due variabili così che abbiamo sempre più incognite che equazioni. E' quindi necessario introdurre una approssimazione per eliminare una variabile indipendente o per esprimerla in funzione delle altre. Il sistema più semplice in questo senso è noto come modello a plasma freddo che utilizza solo l'equazione di conservazione della massa e di quantità di moto. Il più alto momento che appare in questo modello è il tensore degli sforzi che viene preso uguale a zero. Il sistema di equazioni da risolvere è quindi:

$$\partial \rho_m / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}) = S \quad (6.56)$$

$$\rho_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{u} \cdot S + \rho_m \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{p} + n_e \cdot q \cdot (E + \vec{u} \times B) + \vec{A} \quad (6.57)$$

## 6.7 Il modello plasma caldo o approssimazione adiabatica

In questo sistema di equazioni del trasporto l'approssimazione che viene introdotta è nell'equazione dell'energia, nella quale non consideriamo il termine che coinvolge il flusso di calore; così facendo consideriamo un plasma non viscoso e perciò i termini non sulla diagonale del tensore degli sforzi sono tutti nulli, i tre parametri macroscopici che appaiono in questo sistema sono quindi densità numerica, velocità media e pressione scalare:

$$\partial \rho_m / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}) = S \quad (6.58)$$

$$\rho_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{u} \cdot S + \rho_m \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{p} + n_e \cdot q \cdot (E + \vec{u} \times B) + \vec{A} \quad (6.59)$$

$$\frac{D}{Dt} (3p/2) + (5p/2)(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = M - \vec{u} \cdot \vec{A} + (u^2/2)S \quad (6.60)$$

Considerando inoltre che la variazione dell' energia dovuta alle collisioni sia trascurabile:

$$p\rho_m^{-5/3} = \text{cost} \quad (6.61)$$

Nel caso più generale in cui non si vogliono trascurare le forze di attrito e il flusso di calore il plasma si definisce “*hot plasma*”; in tal caso risulta più conveniente lavorare direttamente con la funzione di distribuzione nello spazio delle fasi.

## 6.8 Diffusione di Bohm

In un plasma completamente ionizzato il coefficiente di diffusione classico in direzione perpendicolare al campo magnetico applicato è dato da:

$$D_{\perp} = nkT / \sigma_0 B^2 \quad (6.62)$$

Dove  $\sigma_0$  è la conduttività elettrica definita come:

$$\sigma_0 = \frac{nq^2}{m_e \nu_{ei}} \quad (6.63)$$

Il coefficiente di diffusione è proporzionale a  $1/B^2$  come in un plasma parzialmente ionizzato, d'altra parte in questo caso c'è anche una dipendenza che prima non si trovava del coefficiente dalla densità numerica. In alcuni esperimenti

si è osservata una dipendenza di  $D_{\perp}$  da  $B^{-1}$  piuttosto che da  $B^{-2}$  e la variazione della densità numerica del plasma con il tempo si è mostrata essere esponenziale invece che reciproca. Inoltre il valore assoluto di  $D_{\perp}$  si è trovato essere molto maggiore di quello calcolato. Questo confinamento più piccolo rispetto a quello che ci si aspettava operato dal campo magnetico è denominata diffusione anomala o di Bohm. Una formula semiempirica che ci dà il valore del coefficiente di diffusione è:

$$D_{\perp} = D_B = kT / (16qB) \quad (6.64)$$

Un approccio utilizzato per tener conto di questo fenomeno, approccio utilizzato anche in questo lavoro, è quello di utilizzare un coefficiente correttivo per la frequenza di collisione da introdurre nei sistemi di equazioni sopra riportati. Una relazione polinomiale che fornisce questo legame è stata derivata da *Choueiri*:

$$\begin{aligned} \frac{V_{an}}{v} = & 0.192 + 3.33 \cdot 10^{-2} \beta + 0.212 \beta^2 - 8.27 \cdot 10^{-5} \beta^3 + \\ & + \frac{T_i}{T_e} (1.23 \cdot 10^{-3} - 1.58 \cdot 10^{-2} \beta - 7.89 \cdot 10^{-3} \beta^3) \end{aligned} \quad (6.65)$$

Con  $\beta$  parametro di Hall degli elettroni uguale a:  $\omega_e / \nu_{ei}$ .

## 6.9 Ionizzazione e ricombinazione

I fenomeni di ionizzazione e ricombinazione sono molto frequenti all'interno di un plasma, e ne caratterizzano il comportamento. La scelta che si è fatta in questo lavoro è di trattare questi fenomeni solo all'esterno della camera accelerativa. Questa decisione è supportata da un'analisi del grado di ionizzazione in equilibrio attraverso l'equazione di Saha. All'interno del motore la ionizzazione è stata esclusa in quanto si ipotizza il gas già completamente ionizzato quando entra nel motore, si suppone cioè che il fenomeno avvenga all'interno del catodo cavo,

mentre la ricombinazione per temperature che sperimentalmente si misurano esserci nel motore non è tale da abbassare considerevolmente il grado di ionizzazione. All'esterno questo non è più vero, difatti le più basse temperature ci portano a dire, attraverso l'analisi dell'equazione di Saha, che un maggior numero di neutri è presente. Questa ipotesi teorica è poi confermata sperimentalmente, in quanto le misure effettuate ci dicono che a soli tre diametri di distanza dalla bocca del propulsore il gas è tornato quasi completamente neutro. Con i metodi della meccanica statistica è possibile derivare l'equazione che ci interessa senza considerare i dettagli del processo di ionizzazione. Per ionizzare un atomo è necessario fornirgli un certo quantitativo di energia, chiamata potenziale di ionizzazione ed espressa solitamente in [eV]. Questi valori si trovano tabulati, è da notare che sono valori estremamente grandi e quindi solo ad alte temperature l'energia termica media supera quella di ionizzazione. Comunque è possibile ottenere gradi di ionizzazione elevati anche a temperature molto più basse di quelle in cui l'energia termica media supera l'energia di ionizzazione, infatti le particelle che hanno una velocità più elevata (nella coda della funzione di distribuzione di Maxwell), hanno abbastanza energia per produrre la ionizzazione attraverso la collisione. Il grado di ionizzazione all'equilibrio è determinato da un bilancio fra tasso di ionizzazione e tasso di ricombinazione. In questa situazione il problema è complicato dalla necessità di introdurre la meccanica quantistica. Infatti i fattori di degenerazione che ci danno il numero degli stati che hanno una certa energia devono essere ottenuti per questa via. Chiamando con  $n_a$  e  $n_b$  le densità numeriche delle particelle che hanno energia rispettivamente  $U_a$  e  $U_b$  il loro rapporto è dato da:

$$n_a / n_b = g_a / g_b \cdot e^{[-(U_a - U_b) / KT]} \quad (6.66)$$

Con  $g_a$  e  $g_b$  fattori di degenerazione. Per il problema della ionizzazione prendiamo lo stato  $a$  come lo stato eccitato e lo stato  $b$  come lo stato in cui l'atomo è neutro e  $U = U_a - U_b$  uguale all' energia di ionizzazione sarà:

$$\alpha = \frac{(g_a / g_b) \cdot e^{(-U / KT)}}{(g_a / g_b) \cdot e^{(-U / KT)} + 1} \quad (6.67)$$

Dove  $\alpha$  è il grado di ionizzazione. Mentre i fattori di degenerazione valgono:

$$g_a / g_b = 2.405 \cdot 10^{21} \cdot T^{3/2} \cdot n_i^{-1} \quad (6.68)$$

L'equazione di Saha diventa quindi:

$$n_i / n_n = 3 \cdot 10^{27} \cdot T^{3/2} \cdot n_i^{-1} \cdot e^{(-U / T)} \quad (6.69)$$

Con  $T$  in [eV] e  $n_i$  in [ $\text{m}^{-3}$ ]. Si riporta in figura l'andamento del grado di ionizzazione in funzione della temperatura al variare della densità totale per l'Argon  $n_t = n_i + n_n$ .

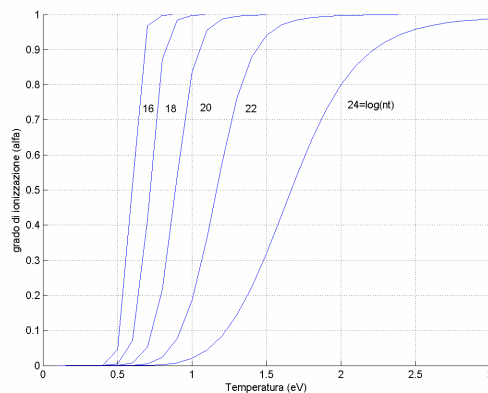


Figura 6.2 Andamento del grado di ionizzazione in funzione della temperatura al variare della densità totale

Dall'analisi della funzione si nota che intorno ai 3 [eV], temperatura di ingresso nel motore, il gas è completamente ionizzato come era ipotizzato mentre spostandoci ad esempio all' esterno del motore a causa del diminuire della temperatura questo non è più vero; di conseguenza le ipotesi fatte sono utilizzabili nel codice. L'ultima osservazione riguarda la forte dipendenza dalla temperatura del grado di ionizzazione che varia tra zero e uno in un piccolissimo intervallo di temperatura, perciò un piccolo errore nella temperatura può causare un grande errore nella valutazione della funzione infatti:

$$\Delta T = 4U / [K \ln(g_a / g_b)]^2 \quad (6.70)$$

## 6.10 Sommario

In questo capitolo sono stati presentati i modelli necessari per una descrizione fluida del plasma, modelli che sono stati utilizzati nel codice sviluppato per la descrizione del moto degli elettroni. In particolare è stata fatta la scelta di utilizzare il modello a plasma caldo, sia per il codice all'interno del motore che per il codice all'esterno della struttura; a questo modello è stata aggiunta attraverso un parametro il fenomeno di conducibilità anomala. Si è inoltre scelto di tener conto dei fenomeni di ionizzazione e ricombinazione solo all' esterno della camera accelerativa, e di non appesantire perciò ulteriormente il codice all'interno del motore, essendo già molto complesso, supportati inoltre dall'analisi precedente sul grado di ionizzazione.

Si riportano infine i due sistemi di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho_m / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}) = 0 \\ \rho_m \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + n_e \cdot q \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \vec{A} \\ p \rho_m^{-5/3} = \cos t \end{array} \right. \quad (6.71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho_m / \partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{u}) = S \\ 0 = -\nabla p + n_e \cdot q \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \vec{A} \\ p \rho_m^{-5/3} = \text{cost} \end{array} \right. \quad (6.72)$$

L'ipotesi che si fa nel secondo sistema di trascurare il termine inerziale nell'equazione della quantità di moto è in accordo con la scelta di molti autori, e suggerita dalla piccola massa degli elettroni che per questo motivo, raggiungono una situazione stazionaria in un tempo molto più breve rispetto a ioni e neutri. Nel primo sistema questo non viene fatto perché come si vedrà il termine inerziale servirà per avanzare la corrente elettronica attraverso il passo temporale. La derivazione delle equazioni in coordinate cilindriche è riportato in appendice.





# Modello particellare

## 7.1 introduzione

Il modello particellare è utilizzato come detto per lo studio del moto degli ioni e dei neutri all'interno ed all'esterno del propulsore MPD. In questo capitolo vengono trattate le metodologie per l'integrazione delle equazioni del moto per gli ioni e i neutri, inoltre viene descritta la metodologia Monte Carlo per la simulazione statistica delle collisioni e in particolare per la simulazione del fenomeno della ricombinazione.

## 7.2 Il metodo PIC

Il metodo *particle-in-cell* consiste nel simulare direttamente il moto delle particelle che costituiscono il plasma. Risulta subito chiaro che non è possibile simulare l'andamento di tutte le molecole presenti nello spazio, infatti valori di densità sperimentali ci dicono che il numero di ioni presenti sono dell'ordine di  $10^{20}$  particelle per  $m^3$ ; è perciò necessario fare delle approssimazioni. Si introduce pertanto il concetto di macroparticella: questa si comporta singolarmente rispetto a posizione, quantità di moto e collisioni, mentre si comporta come una nuvola di particelle rispetto a fenomeni fisici collettivi, come generazione del campo magnetico ed elettrico. Ogni macroparticella sarà composta tipicamente da  $10^8$ -

$10^9$  atomi o ioni; risulta chiaro che se si aumenta la dimensione delle macroparticelle si perdono di vista fenomeni che avvengono all'interno di scale spaziali più piccole, inoltre, per avere valori statisticamente significativi; il numero di macroparticelle all'interno di una singola cella dovrà essere il più alto possibile (almeno 30-40). La tipica struttura di un codice PIC è riportata in figura:

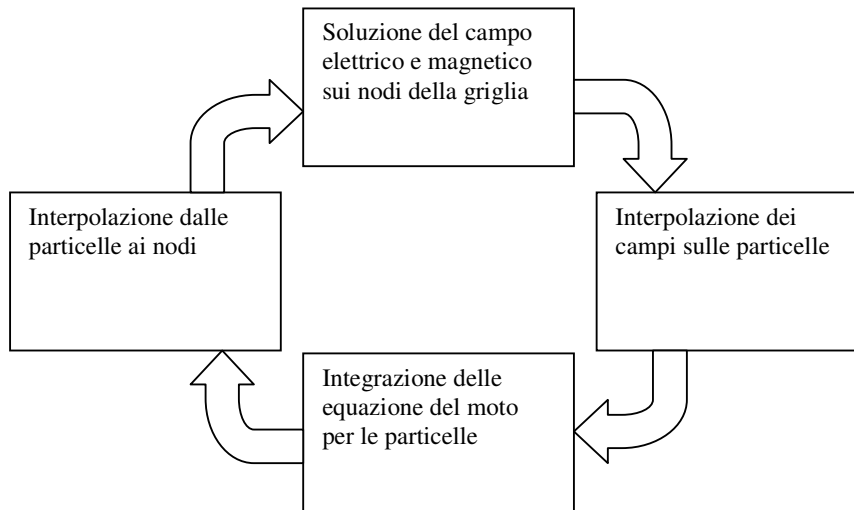


Figura 7.1 Diagramma di flusso per il ciclo computazionale di un metodo *Particle-in-cell* generico

Analizziamo di seguito la struttura nel particolare riportando le tecniche specifiche utilizzate in questo codice.

### **7.2.1 Interpolazione particelle ai nodi della griglia: *Scatter step***

E' necessario calcolare la densità ionica sui punti della griglia, discretizzazione dello spazio fisico, rispetto alla distribuzione continua delle particelle; è inoltre necessario calcolare le correnti ioniche presenti in ognuno dei nodi. Questa operazione è chiamata *weighting*; a seconda della distanza che esiste fra particella

e nodo, questa contribuirà in modo più o meno marcato al valore medio della grandezza che interessa sul punto di griglia. Il metodo utilizzato è denominato *bilinear weighting* o BW. Tramite questo schema si effettua una approssimazione del primo ordine, la carica considerata è solo quella all'interno della cella come nelle approssimazioni più semplici tipo NGP (*nearest grid point*), ma la funzione peso è uguale al rapporto tra l'area opposta alla distanza punto-nodo e l'area totale della cella. Le condizioni che devono essere soddisfatte sono:

- Conservazione della carica:  $\sum_{j,k} Q_{j,k} = \sum_p Q_p$
- Conservazione della massa:  $\sum_{j,k} m_{j,k} = \sum_p m_p$
- Variazione del fattore di forma con continuità:

$$\left. \frac{\partial S_{j,k}(r_p, z_p)}{\partial r_p} \right|_{r_p=r_j} = 0$$

$$\left. \frac{\partial S_{j,k}(r_p, z_p)}{\partial z_p} \right|_{z_p=z_k} = 0$$

Dove  $S_{j,k}(r_p, z_p)$  è il fattore di forma.

### 7.2.2 Interpolazione dei campi sulle particelle: *Gather step*

Una volta determinati campo elettrico e magnetico, è poi necessario calcolare il valore di questi campi in posizioni diverse dai nodi della griglia, infatti le particelle occupano posti qualunque all'interno dello spazio della simulazione;

questa operazione, denominata *gather step*, è l'operazione opposta a quella vista in precedenza *scatter step*, ed è effettuata con uno schema analogo a quello del BW.

### **7.2.3 Inizializzazione e iniezione degli ioni**

Le condizioni iniziali per ognuna delle due zone della simulazione sono date specificando il campo magnetico  $B$ , la posizione di ognuna delle macroparticelle e la loro velocità. Inoltre viene fornito il campo elettrico all'inizio della simulazione, questo è il campo generato da un anodo e un catodo posti al potenziale di scarica nel vuoto, mentre per la zona esterna è dato il campo elettrico. Vista l'impossibilità di utilizzare un codice fluido quando si sta operando con il vuoto, si è deciso di operare in condizioni in cui già la massa è presente. Questa scelta è simile a quella fatta per le analisi sperimentali; infatti il motore viene utilizzato anche in prova in condizioni di quasi continuità; viene cioè prima iniettato il gas e quando la camera è piena viene opposta la differenza di potenziale e la scarica ha inizio. Basandoci su queste osservazioni è stato deciso di affrontare il problema con un motore in cui sia presente una densità di fondo sia ionica che elettronica così da rispettare l'ipotesi di neutralità. E' da notare come in ogni caso la simulazione non parta da condizioni stazionarie, ma solamente da condizioni iniziali diverse da quelle di vuoto; la stazionarietà viene raggiunta quando per ipotesi il numero di particelle che entrano è uguale a quello di particelle che escono dal campo della simulazione. In formule:

$$(dm/dt)_i = (dm/dt)_u \quad (7.1)$$

$$dm/dt = \sum_j m_i \cdot N_s \cdot (dN_j/dt) \quad (7.2)$$

### Modello particellare

Con  $N_s$  peso del macroione e  $N$  numero di macroioni. L'iniezione degli ioni avviene invece dalla bocca del catodo, ad ogni passo temporale viene iniettato, con distribuzione parabolica un numero di macroparticelle tali da verificare l'equazione:

$$\Delta N = \frac{(dm/dt) \cdot \Delta t}{N_s m_i} \quad (7.3)$$

Dove  $dm/dt$  è la portata in massa in ingresso dal catodo e posta uguale a 200 [mg/s]. La figura riporta la misura sperimentale dell'andamento della massa all'interno del catodo. Per simulare uno sparo in una situazione stazionaria la differenza di potenziale viene introdotta quando la portata diventa costante. La nostra simulazione avviene all'interno della zona indicata in figura.

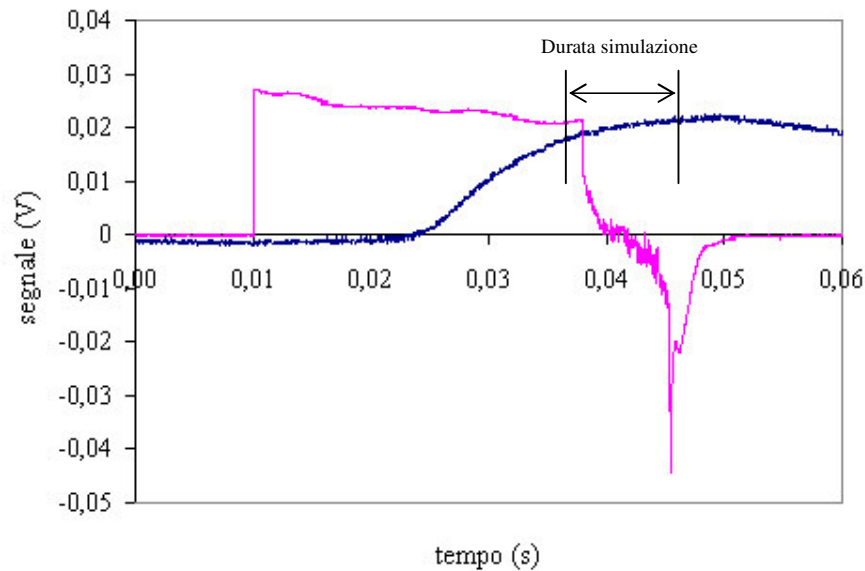


Figura 7.2 Durata teorica della simulazione rispetto all'andamento della portata all'interno del catodo durante una prova effettuata al Centrosazio. La durata reale della simulazione è molto più breve e termina al raggiungimento della stazionarietà, mentre la durata dello sparo è dell'ordine di millisecondi e viene effettuata quando la portata al catodo raggiunge il suo massimo.

Per la velocità di iniezione si fa l'ipotesi che il plasma venga iniettato con velocità uguale alla velocità gasdinamica del suono, dove la temperatura è nota da dati sperimentali mentre l'ipotesi di Mach=1 , lega questo codice a un codice già sviluppato in precedenza al Centrosazio per la simulazione del catodo cavo, in formule:

$$v = \sqrt{\gamma RT} \quad (7.4)$$

Con  $\gamma$  rapporto fra i calori specifici a pressione e volume costante. All' esterno del motore le condizioni di iniezione sono determinate dalla soluzione del codice interno sia per velocità che per portata.

#### **7.2.4 Il metodo di avanzamento della corrente: CAM-CI**

L' algoritmo per la simulazione verrà prima descritto per la zona esterna e successivamente verranno fatte le opportune integrazioni per la zona interna al propulsore. Il metodo di avanzamento della corrente è un algoritmo sviluppato da Matthews per la simulazione ibrida di un plasma. E' essenzialmente un algoritmo *leapfrog* sia per le particelle che per i campi centrato rispetto al tempo; questo significa che la derivata temporale della variabile è calcolata a metà del passo temporale. Ora, se la derivata temporale è essa stessa una funzione della variabile che deve essere fatta avanzare, ci deve essere una stima della variabile un mezzo passo precedente. Questa stima può essere fatta essenzialmente in due modi: con il metodo del punto di mezzo o con il metodo del punto di mezzo modificato. Il primo consiste nell'effettuare il mezzo passo iniziale con la derivata temporale calcolata all'inizio del passo, l'altro nel tenere due soluzioni sfasate di mezzo passo ed utilizzare ogni soluzione per valutare la derivata temporale centrata dell'altra. L' algoritmo in questione è la procedura di integrazione del metodo del

punto di mezzo modificato per il calcolo del campo magnetico. Le particelle sono avanzate invece attraverso un *leapfrog* con velocità a loro volta avanzate attraverso il metodo del punto di mezzo usando il campo elettrico e magnetico interpolato alla posizione delle particelle un mezzo passo prima. Dall'ipotesi di termine inerziale nullo per il fluido elettronico segue:

$$n_e \cdot q \cdot \vec{E} = \vec{J}_e \times \vec{B} - \nabla p_e + n_e m_e v_{ie} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \quad (7.5)$$

Dove  $J_e$  è la corrente elettronica  $\vec{J}_e = -n_e \cdot q \cdot \vec{u}_e$  chiamando con  $\rho = n \cdot q$  densità di carica con l'ipotesi di quasi-neutralità il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = -(\vec{J}_i \times \vec{B}) / \rho - \nabla p_e / \rho + (\vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}) / (\mu_0 \cdot \rho) + (m_e \cdot v_{ie} / q \cdot \rho) \vec{J} \quad (7.6)$$

Dove si sono considerati solo gli urti elettroni ioni e l'equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \quad (7.7)$$

Utilizzando ancora le equazioni di Maxwell il campo magnetico sarà dato da:

$$\partial \vec{B} / \partial t = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (7.8)$$

Ovvero:

$$\begin{aligned} \partial \vec{B} / \partial t = & \vec{\nabla} \times ((\vec{J}_i \times \vec{B}) / \rho) + \vec{\nabla} \times ((\vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}) / (\mu_0 \cdot \rho)) + \\ & + \vec{\nabla} \times ((m_e \cdot v_{ie} / (q \cdot \rho)) \vec{J}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

### 7.2.5 Ottimizzazione dello schema *leapfrog*

Lo schema *leapfrog* per l'avanzamento delle particelle è il metodo del punto di mezzo applicato all'equazione:

$$d\vec{x}_i / dt = \vec{v}_i \quad (7.10)$$

e un'integrazione centrata nel tempo per l'equazione di Newton-Lorentz:

$$d\vec{v}_i / dt = \frac{q}{m_i} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.11)$$

L'equazione differenziale viene riscritta come equazione alle differenze:

$$x^{1/2} = x^{-1/2} + \Delta t \cdot v^0 \quad (7.12)$$

$$\vec{v}^1 = \vec{v}^0 + \Delta t \cdot \frac{q}{m_i} (\vec{E}^{1/2}(\vec{x}^{1/2}) + \vec{v}^{1/2} \times \vec{B}^{1/2}(\vec{x}^{1/2})) \quad (7.13)$$

Un obiettivo primario nella simulazione è quello di minimizzare il numero di operazioni richieste per avanzare le particelle, e simultaneamente ottenere un'accuratezza accettabile nel risolvere le equazioni del moto. Un'importante operazione sarebbe trovare un algoritmo che utilizzi un solo passo computazionale per la spinta delle particelle. Il problema fondamentale nel risolvere l'equazione (7.13) è che è implicita, né  $v^{1/2}$  né  $E^{1/2}$  (che dipende da  $v^{1/2}$  attraverso  $J_i^{1/2}$ ) sono noti all'inizio del passo temporale. Il metodo del punto di mezzo risolve la (7.13) in  $\Delta t$  con un mezzo passo del primo ordine da  $v^0$  a  $v^{1/2}$ .

$$\vec{v}^{1/2} = \vec{v}^0 + \frac{\Delta t}{2} \frac{q}{m_i} (\vec{E}^* + \vec{v}^0 \times \vec{B}^{1/2}) \quad (7.14)$$

Se una stima accettabile di  $\vec{E}^{1/2}$  viene fatta, le equazioni sopra riportate possono essere risolte in un passo solo; la questione è come ottenere una buona stima del campo elettrico a metà del passo temporale. Una risposta può essere una pre-spinta delle particelle per ottenere  $v^{1/2}$  e quindi  $J^{1/2}$ , ma in questo modo sono necessari due passi per risolvere l'equazione (7.13). Con un approccio differente è possibile risolvere la suddetta equazione in un singolo passo: *avanzare la*



### Modello particellare

corrente ionica  $J_i^0$  un mezzo passo a  $J_i^{1/2}$  con un appropriata equazione del moto. Ora un solo passo è necessario per risolvere l'equazione (7.13) poiché  $\vec{E}^{1/2}$  è calcolata come funzione di  $J^{1/2}$ . Questo è chiamato *metodo del momento* e dimezza circa i tempi di calcolo a causa del piccolo numero di punti di griglia coinvolti nel calcolo di  $J^{1/2}$  rispetto al numero di particelle coinvolte in una pre-spinta. Poiché la corrente ionica è fatta avanzare questo metodo è chiamato "*current advance method*" dal suo ideatore Matthews. Un' ultima nota riguarda l'ordine del metodo: dimostriamo che è un metodo del secondo ordine. L'equazione:

$$d\vec{v}_i / dt = \frac{q}{m_i} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.15)$$

Può essere scritta nella forma  $u' = au + b$  dove  $u' \equiv du/dt$  e  $u(t)$ ,  $a(t)$  e  $b(t)$  sono funzioni del tempo. Se  $u(0)$  è nota  $u(h)$  può essere approssimata al secondo ordine in  $h$  attraverso una derivata centrale nel tempo:

$$\begin{aligned} u(h) &= u(0) + h \cdot u'(h/2) = \\ &= u(0) + h \cdot \frac{d}{dt} [u(0) + h/2 \cdot u'(0)] = \\ &= u(0) + hu'(0) + h^2/2 \cdot u''(0) + \text{err}(h^3) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Così  $u(h/2)$  necessita solo di essere approssimato al primo ordine in  $h/2$  per avere un approssimazione del secondo ordine in  $u(h)$ . Mostriamo ora che il gradiente  $u'(*)$  può essere usato per fornire un approssimazione accurata del primo ordine per  $u(h/2)$  quando  $a(h/2)$  e  $b(h/2)$  sono espansi al primo ordine:

$$\begin{aligned}
 u'(*) &= a(h/2) \cdot u(0) + b(h/2) = \\
 &= [a(0) + h/2 \cdot a'(0)] \cdot u(0) + b(0) + h/2 \cdot b'(0) \\
 &= a(0) \cdot u(0) + b(0) + h/2 \cdot [a'(0) \cdot u(0) + b'(0)] = \\
 &= u'(0) + h/2 \cdot \varepsilon
 \end{aligned} \tag{7.17}$$

Dove  $\varepsilon = a'(0) \cdot u(0) + b'(0)$  e quindi:

$$\begin{aligned}
 u(h/2) &= u(0) + h/2 \cdot u'(*) = \\
 &= u(0) + h/2 \cdot u'(0) + \text{err}(h^2)
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

Questa espressione di  $u(h/2)$  ci dà l'approssimazione del secondo ordine per  $u(h)$ :

$$u(h) = u(0) + h \frac{d}{dt} \cdot [u(0) + h/2 \cdot u'(*)] \tag{7.19}$$

### 7.2.6 Correnti ioniche

Correnti e densità di carica sono definiti analiticamente attraverso i momenti della funzione di distribuzione. Nella simulazione sono determinati ai nodi della griglia attraverso le funzioni peso ovvero:

$$\rho(x_j) = \sum S_j \cdot q \tag{7.20}$$

$$\vec{J}_i(x_j) = \sum S_j \cdot q \cdot \vec{v} \tag{7.21}$$

Ora consideriamo  $\vec{J}_i$  con le variabili associate alle particelle date a diversi istanti di tempo: velocità all'inizio del passo temporale e posizione a metà dello stesso.

Questo è equivalente a trascurare l'accelerazione e tenere solo conto del trasporto delle cariche dovuto al flusso libero, finché la velocità di ciascuno ione rimane costante lungo un intervallo  $\Delta t/2$ , mentre la posizione varia. Applicando all'equazione (7.20) l'ipotesi di flusso libero ci dà:

$$\vec{J}_i^*(x^{1/2}, \vec{v}^0) = \sum S(x^{1/2}) \cdot q \cdot \vec{v}^0 \quad (7.22)$$

### 7.2.7 Avanzamento della densità di corrente ionica

Deriviamo ora un'equazione del moto per avanzare  $\vec{J}_i$  a metà del passo temporale. Consideriamo gli ioni al nodo  $j$  (cioè nell'intorno della posizione  $x_j$ ). Moltiplichiamo la pre-spinta dell'equazione (7.14) per  $q$  (che in generale può essere diversa per ogni particella), e sommiamo il contributo dei termini al nodo, usando le funzioni peso  $S_j^{1/2} = S(x_i^{1/2}, x_j)$  valutate alle posizioni delle particelle  $x^{1/2} = x(t_0 + \Delta t/2)$ :

$$\sum S_j^{1/2} \cdot q \cdot \vec{v}^{1/2} = \sum S_j \cdot q \cdot \vec{v}^0 + \frac{\Delta t}{2} \sum S_j^{1/2} \cdot \frac{q^2}{m_i} (\vec{E}^* + \vec{v}^0 \times \vec{B}^{1/2}) \quad (7.23)$$

$$\vec{J}_i^{1/2} = \vec{J}_i^* + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda \vec{E}^* + \vec{\Gamma} \times \vec{B}^{1/2}) \quad (7.24)$$

$$\Lambda = \sum S_j^{1/2} \cdot \frac{q^2}{m_i} \quad (7.25)$$

$$\vec{\Gamma} = \sum S_j^{1/2} \cdot \frac{q^2}{m_i} \cdot \vec{v}^0 \quad (7.26)$$

La (7.24) è l'equazione del moto per il metodo di avanzamento della corrente, che ci dà l'avanzamento della corrente ionica al primo ordine lungo il passo  $\Delta t/2$ . Così un'approssimazione per  $J_i^{1/2}$  può essere ottenuta collezionando prima la

corrente di flusso libero  $\vec{J}_i^*(x^{1/2}, \vec{v}^0)$ ,  $\Lambda$  e  $\Gamma$  durante il *loop* che avanza le particelle e infine applicando la (7.24). I principali vantaggi del CAM sono:

- Il tempo di computazione è ridotto comparandolo a un metodo che richiede una pre-spinta per valutare  $J_i^{1/2}$
- Possono essere modellate più specie ioniche facilmente rispetto a un metodo del momento della velocità del fluido in cui ogni specie deve essere trattata separatamente.

### **7.2.8 Leapfrog ciclico per la determinazione del campo magnetico**

L'evoluzione del campo magnetico indotto è determinata attraverso l'equazione di Maxwell (7.8), per la cui soluzione può essere utilizzato ogni sorta di metodo numerico compatibile con CAM. Il *leapfrog* ciclico CL è una applicazione del metodo del punto di mezzo modificato applicato al campo magnetico.

Due copie del campo magnetico vengono determinate utilizzando per una la soluzione dell'altra e periodicamente mediate su un ciclo di lunghezza arbitraria. In molte situazioni il campo magnetico richiede un passo temporale più piccolo rispetto all'integrazione delle altre particelle per risolvere la sua evoluzione. CL consente di utilizzare dei sotto-passi attraverso dei cicli di passo temporale minore ad ognuno dei passi temporali utilizzati per le particelle. Il campo elettrico è calcolato come funzione della carica e della densità di corrente centrate rispetto al tempo:

$$\vec{E}_p = (\rho^{1/2}, \vec{J}_i^{1/2}, \vec{B}_p, T_e) \quad (7.27)$$

e  $B_0 \equiv B(t_0)$  è fatto avanzare da  $t_0$  a  $t_0 + H$  attraverso un ciclo di  $n$  sottopassi di grandezza  $h = H/n$  così che:

### Modello particellare

$$\vec{B}_p \equiv \vec{B}(t_0 + ph)$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_0 - h\vec{\nabla} \times \vec{E}_0$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_0 - 2h\vec{\nabla} \times \vec{E}_1$$

⋮

$$\vec{B}_{p+1} = \vec{B}_{p-1} - 2h\vec{\nabla} \times \vec{E}_p$$

Dove  $p = 1, 2, \dots, n-1$

$$\vec{B}_n = \vec{B}_{n-2} - 2h\vec{\nabla} \times \vec{E}_{n-1}$$

$$\vec{B}_n^* = \vec{B}_{n-1} - h\vec{\nabla} \times \vec{E}_n$$

E alla fine:

$$\vec{B}(t_0 + H) = \frac{1}{2}(\vec{B}_n + \vec{B}_n^*) \quad (7.28)$$

Dal punto di vista computazionale si utilizzano due copie di  $B$ , una per la soluzione “dispari” ( $p$  dispari insieme a  $B_n^*$ ) e una per la soluzione “pari” ( $p$  pari), queste soluzioni si intersecano una con l’altra durante il sottopasso, ovvero si utilizza la soluzione che viene da un’equazione per calcolare l’altra.

### 7.2.9 Implementazione numerica

Come già detto in precedenza la discretizzazione delle equazioni che risolvono il sistema in esame è stata fatta attraverso la tecnica delle differenze finite; in particolare è stato adottato uno schema del secondo ordine a tre punti per le

derivate del secondo ordine, mentre per la derivata prima viene utilizzata una formulazione a tre punti centrata, anche questa con accuratezza al secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \cong \frac{\chi_{i,j+1} \cdot dr_{i,j-1} - \chi_{i,j} \cdot drr_{i,j} + \chi_{i,j-1} \cdot dr_{i,j+1}}{1/2drr_{i,j} \cdot dr_{i,j+1} \cdot dr_{i,j-1}}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \cong \frac{\chi_{i,j+1} \cdot dz_{i,j-1} - \chi_{i,j} \cdot dzz_{i,j} + \chi_{i,j-1} \cdot dz_{i,j+1}}{1/2dzz_{i,j} \cdot dz_{i,j+1} \cdot dz_{i,j-1}}$$

E la derivata prima:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} \cong \frac{\chi_{i,j+1} \cdot dr_{i,j-1}^2 + \chi_{i,j} \cdot (dr_{i,j}^2 - dr_{i,j-1}^2) - \chi_{i,j-1} \cdot dr_{i,j+1}^2}{dr_{i,j} \cdot dr_{i,j-1} \cdot drr_{i,j}}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} \cong \frac{\chi_{i,j+1} \cdot dz_{i-1,j}^2 + \chi_{i,j} \cdot (dz_{i,j}^2 - dz_{i-1,j}^2) - \chi_{i,j-1} \cdot dz_{i+1,j}^2}{dz_{i,j} \cdot dz_{i-1,j} \cdot dzz_{i,j}}$$

Per quanto riguarda i contorni del campo di simulazione, sono state utilizzate a seconda della necessità espressioni delle derivate “backward” e “forward”:

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} \cong \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j}}{dr_{i,j}}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} \cong \frac{\chi_{i,j} - \chi_{i,j-1}}{dr_{i,j+1}}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} \cong \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j}}{dz_{i,j}}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} \cong \frac{\chi_{i,j+1} - \chi_{i,j}}{dz_{i,j}}$$

Ora poiché la discretizzazione dello spazio delle fasi introduce rumore, la conseguenza è che c'è sempre una perturbazione che agisce sulla determinazione

di densità di corrente e densità di carica. Per risolvere questo problema possono essere “smussate” le grandezze nell’intenzione di smorzare il rumore statistico. L’equazione seguente mostra un modo con il quale è possibile ottenere l’effetto voluto:

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{4} [\chi(r+1, z) + \chi(r-1, z) + \chi(r, z+1) + \chi(r, z-1)]$$

Non si è ritenuto di utilizzare nel codice questa tecnica ma potrebbe essere introdotta in una futura versione per migliorarne le prestazioni.

### **7.2.10 Calcolo del campo elettrico**

Risulta evidente che il termine  $(\vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}) / (\mu_0 \cdot \rho)$  rende il campo elettrico molto grande a basse densità che possono portare il codice ad essere instabile. A basse densità la frequenza di dispersione del campo magnetico diventa troppo grande per il passo temporale per soddisfare la condizione di Courant.

La frequenza angolare di dispersione risulta essere proporzionale a:

$$\omega_d \propto k^2 \cdot B / (\mu_0 \cdot \rho) \quad (7.29)$$

Dove  $k = \pi / \Delta x$  in una griglia computazionale dove  $\Delta x$  è la dimensione della cella.

Inoltre è da notare l’inadeguatezza che può nascere dal trascurare il termine che rappresenta la corrente di spostamento nelle equazioni di Maxwell quando c’è il vuoto; è questo infatti l’unico termine che genera un campo magnetico quando non ci sono particelle all’interno della zona di simulazione. Come misura precauzionale in situazioni dove densità molto basse possono intervenire è necessario utilizzare un grande numero di sottopassi nel calcolo del campo magnetico; inoltre si fa l’ipotesi che al di sotto di una certa soglia il campo

elettrico venga determinato solo attraverso l'equazione di Laplace fissate le opportune condizioni al contorno.

### 7.2.11 Algoritmo di avanzamento nel tempo

Descriviamo di seguito in dettaglio l'algoritmo utilizzato per la simulazione nella zona esterna al propulsore, questo algoritmo verrà successivamente integrato attraverso il calcolo del campo elettrostatico. Esso viene calcolato dall'equazione (7.47) e successivamente viene utilizzato per spingere le particelle a metà del passo temporale.

1. Passo iniziale: Si forniscono:  $\vec{x}_0, \vec{v}_0$  e  $\vec{B}_0$  e si determinano:

$$\rho^0 = \rho(\vec{x}^0)$$

$$\vec{J}_i^0 = \vec{J}_i(\vec{x}^0, \vec{v}^0)$$

$$\vec{x}^{1/2} = \vec{x}^0 + \frac{\Delta t}{2} \cdot \vec{v}^0$$

$$\rho^{1/2} = \rho(\vec{x}^{1/2})$$

$$\vec{J}_i^+ = \vec{J}_i^*(\vec{x}^{1/2}, \vec{v}^0)$$

$$\Lambda = \Lambda(\vec{x}^{1/2}, \vec{v}^0)$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}(\vec{x}^{1/2}, \vec{v}^0)$$

2. Primo passo: si avanza  $\vec{B}^0$  a  $\vec{B}^{1/2}$ ,  $\vec{J}_i^+$  a  $\vec{J}_i^{1/2}$  e si calcola  $\vec{E}^{1/2}$ :

$$\vec{B}^{1/2} = \vec{B}^0 - \int_0^{\Delta t/2} \vec{\nabla} \times \vec{E}(\rho^0, \vec{J}_i^0, \vec{B}(t), p_e) dt$$



*Modello particellare*

$$\vec{E}^* = \vec{E}(\rho^{1/2}, \vec{J}_i^0, \vec{B}^{1/2}, p_e)$$

$$\vec{J}_i^{1/2} = \vec{J}_i^+ + \frac{\Delta t}{2} \cdot (\Lambda \vec{E}^* + \vec{\Gamma} \times \vec{B}^{1/2})$$

$$\vec{E}^{1/2} = \vec{E}(\rho^{1/2}, \vec{J}_i^{1/2}, \vec{B}^{1/2}, p_e)$$

3. Si avanza  $\vec{v}^0$  a  $\vec{v}^1$  e  $\vec{x}^{1/2}$  a  $\vec{x}^{3/2}$  :

$$\vec{v}^{1/2} = \vec{v}^0 + \frac{\Delta t}{2} \frac{q}{m_i} (\vec{E}^{1/2} + \vec{v}^0 \times \vec{B}^{1/2})$$

$$\vec{v}^1 = \vec{v}^0 + \Delta t \frac{q}{m_i} (\vec{E}^{1/2} + \vec{v}^{1/2} \times \vec{B}^{1/2})$$

$$\vec{x}^{3/2} = \vec{x}^{1/2} + \Delta t \cdot \vec{v}^1$$

4. Si raccolgono le quantità di interesse nello stesso “loop” attraverso la posizione delle particelle:

$$\rho^{3/2} = \rho(\vec{x}^{3/2})$$

$$\vec{J}_i^- = \vec{J}_i^*(\vec{x}^{1/2}, \vec{v}^1)$$

$$\vec{J}_i^+ = \vec{J}_i^*(\vec{x}^{3/2}, \vec{v}^1)$$

$$\Lambda = \Lambda(\vec{x}^{3/2}, \vec{v}^1)$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}(\vec{x}^{3/2}, \vec{v}^1)$$

5.  $\rho^1$  e  $\vec{J}_i^1$  sono ottenuti come medie delle quantità calcolate a metà dei passi e infine  $\vec{B}^{1/2}$  è fatto avanzare a  $\vec{B}^1$ :

$$\rho^1 = \frac{1}{2}(\rho^{1/2} + \rho^{3/2})$$

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

$$\bar{J}_i^1 = \frac{1}{2}(\bar{J}_i^+ + \bar{J}_i^-)$$

$$\bar{B}^1 = \bar{B}^{1/2} - \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \bar{\nabla} \times \bar{E}(\rho^1, \bar{J}_i^1, \bar{B}(t), p_e) dt$$

$\bar{B}$  è integrato nel tempo con il CL. Al termine della simulazione un sistema di dati con quantità sincrone appare desiderabile è quindi necessario un passo finale.

6. Ultimo passo si retrocede  $\bar{x}$  un mezzo passo e si raccolgono  $\rho_m^1$  e  $u^1$ :

$$\bar{x}^1 = \bar{x}^{3/2} - \frac{\Delta t}{2} \cdot \bar{v}^1$$

$$\rho_m^1 = \rho(\bar{x}^1)$$

$$\bar{u}_i^1 = u_i(\bar{x}^1, \bar{v}^1)$$

La procedura è illustrata in figura:

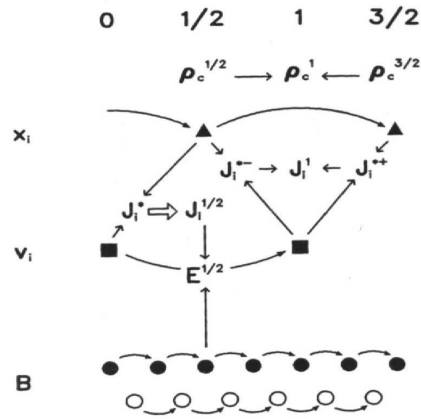


Figura 7.3 Diagramma schematico dello schema di avanzamento nel tempo CAM-CL

### 7.3 Collisioni

Per rendere il codice più completo sono stati introdotti nella simulazione le collisioni, modificando l'algoritmo CAM-CL che nasce come modello non-collisionale. Le collisioni che si sono considerate in questa fase di sviluppo sono le collisioni ioni-elettroni e il fenomeno di ricombinazione che avviene anch'esso attraverso urti. Per quanto riguarda il primo fenomeno la sua introduzione nell'algoritmo non comporta alcun cambiamento dal punto di vista concettuale, ma può essere visto come una normale integrazione; infatti l'effetto causato da questi urti è, come si può vedere dal calcolo del campo elettrico, quello di modificarlo. Ora, poiché il campo elettrico è calcolato sui nodi della griglia computazionale e non su ciascuna particella, è sufficiente, quando si effettua la spinta degli ioni, prima di effettuare l'operazione opposta allo *scatter*, tener conto che per la conservazione della quantità di moto il campo elettrico sarà:

$$\vec{E}' = \vec{E} - \eta / \rho \cdot \vec{V} \times \vec{B} \quad (7.30)$$

Dove con  $\eta$  si è inteso un parametro dipendente direttamente dalla frequenza d'urto elettroni-ioni:

$$\eta = \frac{V_{ei} \cdot m_e}{q \cdot \mu_0} \quad (7.31)$$

Il fenomeno della ricombinazione verrà trattato in dettaglio nel prossimo paragrafo.

#### 7.3.1 Ricombinazione

La ricombinazione consiste nella perdita di ioni e nella formazione di neutri, i quali necessitano una trattazione diversa da quella vista finora; non è perciò possibile utilizzare le tecniche viste finora ma è necessario introdurne di nuove.

Vista anche la tipologia del fenomeno in considerazione si è scelto di utilizzare una metodologia di tipo Monte Carlo .

### **7.3.2 Il metodo Monte Carlo**

Se si considerano i fenomeni di urto di ionizzazione e di ricombinazione, si deve fare uso di metodi di indagine statistica. Infatti il propulsore diventa in questo caso un sistema stocastico, ovvero il sistema è dominato da una variabile casuale dipendente dal tempo quale risulta essere la collisione, indipendentemente dal fatto che avvengano o meno altri fenomeni quali ricombinazione, ionizzazione, scambio di carica. Non è possibile utilizzare metodi deterministici in questi casi, ma la casualità domina il sistema. Tratteremo le collisioni come processi di Markov, ovvero si assume che la probabilità dell'evento dipende solamente dal passo temporale precedente, risultando indifferenti le condizioni in cui si trovavano le particelle due passi precedenti.

L'idea di base del metodo Monte Carlo è la seguente:

- Per ogni particella di specie  $\alpha$  la probabilità di collisione con una particella di specie  $\beta$  in un passo temporale viene valutata:

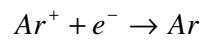
$$p_{\alpha,\beta} = f(n_{\beta}, v_{\alpha,\beta}, Q_{\alpha,\beta})$$

- La probabilità  $p_{\alpha,\beta}$  è paragonata a un numero casuale compreso tra 0 e 1 per determinare se l'evento ha luogo.
- Se l'evento ha luogo la quantità di moto della particella cambia in maniera casuale in modulo e direzione.

Descriviamo nel dettaglio la tecnica usata per tener conto della ricombinazione, sottolineando come ugualmente si potrebbe fare con la ionizzazione, che in questo

### Modello particellare

codice non è stata presa in considerazione. Il metodo è stato utilizzato da Szabo per la simulazione di un motore ad effetto Hall [27]. Il tasso di ricombinazione è stato definito in precedenza quando si è trattato il modello fluido per gli elettroni.  $S$  rappresenta il numero di elettroni che devono essere eliminati ogni secondo per  $m^3$  a causa della formazione di neutri da collisioni fra elettroni e ioni:



Dalla conoscenza di questo tasso ricaviamo il numero di ioni che devono essere eliminati per passo temporale in ogni volume del dominio computazionale, e quindi il numero di macroparticelle ioniche che si trasformano in macroparticelle neutre:

$$\Delta n_i = \text{int}\{(S(j,k) \cdot \text{vol}(j,k) / \text{peso}) \cdot dt\} \quad (7.34)$$

Dove  $\text{int}$  rappresenta la funzione “intero” che trasforma un numero reale in un numero intero, mentre  $\text{peso}$  rappresenta il peso di ogni macroparticella come definito in precedenza. La trasformazione di un numero reale in uno intero è introdotta per evitare che appaiano macroparticelle neutre con pesi diversi. Una volta che il numero di ioni che devono essere eliminati dalla simulazione sono stati determinati, si calcola per ogni cella la probabilità di ricombinazione:

$$p_i(j,k) = \frac{\Delta n_i(j,k)}{n_i(j,k)} \quad (7.35)$$

Per ogni macroparticelle che in quell'istante appartiene alla cella questo numero è paragonato con un numero casuale, se  $\text{rand} < p_i$  la ricombinazione avviene e l'ione scompare.

Una volta che il neutro si è formato è necessario dotarlo di una quantità di moto; poiché la massa di un elettrone è notevolmente minore della massa di uno ione, si suppone che la quantità di moto posseduta dal neutro sia la stessa posseduta dallo

ione prima della collisione, sia in direzione che modulo, infine la posizione si suppone anch'essa invariata rispetto a quella dello ione. Per la conservazione della massa è però necessario effettuare un'altra operazione infatti l'introduzione dell'operatore *int* non ne permette la conservazione, perciò l'artificio utilizzato da Szabo, e qui riutilizzato, è quello di non rinizializzare la variabile che esprime il numero di macroneutri che devono essere formati, così che al passo successivo la differenza dall'unità si sommi automaticamente al rateo di ricombinazione proprio di quel passo temporale. Allo stesso modo in cui questo evento è stato modellato, altri possono esserlo, come la ionizzazione o le collisioni fra neutri e ioni. In questa versione del codice si è scelto di non farlo, lasciando questa possibilità in futuro poiché l'elevato tasso di ionizzazione presente all'interno di un motore MPD e l'ipotesi di introdurre il gas già pre-ionizzato, escludono una grande influenza dei neutri nella dinamica di questo tipo di propulsori.

#### **7.4 Avanzamento dei neutri**

Una volta che le macroparticelle neutre si sono formate è necessario farle avanzare nel tempo. Il loro moto è molto semplice in quanto non sono soggette a campi di alcun genere e in generale si può dire che nessuna forza di massa di considerevole importanza agisca su di loro. La variazione della loro traiettoria è quindi dovuta solo ad un urto con un'altra particella o con una parete. L'equazione risulta quindi:

$$\vec{v}_{t+1} = \vec{v}_t \quad (7.36)$$

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{x}_t + \vec{v}_t \cdot dt \quad (7.37)$$

#### **7.5 Collisione particelle-pareti**

Il dominio computazionale è chiuso all'interno del propulsore da due pareti. Ad ogni passo temporale qualche particella ione o neutro si suppone possa

raggiungere una delle pareti. Questo può avvenire in generale a causa di collisioni o per campi elettrici locali o interazione di campi magnetici con la velocità posseduta dagli ioni a causa ad esempio di urti con le particelle neutre che restituisce una velocità casuale. Anche se questi effetti non sono tenuti tutti in conto nel codice, per uno sviluppo futuro è comunque stato considerato l'evento di collisione con la parete. Fisicamente, all'atto dell'urto, uno ione perde la sua carica e viene reintrodotta all'interno del campo con velocità casuale. Questo succede anche nella simulazione sia per gli ioni che per i neutri.

## **7.6 Il codice ibrido all'interno del propulsore**

Quando le correnti nel plasma sono connesse a un circuito esterno, un approccio diverso è necessario per la soluzione del problema. Introduciamo le equazioni di Maxwell complete necessarie per lo studio del problema. Il sistema di equazioni risulta accoppiato: la soluzione di un'equazione del sistema richiede come sorgente il valore che si determina da un'altra e viceversa. Data la complessità matematica che si trova nella soluzione di queste equazioni, vediamo quali approssimazioni possono essere fatte, se è possibile farne nella situazione in esame.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7.38)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.40)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_{tot} / \epsilon_0 \quad (7.41)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.42)$$

Dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica nel vuoto e vale  $8.854 \cdot 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$  mentre  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica nel vuoto e vale  $4\pi \cdot 10^{-7} H / m$ . Si ricorda che vale la relazione:

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \quad (7.44)$$

Dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto.

### **7.6.1 Approssimazione elettrostatica**

Ora, se si fa l'ipotesi che le correnti siano piccole, e perciò i campi magnetici indotti all'interno del propulsore trascurabili rispetto ai campi magnetici esterni generati dalla bobina, è possibile fare un'approssimazione importante. Il modello di Matthews suppone che all'inizio della simulazione non esistano correnti nette e perciò i campi magnetici indotti siano nulli. Se si fa l'ipotesi che il campo magnetico indotto sia trascurabile allora la situazione di partenza della simulazione è già una situazione di equilibrio per i campi elettromagnetici e perciò la variazione del campo magnetico risulta nulla. L'equazione (7.40) diventa quindi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (7.45)$$

Perciò il campo elettrico ammette un potenziale  $\phi$  e siamo nel campo della approssimazione elettrostatica; in tale situazione lo schema rimane quello CAM-CL dove però il sotto ciclo per il calcolo del campo magnetico indotto viene saltato mentre per il campo elettrico risulta:

$$\nabla \phi = -(\vec{J}_i \times \vec{B}) / \rho - \nabla p_e / \rho + (\vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}) / (\mu_0 \cdot \rho) + (m_e \cdot v_{ie} / q \cdot \rho) \vec{J} \quad (7.46)$$



*Modello particellare*

Se si fa la divergenza di questa equazione è possibile calcolare il campo potenziale e successivamente il campo elettrico:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\nabla \phi) &= \vec{\nabla} \cdot (-(\vec{J}_i \times \vec{B}) / \rho - \nabla p_e / \rho + (\vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}) / (\mu_0 \cdot \rho) + (m_e \cdot v_{ie} / q \cdot \rho) \vec{J}) \\ \nabla^2 \phi &= \vec{\nabla} \cdot (-(\vec{J}_i \times \vec{B}) / \rho - \nabla p_e / \rho + \\ &+ (\vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}) / (\mu_0 \cdot \rho) + (m_e \cdot v_{ie} / q \cdot \rho) \vec{J})\end{aligned}\quad (7.47)$$

$$\vec{E} = \nabla \phi \quad (7.48)$$

Sono state effettuate prove con questo modello. Per la sua relativa semplicità, lo stesso è stato utilizzato per simulazioni di lunga durata; i tempi di calcolo sono infatti molto ridotti grazie all'eliminazione dei sottocicli. Sfortunatamente mentre questo modello si può adattare bene per le sue caratteristiche ad un motore ad effetto Hall ( le correnti in questi motori sono sperimentalmente molto basse e di conseguenza anche i campi magnetici indotti), questo non si può con altrettanta facilità fare su un motore MPD. Infatti le correnti che si misurano all'interno di tali propulsori sono talmente grandi da rendere paragonabili, come ordini di grandezza, campi indotti ed applicati. Si può fare una stima attraverso il teorema di Ampere e i dati sperimentali di quanto questo modello sia applicabile a un MPD:

$$\vec{B}_{esterno} \approx 10^{-2} T$$

$$(2\pi r) \cdot \vec{B}_{indotto} = \mu_0 \cdot i$$

Le correnti che si misurano sono, per un motore con portata intorno ai 200 [mg/s] e differenze di potenziale di 50-100 [V] di 3000-5000 [A]; di conseguenza sarà essendo il raggio del catodo di  $10^{-2}$  [m]:

$$\vec{B}_{indotto} \approx 10^{-1} T$$

Il campo magnetico indotto non è perciò assolutamente trascurabile. Se si vuole applicare uno schema di questo genere, ci si dovrebbe mettere in situazioni in cui il motore funziona a regimi di corrente notevolmente più bassi, in questo modo la simulazione potrebbe fornire risultati attendibili. In ogni caso l'algoritmo utilizzato nelle simulazioni per la zona esterna è stato integrato con la soluzione dell'equazione (7.47) che risulta valida anche nel caso non elettrostatico, mentre il campo magnetico viene calcolato in maniera equivalente a prima attraverso il calcolo del campo elettrico dovuto solamente alle correnti e ai campi magnetici, ma non alla distribuzione di potenziale.

### 7.6.2 Modello di Darwin

L'essenza del modello di Darwin è quella di trascurare solamente la corrente di spostamento, inoltre si divide il campo elettrico in una parte longitudinale e una parte trasversale denominate rispettivamente  $\vec{E}_l$  ed  $\vec{E}_t$ , definite richiedendo che  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_l = 0$  e  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t = 0$ . Nel caso che il plasma sia connesso a un circuito esterno le equazioni risultanti diventano:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_l = q(n_i - n_e) / \epsilon_0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_l = 0 \quad (7.49)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_t = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t = 0 \quad (7.50)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.51)$$

Le equazioni di campo differiscono quindi solo per un termine dalle equazioni esatte di Maxwell, comunque questa semplice alterazione cambia significativamente il loro carattere: quando accoppiate alle equazioni delle particelle attraverso i termini sorgente diventano ellittiche piuttosto che iperboliche. Prima di vedere questo aspetto analizziamo il termine omissso per evidenziare che l'ordine di

### Modello particellare

grandezza di questo termine è minore rispetto agli altri termini costituenti l'equazione; possiamo infatti mostrare che questo termine è  $(\omega/k)^2 \cdot 1/c$  volte più piccolo del termine  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ . Dall'equazione di Faraday segue che:

$$E \propto \left(\frac{\omega}{k}\right) B$$

Dove  $\omega$  è la frequenza e  $k$  il numero d'onda, mentre l'ordine di grandezza della corrente di spostamento risulta essere:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} / \vec{\nabla} \times \vec{B} \propto \left(\frac{\omega}{kc}\right)^2$$

Poiché noi siamo interessati a fenomeni a relativa bassa frequenza  $\omega/kc \ll 1$  risulta quindi giustificata la scelta fatta. Per esempio, nel caso di un'onda di Alfvén:

$$\omega \propto kv_a$$

Con

$$v_a^2 = B^2 / \mu_0 \cdot \rho \quad (7.52)$$

E di conseguenza:

$$(\omega/kc)^2 \approx (v_a/c)^2 \ll 1$$

Trascurando la derivata temporale del campo elettrico, possiamo ottenere un guadagno in termini di passo temporale, ma viene persa la simmetria nelle equazioni necessaria per costruire lo schema alle differenze finite, centrato nel tempo; l'equazione iperbolica diventa ellittica e questa ellitticità è di considerevole importanza computazionale. Si rimanda all'appendice per avere

approfondimenti su questo aspetto. Qui si fa solamente notare che l'equazione che risolve il campo elettrico longitudinale dovrà essere risolta in maniera implicita.

### 7.6.3 Trasformazione di gauge

Le equazioni sopra riportate possono essere espresse in termini di potenziale scalare e potenziale vettore rispettivamente  $\phi$  e  $\vec{A}$ . Si dimostra che è possibile scegliere fra infinite possibilità questi due potenziali lasciando invariati i valori di campo elettrico e magnetico. Ogni famiglia di soluzioni che verifica questa possibilità ci definisce una scelta di gauge. In elettrodinamica il campo elettrico cessa di essere conservativo e possiamo scrivere poiché il campo magnetico è solenoidale:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (7.53)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} \quad (7.54)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.55)$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad (7.56)$$

Questa equazione ci dice che il potenziale scalare descrive solamente la parte conservativa del campo elettrico generata dalle cariche elettriche, il campo elettrico generato dal campo magnetico variabile nel tempo è non conservativo ed è descritto dal vettore potenziale magnetico. La più generale trasformazione che lascia invariati campo magnetico ed elettrico è:

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \nabla \psi$$

In generale siamo liberi di scegliere la trasformazione migliore che ci renda le equazioni più semplici possibili. La scelta che viene fatta in questo lavoro è quella di utilizzare la Coulomb gauge che in formule:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (7.57)$$

Questa scelta ci permette di lasciare l'equazione di Poisson invariata:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \left( -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= -\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (7.58)$$

#### 7.6.4 Soluzione numerica del modello di Darwin

Le equazioni del modello di Darwin possono essere espresse lavorando nella Coulomb gauge in termini dei potenziali scalare e vettore:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q(n_i - n_e)}{\epsilon_0} \quad (7.60)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{J} \quad (7.61)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_t = \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (7.62)$$

Nel caso di quasi-neutralità, un metodo per determinare  $\phi$  può essere quello di utilizzare l'equazione della quantità di moto per il fluido elettronico, come fatto in precedenza per il campo elettrico nel caso del metodo CAM-CL; l'equazione risultante diventa:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{J}_i \times \vec{B}) / \rho - \nabla p_e / \rho + \\ + (\vec{\nabla} \times \vec{B} \times \vec{B}) / (\mu_0 \cdot \rho) + (m_e \cdot v_{ie} / q \cdot \rho) \vec{J} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Mentre l'equazione di avanzamento della corrente elettronica sarà:

$$\frac{\partial \vec{J}_e}{\partial t} = -\frac{n \cdot q^2}{m_e} (\vec{E}_l + \vec{E}_t) - \frac{q}{m_e} \nabla p_e + \frac{q}{m_e} (\vec{J}_e \times \vec{B}) + n \cdot q \cdot v_{ei} (\vec{u}_i - \vec{u}_e) \quad (7.64)$$

Il sistema di equazioni (7.61-7.64) ci consente di avanzare il campo elettrico longitudinale e trasversale e il campo magnetico nel tempo. In particolare l'equazione (7.63) gioca lo stesso ruolo dell'equazione di Poisson nei modelli che non richiedono la quasi-neutralità. Discutiamo ora il metodo numerico utilizzato per risolvere il sistema.

Per integrare questo modello con quello CAM-CL abbiamo bisogno di una stima della corrente elettronica a metà del passo temporale, così da poter fare avanzare il campo magnetico attraverso la soluzione del potenziale vettore. Questa stima però non può essere ottenuta direttamente, poiché come già preannunciato il sistema è accoppiato e perciò l'avanzamento della corrente è vincolato alla conoscenza dei campi elettrici longitudinale e trasversale, e la determinazione del campo elettrico trasversale ha come sorgente il campo elettrico longitudinale, necessario per la determinazione della derivata della corrente, mentre il campo elettrico longitudinale nell'equazione che svolge il ruolo dell'equazione di Poisson necessita del campo elettrico trasversale come sorgente per essere integrato. Sono quindi necessarie iterazioni attraverso le equazioni di  $\vec{E}_l$  ed  $\vec{E}_t$ . Un'ultima complicazione risulta dalla soluzione del campo elettrico trasversale, infatti tale integrazione non può avvenire in maniera esplicita ma deve essere fatta in maniera implicita poiché l'equazione mostra una propagazione istantanea dell'informazione.

## **7.7 Sommario**

In questo capitolo sono stati mostrati in dettaglio i metodi numerici utilizzati per la soluzione del problema della simulazione di un plasma per un motore MPD. In particolare si sono introdotte le metodologie PIC per l'integrazione delle equazioni del moto per le particelle pesanti, ovvero ioni e neutri. Questo modello è poi stato integrato attraverso la combinazione con un modello fluidodinamico per gli elettroni. L'integrazione è avvenuta attraverso due modelli già utilizzati in passato per lo studio della dinamica dei plasmi; i fenomeni che venivano analizzati erano però diversi dal fenomeno in esame. In particolare il metodo CAM-CL è stato utilizzato per modellare plasmi extraterrestri quali interazioni del vento solare con comete, mentre il modello di Darwin è stato utilizzato per la simulazione di instabilità e riconessioni magnetiche. E' sembrato opportuno in questo lavoro utilizzare il primo metodo per la simulazione dello spazio esterno al propulsore nel tentativo di ottenere risultati per l'interazione motore satellite e di utilizzare il modello di Darwin per la simulazione del plasma internamente al motore; questo perché l'introduzione di un circuito esterno rendeva impossibile l'utilizzo di un modello più semplice. Questi modelli, infine, sono stati integrati con il fenomeno delle collisioni che non era trattato in precedenza, in quanto si è supposto importante il fenomeno dell'urto per quanto riguarda la ricombinazione. Infine è stato sottolineato in ogni caso il metodo per la determinazione del campo magnetico indotto, ritenendolo requisito fondamentale per un propulsore MPD, evitando così di introdurre altri parametri che valutassero contributi di corrente non scalare quale l'effetto Hall.





# Risultati

## 8.1 Introduzione

L'algoritmo di calcolo per la simulazione del motore MPD sia all'interno che all'esterno del canale accelerativo è stato implementato in linguaggio *FORTRAN*. I codici completi come già detto in precedenza si compongono di due blocchi fondamentali:

- PIC: che consiste nell'avanzamento delle particelle pesanti attraverso l'integrazione delle equazioni del moto.
- Fluido: che consiste nello studiare il comportamento dei campi elettrici e magnetici attraverso l'analisi delle equazioni del trasporto per gli elettroni.

Si analizzano di seguito i risultati delle simulazioni, inoltre si evidenziano i parametri che possono essere modificati e che controllano il processo, nonché i test di validazione che sono stati effettuati.

## **8.2 Parametri della simulazione**

Entrambi i codici sono in grado di effettuare le simulazioni variando alcuni parametri che caratterizzano sia la precisione che le condizioni fisiche in cui si opera. Inoltre è possibile valutare i valori delle variabili di interesse durante la simulazione, infatti essi vengono salvati al termine di ogni passo temporale e perciò resi disponibili per l'analisi nello stesso tempo in cui il codice sta funzionando. La possibilità di aumentare la precisione è consentita dall'aumento del numero di celle che costituiscono la griglia e dalla diminuzione del passo di integrazione; inoltre, per quanto riguarda il calcolo del campo magnetico indotto, è possibile effettuare un numero di sottopassi maggiore se si vuole migliorare la stabilità del codice. Infine è possibile scegliere il criterio di arresto di tutti i cicli iterativi come, la soluzione del potenziale o la determinazione del campo magnetico indotto per quanto riguarda la soluzione all'interno del canale accelerativo. Il criterio di arresto è stimato in base al calcolo della differenza pesata fra la valutazione precedente e successiva di una variabile e fissando il valore voluto per questa differenza. I parametri scelti in questa simulazione sono i seguenti:

- Numero di celle:  $30 \times 30$
- Passo temporale:  $dt=10^{-9}$  [s] (esterno),  $dt = 10^{-8}$  (interno)
- Passo temporale per il campo magnetico indotto:  $dt1 = dt \cdot 0.1$
- Criterio di arresto cicli iterativi:  $10^{-3}$
- Peso di una macroparticella:  $10^{10}$ (esterno),  $10^{11}$ (interno)

La possibilità di variare le condizioni fisiche in cui si opera è invece fornita dalla scelta del campo magnetico esterno che si vuole utilizzare. E' possibile effettuare vari cambi: intensità del campo e posizionamento delle spire in modo da variare il rapporto fra campo radiale ed assiale. Inoltre è possibile scegliere il potenziale di anodo e catodo, la densità del plasma, la temperatura elettronica, la velocità di

## *Risultati*

iniezione delle particelle e la loro distribuzione . I risultati che sono di seguito riportati sono stati ottenuti con le seguenti grandezze:

- Campo magnetico generato da una spira posta a  $z = 0.0555$  rispetto al catodo e a  $r = 0.15$  dall'asse del motore. La spira è percorsa da una corrente di 10000 [A].
- Potenziale di scarica 50 [V].
- Portata 200 [mg/s] .
- Temperatura elettronica 3 [eV] sulla bocca del catodo.
- Velocità di iniezione delle particelle:  $M=1$  sul catodo con distribuzione parabolica (per la simulazione nella camera accelerativa), 20000 [m/s] all'uscita del motore con distribuzione parabolica( per la simulazione della regione esterna).

### **8.3 Validazione dei codici**

Si è cercato una volta scritti i codici di testarne la validità. Entrambi i codici come visto in precedenza presentano una struttura mista particellare-fluida., risulta però difficile analizzarle separatamente in quanto è attraverso la loro unione che i codici assumono un senso fisico, cioè presi separatamente non possono essere analizzati per i risultati che danno rispetto, ad esempio, a dati sperimentali, ma si può testare solamente la loro stabilità. Per la parte PIC dei codici i test sono risultati abbastanza agevoli: si è fissata una distribuzione di potenziale, si è calcolato il corrispondente campo elettrico e si è fissato solamente un campo magnetico esterno; in questo modo i codici sono stati fatti girare e hanno mostrato la possibilità di determinare le caratteristiche del moto per gli ioni; i risultati, in ogni caso, come si è già accennato non sono però validi in quanto durante il loro moto gli ioni perturbano i campi elettrici e magnetici; non è perciò esatto considerarli statici. Per l'analisi della parte dei codici che descrivono il moto

degli elettroni una verifica non è stata altrettanto semplice, in quanto, le equazioni che descrivono il loro moto sono servite, in tutti i casi, solamente a determinare i campi elettrici e magnetici, non ci si è interessati perciò del moto effettivo di queste particelle, essendo ininfluenti ai fini della spinta, ed essendo solamente interessanti a causa delle correnti che sono in grado di generare e dei campi magnetici indotti che corrispondono ad esse. In definitiva le analisi su questa parte dei codici è avvenuta solamente in contemporanea con la parte particellare. I risultati di queste analisi combinate sono riportate nel capitolo seguente.

## **8.4 Risultati**

Si riportano e si discutono i risultati per il canale accelerativo e il getto esterno al motore.

### **8.4.1 Risultati della simulazione all'esterno del motore**

Iniziamo con il descrivere i risultati che riguardano la simulazione del getto di plasma all' esterno del motore MPD. Il plasma viene iniettato all'esterno del motore con una distribuzione di velocità parabolica lungo l'asse  $z$  con massimo sull'asse di simmetria del motore; la velocità massima è di 20000 [m/s] e la portata di 200 [mg/s]. Con un passo temporale di  $10^{-9}$  [s] l'equilibrio in termini di massa, ovvero il rapporto fra massa in ingresso e massa in uscita dal campo di simulazione, risulta essere uguale a 1 dopo circa 30000 passi temporali.

## Risultati

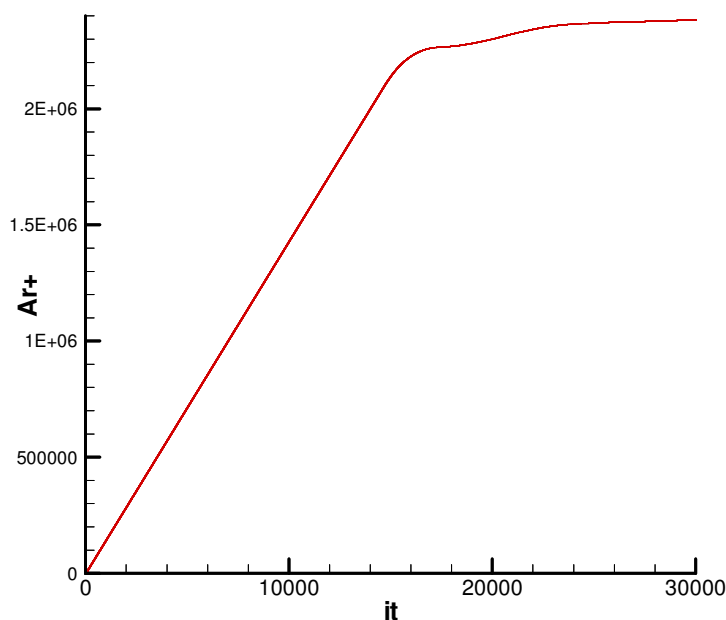


Figura 8.1: Numero di particelle all'interno della regione durante la simulazione

Si può osservare come il numero delle macroparticelle all'interno del campo di simulazione sia intorno a  $2.4 \cdot 10^6$ . Se si volesse diminuire la grandezza della griglia, ovvero aumentare il numero dei nodi diventerebbe impossibile fare una simulazione in tempi ragionevolmente brevi, infatti la durata di una simulazione con passo temporale  $10^{-9}$  è intorno alle 140 ore con un Pentium IV 2800 [Mhz] e 1 [Ghz] di memoria RAM. Questo problema potrebbe essere in parte risolto attraverso l'introduzione di macroparticelle dal peso variabile, poiché le densità risultano molto diverse in un fenomeno di espansione nel vuoto (in questo caso quasi vuoto, la densità di fondo è dell'ordine di  $10^{15}$  particelle/m<sup>3</sup>) e perciò esistono un gran numero di particelle in prossimità dell'anodo e un numero piccolo nelle zone estreme della regione. Questa metodologia prende il nome di PIC adattivo e verrà discussa in parte nel prossimo Capitolo.

Quando la simulazione ha inizio e non ci sono particelle nella regione, il campo elettrico è solamente statico e dovuto al potenziale dell'anodo. Le condizioni al

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

contorno scelte sono di simmetria sull'asse mentre si è scelto di porre uguale a zero il potenziale alla estremo della regione considerata.

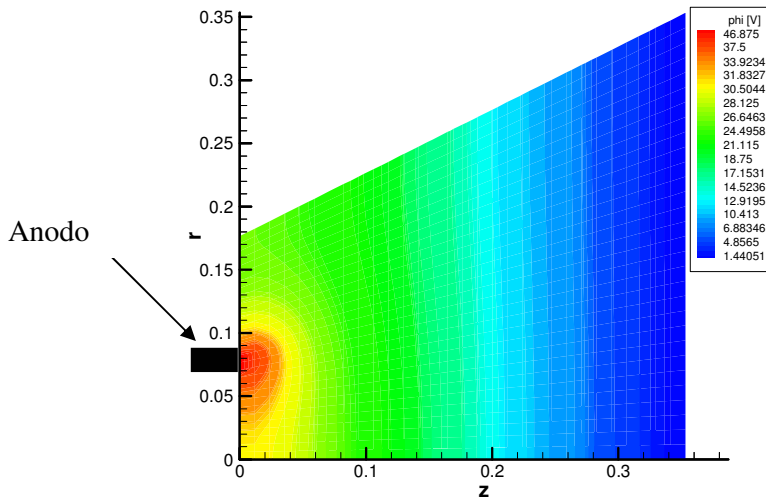


Figura 8.2: Distribuzione di potenziale all'inizio della simulazione

Il campo magnetico esterno è già stato descritto nel capitolo 5 si riportano qui solo le linee di corrente e il modulo di  $\mathbf{B}$ .

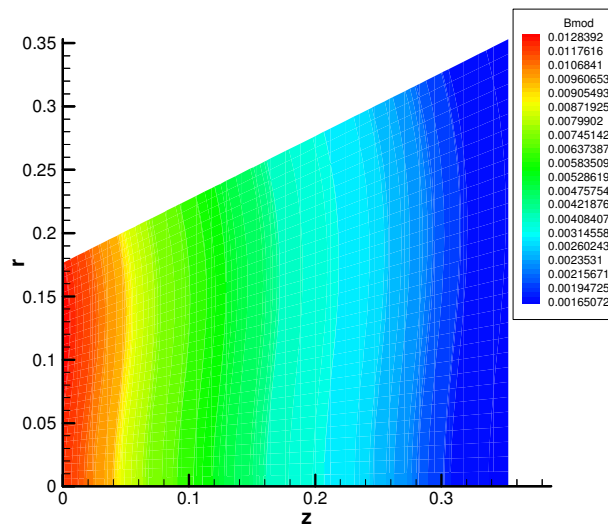


Figura 8.3: Modulo del campo magnetico esterno

## Risultati

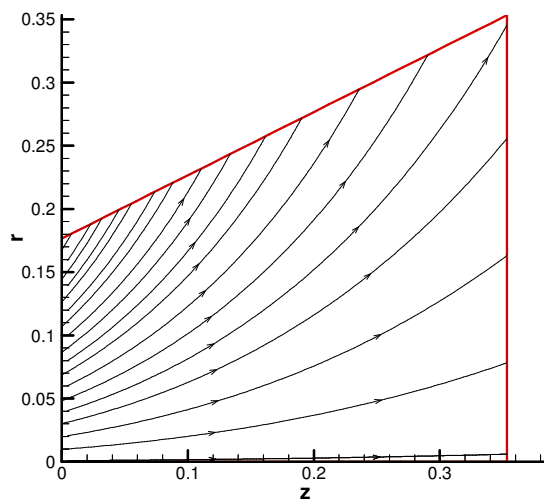


Figura 8.4: Linee del campo magnetico esterno

Dall'analisi delle caratteristiche del getto in uscita dal motore si è osservato che le linee di corrente degli ioni seguono inizialmente le linee di campo magnetico per poi staccarsene quando raggiungono una zona sufficientemente a valle dell'uscita del motore, questo effetto è facilmente identificabile nella zona più esterna del getto dove le linee di corrente hanno prima concavità nulla ( quando vengono iniettate), poi concavità rivolta verso l'alto (quando iniziano a seguire le linee di campo magnetico), e infine rivolta verso il basso (quando se ne staccano) . Questo andamento si è riscontrato più marcatamente all'aumentare del campo esterno durante le prove effettuate. E' da notare infine che lo stesso fenomeno è stato osservato durante le campagne di esperimenti realizzati al Centrosazio sul motore MPD oggetto di questo studio. Il comportamento degli ioni è da imputare probabilmente anche all'inserimento di questi nella regione della simulazione con velocità solamente lungo l'asse  $z$ ; una distribuzione di velocità più simile a quella reale, con componente perciò anche radiale già all'uscita del motore, potrebbe sviluppare una tendenza ancora maggiore degli ioni a seguire le linee del campo magnetico che tendono lontano dall'asse a richiudersi molto rapidamente su loro stesse.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

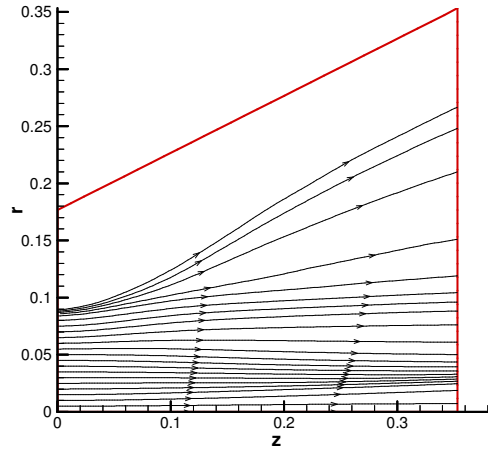


Figura 8.5: Linee di corrente per gli ioni

La velocità assiale come era prevedibile aumenta spostandosi verso valle, a causa dell'effetto accelerativo dovuto all'interazione di campo magnetico azimutale con la velocità radiale delle particelle; mentre la velocità radiale allontanandosi dall'asse, a causa dell'effetto combinato di espansione e campo magnetico applicato. Si nota inoltre una zona all'interno del plasma in cui la velocità radiale è negativa ovvero rivolta verso l'asse una possibile spiegazione è data dall'azione di contenimento del campo magnetico indotto che in una zona dove il campo magnetico esterno è quasi completamente assiale opera in maniera predominante.

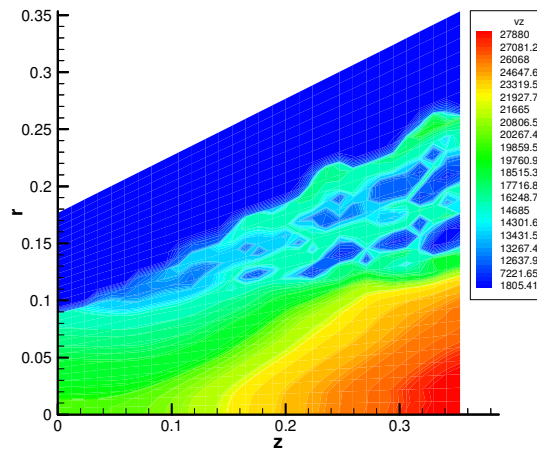


Figura 8.6: Velocità assiale ionica



## Risultati

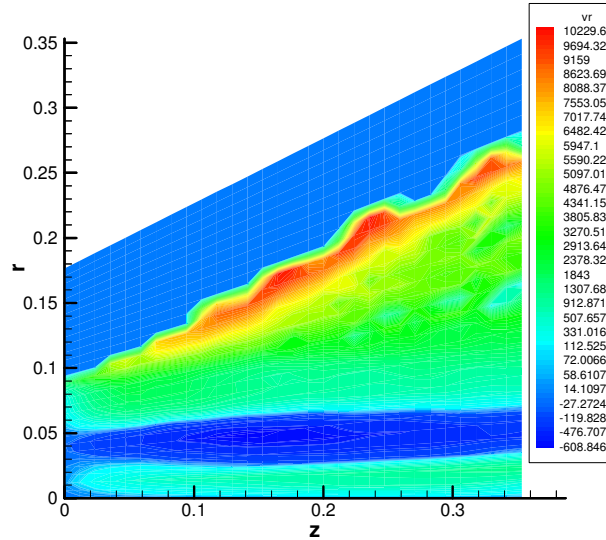


Figura 8.7: velocità radiale ionica

La velocità azimutale degli ioni cresce tendenzialmente allontanandosi dall'asse, a distanze notevoli torna però a decrescere; questa propensione può essere giustificata dal diminuire del modulo del campo magnetico esterno in quelle zone, diretto responsabile della rotazione delle particelle in direzione tangenziale. La densità del plasma risulta, come era prevedibile, massima su piano di uscita del motore e sull'asse di simmetria diminuendo progressivamente allontanandosi sia radialmente che assialmente, la causa diretta è l'accelerazione delle particelle dovuta all'espansione in una regione a bassissima densità, in parte limitata dall'azione di contenimento del campo magnetico indotto, particolarmente in prossimità dell'asse.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore MPD con campo magnetico applicato*

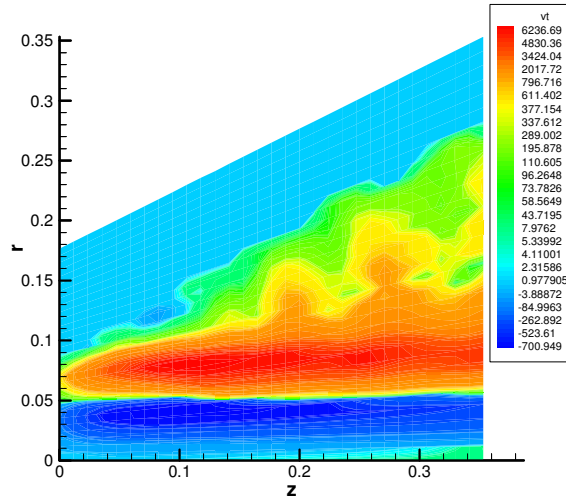


Figura 8.8: Velocità azimutale ionica

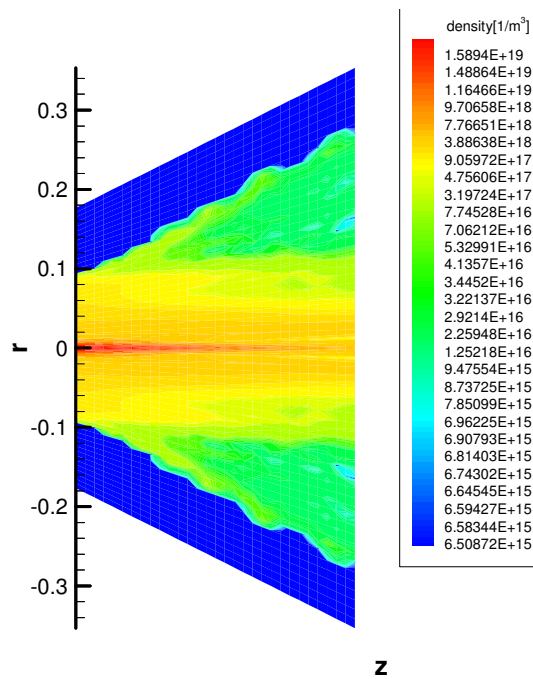


Figura 8.9: Densità numerica del plasma

## Risultati

L'aspetto del getto esternamente al motore può essere paragonato all'aspetto del getto durante le prove sperimentali:

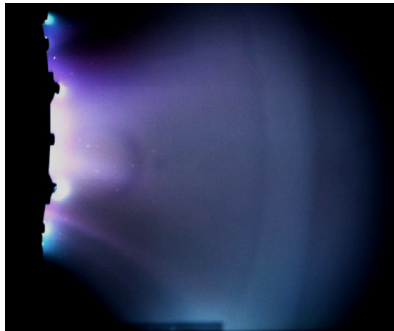


Figura 8.10: Aspetto del getto all'uscita di un motore MPD

Gli andamenti della pressione e della temperatura elettronica rispecchiano il comportamento della densità, diminuendo allontanandosi sia radialmente che assialmente dalla bocca di uscita del motore.

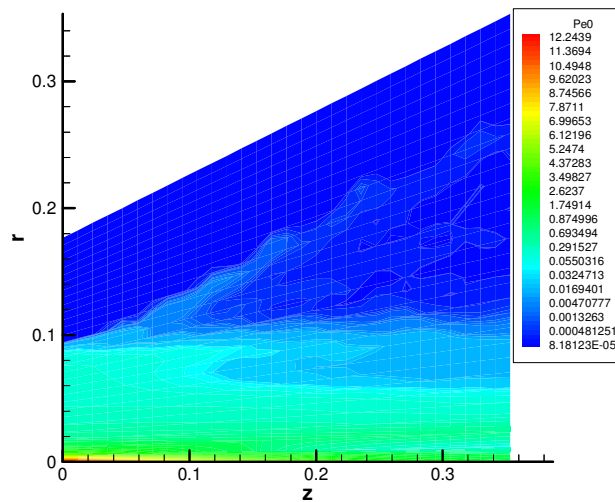


Figura 8.11: Pressione elettronica

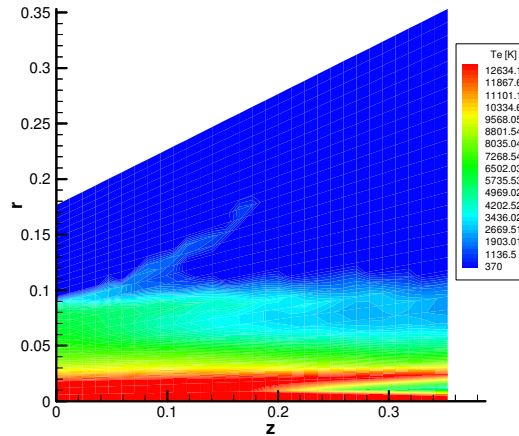


Figura 8.12: Temperatura elettronica

Diretta conseguenza della temperatura elettronica e della densità all'interno del plasma è il coefficiente di ricombinazione che, dai calcoli effettuati risulta piuttosto piccolo. La probabilità di ricombinazione che ne deriva è conseguentemente sempre molto piccola. Due motivi si possono identificare per analizzare questo andamento: il primo è la dimensione di ogni macroparticella che probabilmente è troppo grande, infatti la probabilità che  $10^{10}$  ioni si ricombinino contemporaneamente è in ogni caso molto piccola, sarebbe perciò necessario diminuire le dimensioni delle macroparticelle di neutri che si formano così da avere maggiori probabilità che il fenomeno avvenga, oppure si potrebbe diminuire il peso di ogni macroparticella ionica, ma questo causerebbe problemi di tempi di calcolo difficilmente superabili. Il secondo è dovuto all'intero tempo della simulazione che risulta troppo breve perché si verifichi una ricombinazione apprezzabile; si era già parlato delle diverse scale temporali che caratterizzavano la dinamica dei plasmi, questo è un esempio di come sia difficile conciliare fenomeni che avvengono su scale brevi con fenomeni che avvengono su scale lunghe, sarebbe infatti necessario protrarre la simulazione per cogliere l'effetto di ricombinazione. Intorno al secondo sarebbe possibile percepire una considerevole ricombinazione, ma questo corrisponderebbe ad effettuare  $10^9$  passi temporali.

Risultati

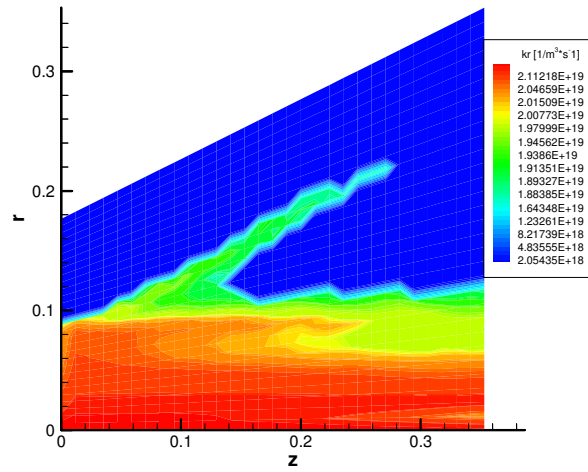


Figura 8.13: Coefficiente di ricombinazione ioni-elettroni

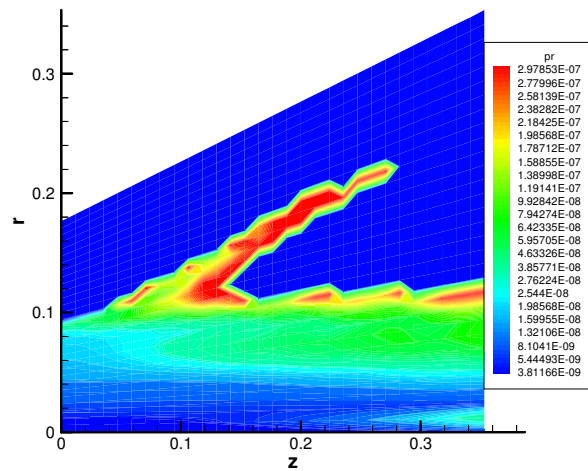


Figura 8.14: Probabilità di ricombinazione per una macroparticella

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

Analizziamo infine gli andamenti delle densità di corrente ionica ed elettronica, le linee di corrente date dalla somma della corrente ionica ed elettronica che scorrono all'interno del plasma, e il campo magnetico indotto azimuthale.

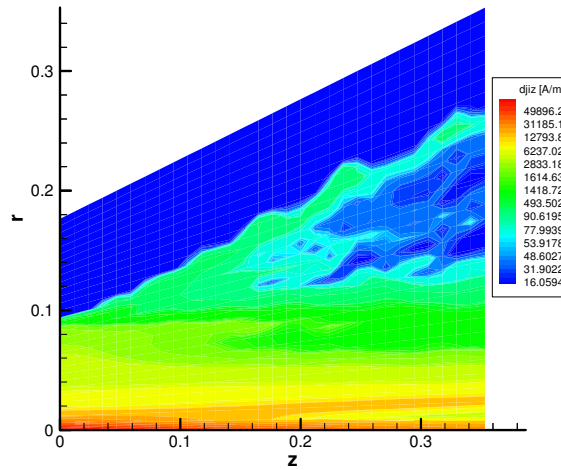


Figura 8.15: densità di corrente ionica assiale

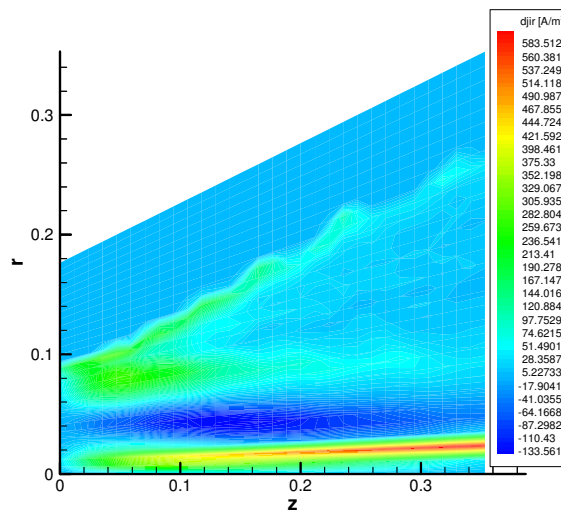


Figura 8.16: Densità di corrente ionica radiale

## Risultati

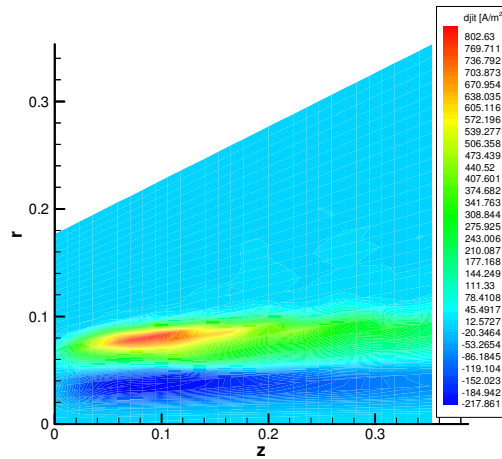


Figura 8.17: Densità di corrente ionica azimutale

Si nota che una corrente netta esiste in prossimità dell'anodo, dove gli elettroni tendono a migrare dopo essere stati iniettati sul piano di uscita del motore. Spostandosi verso valle questo effetto si attenua; non esiste più un moto ordinato di cariche negative e un comportamento più caotico prevale, fino che la corrente totale diventa nulla. Allontanandosi dal motore perciò, gli elettroni tendono a seguire gli ioni.

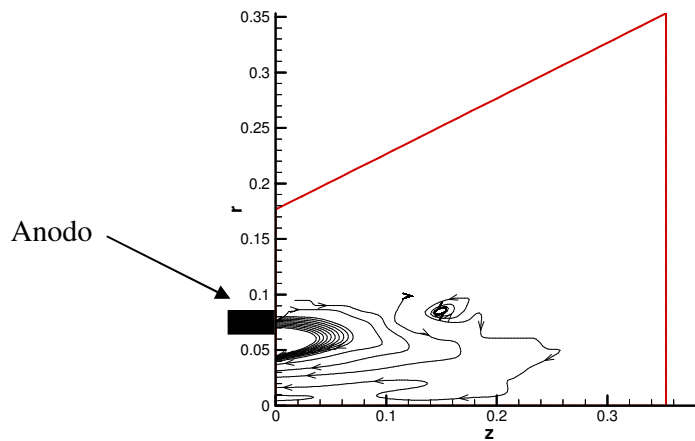


Figura 8.18: Linee di corrente totale

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

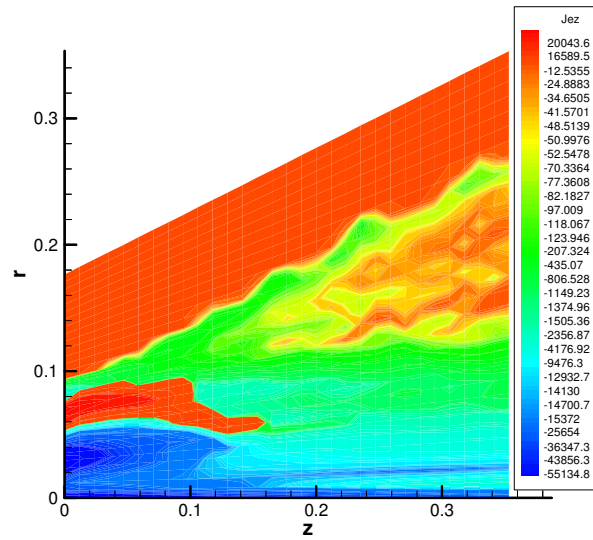


Figura 8.19: Densità di corrente elettronica assiale

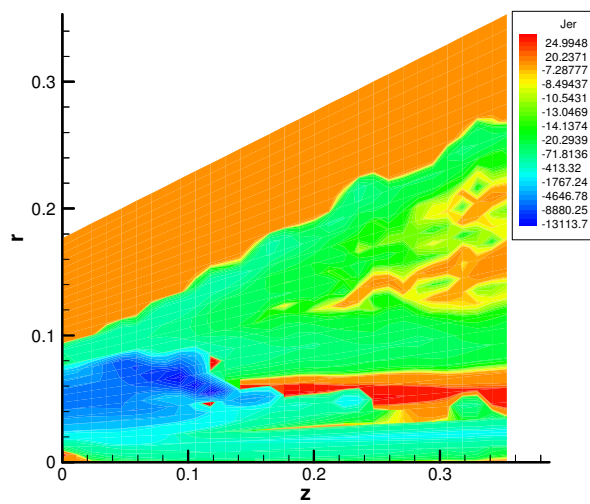


Figura 8.20: Densità di corrente elettronica radiale



## Risultati

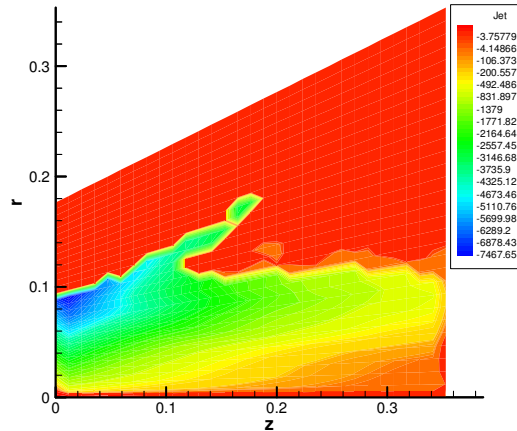


Figura 8.21: densità di corrente elettronica azimutale

Oltre al moto di migrazione degli elettroni verso l'anodo si è osservato che esiste una componente della corrente diversa da zero anche in direzione azimutale, il motivo di questa corrente è da imputare al campo magnetico esterno che obbliga le particelle ad effettuare delle rotazioni mentre si spostano verso valle. Questo fenomeno è stato anticipato nel Capitolo 3, quando si è effettuata l'analisi euristica del comportamento del motore, il risultato è perciò in accordo con le previsioni effettuate.

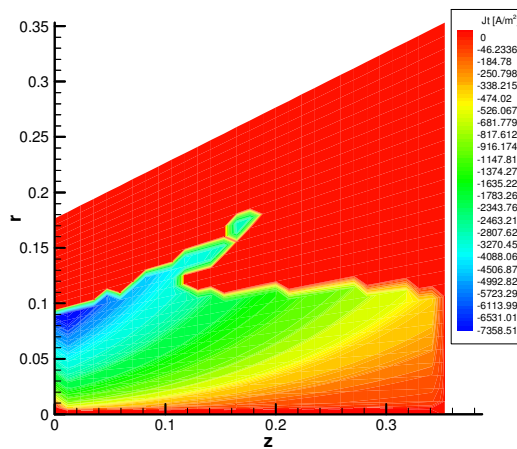


Figura 8.22: Densità di corrente azimutale totale

Il campo magnetico indotto azimutale risulta essere massimo sulla bocca del motore, dove infatti una maggiore corrente totale è stata calcolata, inoltre la sua variazione avviene principalmente in direzione assiale e in misura minore in direzione radiale, diminuendo cioè avvicinandosi all'asse; una possibile spiegazione è che la minore massa contenuta all'interno di un circuito che racchiude il plasma implica una minore corrente trasportata al suo interno e perciò un minor campo magnetico che dovrebbe annullarsi sull'asse di simmetria.

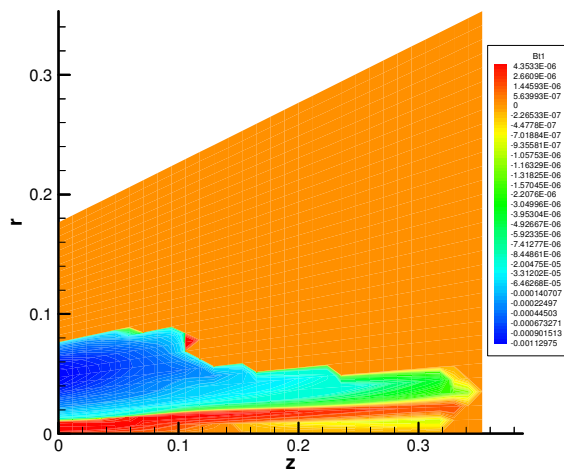


Figura 8.23: Campo magnetico indotto azimutale

### **8.4.2 Risultati della simulazione all'interno del motore**

La regione compresa fra anodo e catodo del motore è fenomenologicamente più complessa, e di conseguenza la simulazione che ha interessato questa zona è stata più difficile. Le difficoltà che si sono incontrate hanno riguardato principalmente l'analisi e l'implementazione delle condizioni al contorno per elettrodi e parete isolante. Le condizioni che si sono adottate e che sono state discusse nei capitoli precedenti, probabilmente non si sono rivelate completamente adatte alla soluzione del problema, inoltre le dimensioni ridotte del motore rispetto alla

## Risultati

griglie adottate hanno probabilmente causato problemi di tipo numerico. Infine è da ricordare che il modello scelto per descrivere l'accelerazione non necessariamente potrebbe essere il più adatto, potrebbero essere necessarie integrazioni oppure scelte di tipo differente per meglio rappresentare il fenomeno. Si riportano di seguito l'andamento del potenziale all'inizio della simulazione, le linee di campo elettrico e l'intensità di quest'ultimo, nonché le linee di campo magnetico e il valore del suo modulo all'interno della camera del motore.

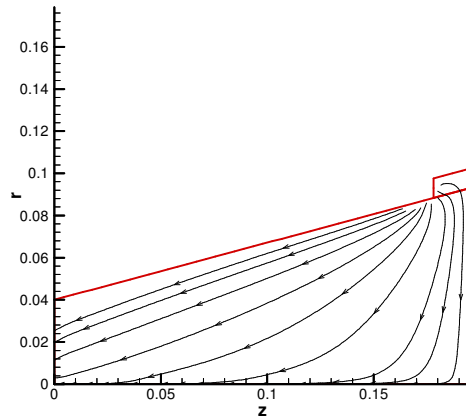


Figura 8.24: Linee di campo elettrico all'interno del motore

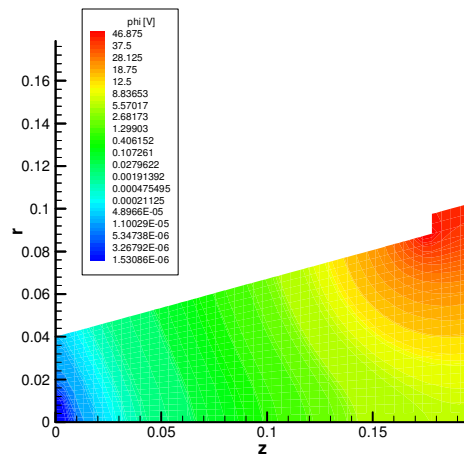


Figura 8.25: Andamento del potenziale all'inizio della simulazione

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

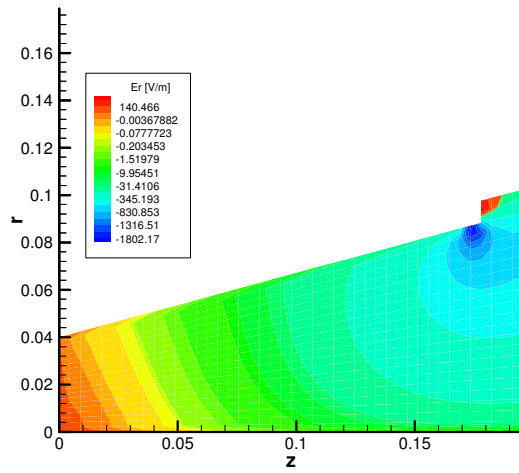


Figura 8.26: Campo elettrico radiale all'inizio della simulazione

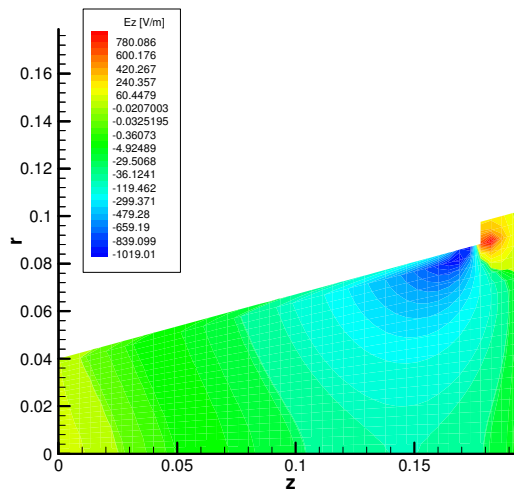


Figura 8.27: Campo elettrico assiale all'inizio della simulazione

## Risultati

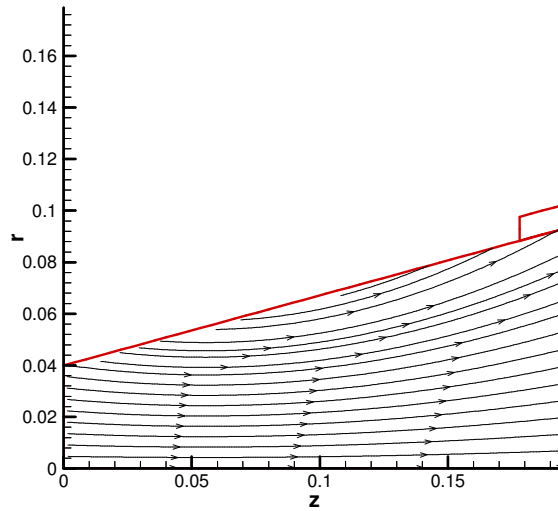


Figura 8.28: Linee di campo magnetico applicato

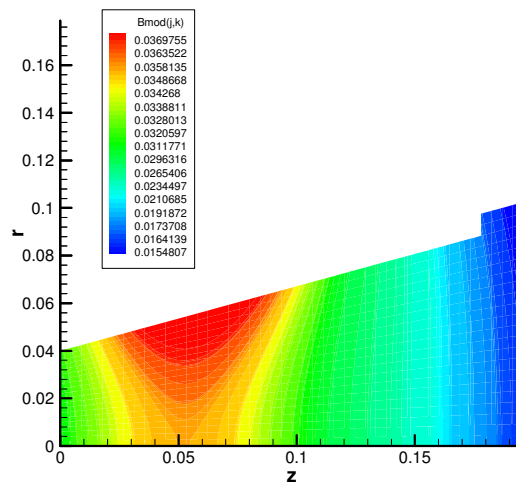


Figura 8.29: Modulo del campo magnetico applicato

L'equilibrio in termini di massa viene raggiunto in questo caso dopo circa 3000 passi temporali con un passo di integrazione pari a  $10^{-8}$  [s]. L'ipotesi che si fa è che quando la massa all'interno della camera diventa costante si pervenga a una situazione stazionaria.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore MPD con campo magnetico applicato*

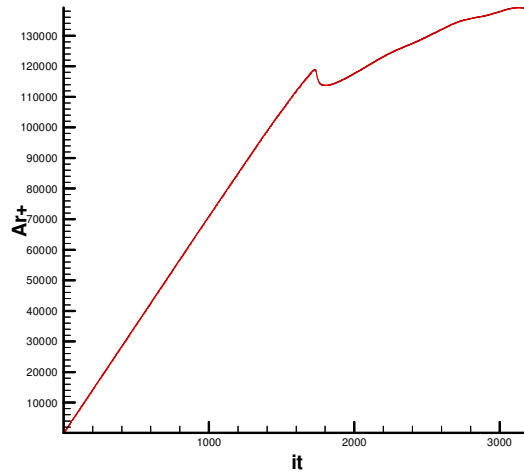


Figura 8.30: Numero di particelle all'interno della regione durante la simulazione

La densità di plasma varia sia spostandosi a valle che allontanandosi dall'asse, esiste un'eccezione nelle vicinanze dell'anodo dove la massa torna a crescere. Questo risultato è in accordo con le osservazioni sperimentali riguardo a motori di questo tipo.

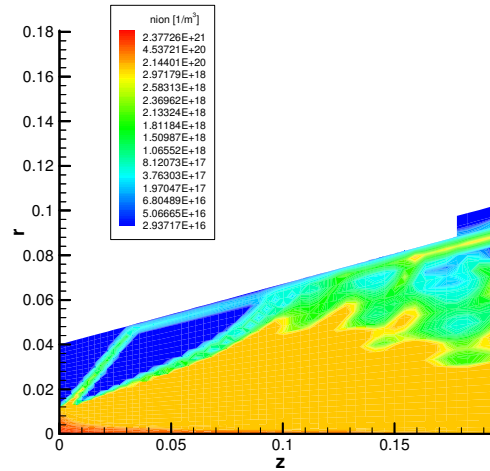


Figura 8.31: Densità numerica del plasma

Le linee di corrente degli ioni sono come si aspettava rivolte verso l'esterno della camera.

## Risultati

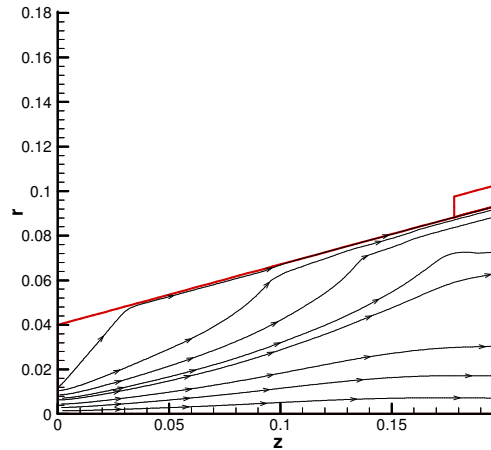


Figura 8.32: Linee di corrente degli ioni all'interno della camera

La velocità assiale delle particelle tende ad aumentare all'uscita del catodo; questa tendenza non è poi rispettata nella zona centrale del canale dove le particelle rallentano, per poi tornare ad aumentare nella parte terminale del canale. Si notano inoltre velocità sostenute in prossimità dell'anodo e regioni molto ristrette dove la velocità diventa molto alta; quest'ultimo fenomeno è dovuto probabilmente a cause di tipo numerico, infatti in queste zone si nota una bassa densità e perciò un piccolo numero di particelle è contenuto nelle celle interessate, ciò causa instabilità e fluttuazioni come si era accennato nei capitoli precedenti. Si è notato che questo effetto si presenta durante la simulazione in alcune di queste zone e velocemente scompare al progredire della simulazione.

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

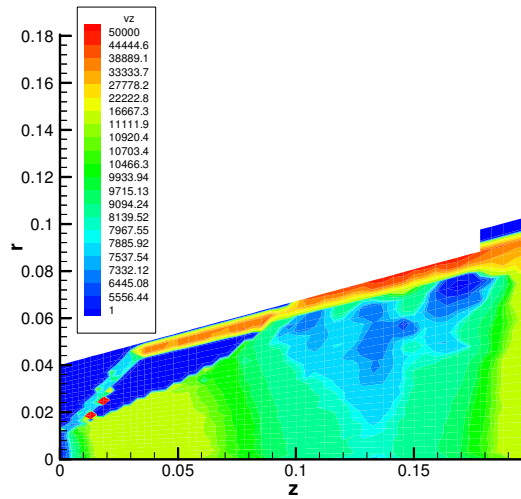


Figura 8.33: velocità assiale degli ioni

La velocità radiale aumenta come era prevedibile allontanandosi dall'asse dove assume valore nullo.

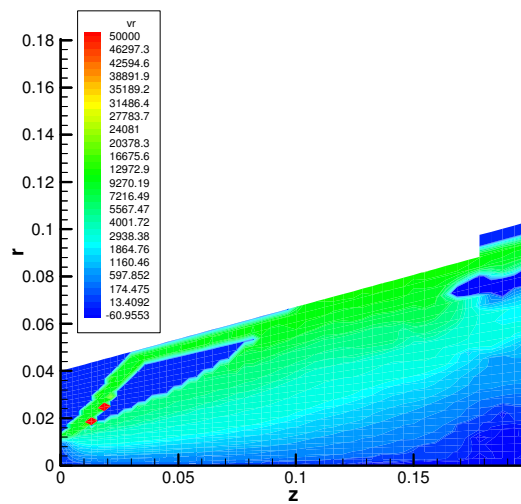


Figura 8.34: velocità radiale degli ioni



# Conclusioni

## 9.1 Conclusioni

Il lavoro svolto nell'ambito della tesi ha avuto come principale obiettivo la realizzazione di tecniche di analisi numerica per la dinamica dei plasmi. In particolare lo studio si è concentrato sulla realizzazione di strumenti per il calcolo delle caratteristiche di un motore MPD con campo magnetico applicato. Lo sviluppo del modello è stato preceduto da una vasta ricerca in letteratura riguardo alle tecniche di simulazione di plasmi, sia da laboratorio che spaziali. La propulsione elettrica, infatti, coglie aspetti sia di una che dell'altra disciplina, combina cioè caratteristiche tipiche dei plasmi da laboratorio: confinamento fra pareti e contatto con elettrodi; con caratteristiche tipiche dei plasmi spaziali: alta rarefazione, la quale rende problematico l'utilizzo della fluidodinamica nella descrizione di questi fenomeni. Le molteplici scale temporali coinvolte nella dinamica dei plasmi e la difficoltà riscontrata con altre tecniche di simulazione nel predire il comportamento di questi motori, ha suggerito di tentare un altro approccio rispetto a quelli tradizionali. I codici ibridi che sono stati realizzati con questo scopo, uniscono tecniche di analisi particellare a metodi fluidodinamici per lo studio della dinamica dei plasmi. Il motivo può essere ricercato nelle differenti caratteristiche di ioni ed elettroni quali la massa molto minore e le frequenze

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

molto più alte che caratterizzano il moto degli elettroni. L'utilizzo di metodi particellari anche per gli elettroni costringe ad abbassare il passo di integrazione di alcuni ordini di grandezza e perciò allunga i tempi di calcolo considerevolmente. Inoltre l'interesse che il moto degli elettroni ha nel campo propulsivo è dovuto alla generazione dei campi elettromagnetici, in particolare alla generazione di campi magnetici molto elevati che causano l'effetto accelerativo nei confronti degli ioni, rispetto al contributo che danno alla spinta per effetto della conservazione della quantità di moto. Lo studio della dinamica degli elettroni è legata perciò solamente alla determinazione di correnti e di campi.

Per la regione esterna al motore MPD i risultati che si sono ottenuti nelle simulazioni effettuate sono parse soddisfacenti, si sono riusciti a riprodurre con successo le caratteristiche principali del getto evidenziate anche sperimentalmente, le linee di corrente di ioni ed elettroni sono risultate simili a quelle che si aspettava, inoltre si è riprodotto il legame fra linee di corrente ioniche e linee di campo magnetico, nonché la tendenza degli elettroni una volta usciti dalla bocca del motore a migrare verso l'anodo. Nella regione interna al motore, la simulazione è avvenuta con ipotesi semplificate rispetto al modello che si è sviluppato, la forte instabilità nel calcolo del campo magnetico indotto non è stato risolto e di conseguenza un aspetto importante della simulazione nella camera accelerativa è stato trascurato. Una spiegazione può essere ricercata nella difficoltà di simulare le adatte condizioni al contorno per le pareti e per anodo e catodo. In ogni caso le linee di corrente degli ioni sono sembrate, anche in questa zona, conformi alle aspettative. Un lavoro maggiore deve essere effettuato per lo sviluppo di un codice per la regione compresa fra anodo e catodo, e le ragioni di questo parziale insuccesso dovranno essere ricercate in futuro, sia nel modello fisico che nell'implementazione numerica. E' necessario indagare se diverse condizioni al contorno e condizioni iniziali possono cambiare le caratteristiche del getto, inoltre se è opportuno utilizzare un modello che richiede la quasineutralità

oppure se un modello che non la impone sia più opportuno per indagare questi fenomeni. Dal punto di vista numerico sarebbe necessario valutare l'impatto che un modo diverso di calcolare le derivate può avere sulla soluzione nonché sulle diverse condizioni in cui avviene la simulazione come il vuoto o l'alta rarefazione.

## **9.2 Sviluppi futuri**

Gli ulteriori sviluppi che possono essere portati ai codici riguardano due aspetti:

- Modello fisico
- Metodi numerici

Il modello fisico per la zona esterna è apparso soddisfacente per modellare il getto di plasma in uscita dal motore. L'equazione dell'energia, sebbene sia stata semplificata attraverso le ipotesi di fluido non viscoso, di flusso di calore nullo e termine collisionale trascurabile, è in questo caso appropriata per la descrizione del fenomeno di espansione di un plasma nel vuoto. Infatti per un gas che si espande nel vuoto il lavoro è nullo e poiché non c'è neanche scambio di calore, nel caso di termine collisionale piccolo, ipotesi spesso verificata, l'energia interna del sistema non varia. Se invece di espandersi nel vuoto si stabilisce una densità di fondo, l'ipotesi di espansione adiabatica diventa accettabile. Un fenomeno che può essere maggiormente indagato in questa zona è il fenomeno della ionizzazione e della ricombinazione. Come già accennato nel capitolo scorso la simulazione dell'effetto di ricombinazione deve essere trattato in modo diverso, devono essere pensate delle metodologie alternative come ad esempio variare il peso di una macroparticella neutra rispetto a una ionica; deve inoltre essere introdotto il termine di ionizzazione per stabilire una situazione di equilibrio fra elettroni che si formano e che si ricombinano. L'introduzione di questo termine porta a considerare in maniera più approfondita il termine di ionizzazione presente

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

nelle equazioni di bilancio per il fluido elettronico, in particolare valori adatti per la sezione d'urto per l'Argon devono essere calcolati od ottenuti sperimentalmente per le temperature che normalmente interessano il funzionamento del propulsore, relativamente basse rispetto ai dati che normalmente si trovano in letteratura.

Per la regione interna alla camera del motore può essere utilizzata un'equazione dell'energia più completa eventualmente non trascurando il termine di flusso di calore. L'analisi delle condizioni al contorno deve essere effettuata in maniera più approfondita non trascurando neanche la possibilità di introdurre la non neutralità per l'analisi dei campi elettromagnetici. L'introduzione del meccanismo di formazione di ioni ed elettroni può portare, all'interno della camera, a una simulazione più adeguata dei fenomeni fisici che avvengono nel propulsore; una notevole importanza potrebbe avere la formazione di ioni in prossimità dell'anodo dove potrebbero essere espulsi direttamente senza dover superare la zona dove il campo elettrico gli è avverso. L'inserimento delle collisioni per gli elettroni con gli atomi neutri può portare a risultati più consistenti attraverso un rallentamento nel flusso degli elettroni.

L'analisi del modello numerico porta a fare varie considerazioni. Le condizioni iniziali migliori con cui far partire la simulazione devono essere indagate. Bisogna valutare se è necessario ipotizzare la presenza di una distribuzione di particelle iniziali nel campo oppure è sufficiente stabilire una densità di fondo per la soluzione dell'equazione dell'energia. Deve essere anche valutato l'effetto di un diverso modo di calcolare le derivate, ovvero se centrate, oppure *backward* o *forward*. Deve essere valutato l'impatto che ha sulla simulazione l'utilizzo di particelle di peso diverso e l'impiego di diversi passi temporali. Infine una soluzione per risolvere alcuni dei problemi di instabilità numerica e di durata della simulazione, riguarda la variazione del peso delle macroparticelle durante la simulazione; il metodo prende il nome di PIC adattativo. La simulazione di un'espansione comporta spesso problemi di densità: il numero delle macroparticelle risulta molto grande in alcune zone e troppo piccolo in altre. Il

## *Conclusioni*

risultato è che la durata della simulazione cresce notevolmente senza però portare ad una maggiore precisione ed inoltre nelle zone a bassa densità si creano fenomeni di instabilità, dovuti all'esiguo numero di macroparticelle all'interno delle celle, che possono causare l'arresto del programma. Con un metodo PIC adattativo è possibile superare questi problemi, le macroparticelle vengono scomposte, quando raggiungono regioni della simulazione a bassa densità, in macroparticelle di peso minore conservando posizione, massa e quantità di moto.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Andrenucci M., Biagioni L., Passaro A.: “*PIC/DSMC Models for Hall Effect Thruster Plumes: Present Status and Ways Forward*”, 38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 7-10 July 2002, Indianapolis, IN.
- [2] Andrei G., Andrenucci M., Choueiri E.Y.: “*Theoretical Aspects of MPD Thruster Scaling*”, 17<sup>th</sup> International Electric Propulsion Conference, Tokyo, 1984.
- [3] Andrenucci M., Biagioni L., Marcuccio S., Paganucci F.: “*Fundamental Scaling Laws for Electric Propulsion Concepts*”, 28th International Electric Propulsion Conference, 17-21 March 2003, Toulouse, France.
- [4] Bagdonat T., Motschmann U.: “*3D Hybrid Simulation Code Using Curvilinear Coordinates*”, Journal of Computational Physics 183,470-485 (2002).
- [5] Birdsall C.K., Langdon A.B.: “*Plasma physics via computer simulation*”, McGraw-Hill, New York, 1985.
- [6] Bittencourt J.A.: “*Fundamentals of Plasma Physics*”, Pergamon, Oxford, 1986.
- [7] Caldo G., Choueiri E.Y., Kelly A.J., Jahn R.G.: “*An MPD Code with Anomalous transport*”, Princeton University, 1991.
- [8] Caprili M., “*Dispense di Calcolo Numerico*”.
- [9] Ciaburro G.: “*Manuale di fortran 90*”.
- [10] Ferziger J.H., Peri æ M.: “*Computational Methods for Fluid Dynamics*”, Springer-Verlag, Germany, 1999.
- [11] Fife J.M.: “*Hybrid-PIC Modeling and Electrostatic Probe Survey of Hall Thruster*”, Massachusetts Institute of Technology, September 1998.

- [12] Fife J.M.: “*two dimensional Hybrid Particle-In-Cell Modeling of Hall Thruster*”, Master Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Boston, 1995.
- [13] Fitzpatrick R: “*Classical Elettromagnetism*”, University of Texas, Austin, 1997.
- [14] Hill P.G., Peterson C.R.: “*Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*”, Addison-Wesley Publishing Company.
- [15] Horowitz J.E.: “*QN3D: A Three-Dimensional Quasi-neutral Hybrid Particle-in-cell Code with Application to the Tilt Mode Instability in field Reversed Configuration*”, Journal of Computational Physics 84,279-310 (1989).
- [16] Jahn R.G.: “*Physics of Electric Propulsion*”, McGraw Hill, 1968.
- [17] Jahn R.G.: “*Electric Propulsion*”, Encyclopedia of Physical Science and Technology, Third Edition, Volume 5, 2002.
- [18] Kameshwaran S.: “*Simulation of MPD Flows Using a Flux-Limited Numerical Method for the MHD Equation*”, Master Thesis, Princeton University, 2001.
- [19] Lipatov S.A.: “*The hybrid Multiscale Simulation Technology. An introduction with application to Astrophysical and Laboratory Plasmas*”, Springer, 2001.
- [20] Matthews P.A.: “*Current Advance Method and Cyclic Leapfrog for 2D Multispecies Hybrid Plasma Simulation*”, Journal of Computational Physics 112,102-116(1994).
- [21] Mickel: “*Modeling of Mw-Class Magnetoplasmadynamic Thrusters Using the Mach2 Code*”, Nasa, Glenn Research Center,2001.
- [22] Mitchner M., Kruger C.H., Jr: “*Partially Ionized Gases*”, Wiley Interscience, New York, 1973.
- [23] Passaro A., Saverdi M.: “*Sviluppo di Strumenti di Calcolo per la Valutazione dell’Interazione tra Getti di Plasmi Propulsivi e Veicolo*”



## Bibliografia

- Spaziale per la Progettazione a Livello di Sistema*”, Relazione finale contratto ASI/ ARS I/C/143/00/0, Giugno 2001.
- [24] Passaro A.: “*PICPlus 1.0 Overview of the Particle in Cell Plume Simulator*”, DOC. No.: PIC/TN-003/AP,25 Sept. 2001.
- [25] Lovitch L., Rosati S.: “*Fisica Generale*”, Casa Editrice Ambrosiana Milano, 2000.
- [26] Potter:” *Computational Physics*”, John Wiley (1973).
- [27] Szabo Jr J.J.: “*Fully kinetic numerical modeling of a Plasma Thruster*”, Massachussets Institute of Tecnology, Boston, 2001.
- [28] Subrata R., Pavlos M., Reddy D.R.: “ Effective Conversion of Exit Enthalpy in a MPD Thruster”, 40<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Nevada, 2002.
- [29] Sutton G.P.: “*Rocket Propulsion Elements*”, Wiley Interscience Publication, 1992.
- [30] Taccogna F.: “*Modello a Particelle della Dinamica del Plasma Emesso da un Propulsore Elettrico*”, Tesi di Laurea,1999.
- [31] Tajima T.: “*Computational Plasma Physics. With applications to fusion and astrophysics*”, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.



## APPENDICE A

### Relazioni vettoriali utili

Si riportano le più comuni relazioni vettoriali utili per la migliore comprensione dei passaggi riportati nei capitoli precedenti.

$$1. \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$2. \quad \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$3. \quad \vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

$$4. \quad \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{C} \cdot \vec{B})\vec{A}$$

$$5. \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$$

$$6. \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$7. \quad (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) = [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{D})]\vec{C} - [\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})]\vec{D}$$

$$8. \quad \vec{\nabla}(\phi\psi) = \phi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$$

$$9. \quad \vec{\nabla}(\phi\vec{A}) = \phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\nabla\phi$$

$$10. \quad \vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = \phi\vec{\nabla}\times\vec{A} + (\nabla\phi)\times\vec{A}$$

$$11. \quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

$$12. \quad \vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$13. \quad \vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$14. \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$15. \quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$$

$$16. \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$$

$$17. \quad (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\phi = \nabla^2\phi$$

## APPENDICE B

### Costanti fisiche

Si riportano i valori delle più comuni costanti fisiche utilizzate durante il lavoro.

Velocità della luce	$c = 2.998 \cdot 10^8$ [m/s]
Permittività del vuoto	$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ [F/m]
Permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]
Costante di Plance	$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ [J.s]
Costante di Boltzmann	$k = 1.381 \cdot 10^{-23}$ [J/K]
Costante di gravitazione universale	$G = 6.673 \cdot 10^{-11}$ [N.m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup> ]
Carica elementare	$e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ [C]
Massa del protone	$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$ [kg]
Massa dell'elettrone	$m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ [kg]
Massa del neutrone	$m_n = 1.675 \cdot 10^{-27}$ [kg]
Rapporto massa protone/elettrone	$m_p / m_e = 1.836 \cdot 10^3$
Numero di Avogadro	$N_A = 6.22 \cdot 10^{23}$ [mol <sup>-1</sup> ]
Costante universale dei gas( $N_A \cdot k$ )	$R = 8.314$ [J/Kmol]



## APPENDICE C

### Equazioni del moto in coordinate cilindriche

Poiché la geometria del problema ha suggerito un'implementazione delle equazioni che descrivono il problema in coordinate cilindriche, si sono riportate le relazioni che sono state utilizzate in questo sistema di riferimento.

- Componenti del gradiente:

$$(\vec{\nabla} \psi)_r = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$(\vec{\nabla} \psi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$(\vec{\nabla} \psi)_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

- Divergenza:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Componenti del rotore:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_\phi$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi = \frac{\partial}{\partial z} A_r - \frac{\partial}{\partial r} A_z$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} A_r$$

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

- Laplaciano:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

- Legge di Ohm:

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_\phi \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} U_{e\phi} B_z - U_{ez} B_\phi \\ U_{ez} B_r - U_{er} B_z \\ U_{er} B_\phi - U_{e\phi} B_r \end{pmatrix} - \frac{1}{en_e} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_e}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p_e}{\partial \phi} \\ \frac{\partial p_e}{\partial z} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma_{eff}} \begin{pmatrix} J_r \\ J_\phi \\ J_z \end{pmatrix} - \frac{m}{e} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_{er} \\ U_{e\phi} \\ U_{ez} \end{pmatrix}$$

- Legge di Faraday:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_r \\ B_\phi \\ B_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix}$$

- Legge di Ampere:

$$\begin{pmatrix} J_r \\ J_\phi \\ J_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rB_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix}$$



## APPENDICE D

### Transizione fra equazioni iperboliche ed ellittiche

Come riportato nel capitolo 7 l'utilizzo del modello semplificato per le equazioni del modello elettromagnetico porta a trasformare l'equazione che esprime il campo elettrico tangenziale da un'equazione iperbolica ad un'equazione ellittica; questo fenomeno obbliga perciò alla determinazione del campo in maniera implicita piuttosto che esplicita. La transizione della natura dell'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE) da iperbolica ad ellittica avviene a causa del congelamento dell'evoluzione temporale del campo elettrico nel modello di Darwin rispetto al modello completo delle equazioni elettromagnetiche. Esso rappresenta il livello più basso della scala temporale, poiché contiene tutte le scale temporali inclusa la veloce scala della radiazione. L'equazione combinata di Maxwell per  $\vec{E}_t$  è:

$$\nabla^2 \vec{E}_t - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} \quad (\text{D-1})$$

Nella scala temporale più lenta la dipendenza temporale della corrente di spostamento viene congelata. Così il secondo termine dell'equazione (D-1) viene eliminato. Questa è la manifestazione del cambio della natura della PDE dovuto alla differente gerarchia dell'osservazione (descrizione). L'equazione ellittica nasce dall'equazione iperbolica nella scala temporale più lenta, poiché il campo elettrico si aggiusta istantaneamente per soddisfare:

$$\nabla^2 \vec{E}_t = \mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} \quad (D-2)$$

Allo stesso modo il campo elettrico è determinato istantaneamente da questa equazione.

Studiamo ora le equazioni di Maxwell alle differenze finite. Possiamo scriverle nel seguente modo:

$$\vec{B}^{n+1/2} - \vec{B}^{n-1/2} = -\Delta t \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}^n \quad (D-3)$$

$$\vec{E}^{n+1} - \vec{E}^n = \Delta t (c \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}^{n+1/2} - \frac{c}{\mu_0} \vec{J}^{n+1/2}) \quad (D-4)$$

$$\vec{J}^{n+1/2} - \vec{J}^{n-1/2} = \Delta t \frac{ne^2}{m} \vec{E}^n \quad (D-5)$$

L'equazione (D-5) deriva da  $\dot{v} = -eE/m$ . Analizziamo la stabilità attraverso il fattore di amplificazione g:

$$(g-1)B + \Delta t ckE = 0 \quad (D-6)$$

$$(g-1)E + \Delta t ckBg + \frac{c}{\mu_0} \Delta t Jg = 0 \quad (D-7)$$

$$(g-1)J - \Delta t \frac{ne^2}{m} E = 0 \quad (D-8)$$

Con k dimensione della griglia. L'equazione secolare diventa:

$$(g-1)^3 + (g-1)\Delta t^2 c^2 k^2 g + (g-1)\omega_p^2 \Delta t^2 g = 0 \quad (D-9)$$

Le cui soluzioni sono g=1 oppure:

$$g^2 - 2 \left( 1 - \frac{\omega_p + k^2 c^2}{2} \Delta t^2 \right) + 1 = 0 \quad (D-10)$$

## Appendice D

Che porta a:

$$|g|^2 = 1 \quad \text{se} \quad 1 > (\omega_p^2 + k^2 c^2) \Delta t^2 / 2 \quad (\text{D-11})$$

$$|g|^2 = (A + \sqrt{A^2 + 1}) \quad \text{se} \quad 1 < (\omega_p^2 + k^2 c^2) \Delta t^2 / 2 \quad (\text{D-12})$$

Dove:

$$A \equiv 1 - \frac{\omega_p^2 + k^2 c^2}{2} \Delta t^2 \quad (\text{D-13})$$

Così otteniamo la condizione di stabilità:

$$\Delta t < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega_p^2 + k^2 c^2}} \quad (\text{D-14})$$

La stabilità dello schema esplicito è garantita da un passo temporale sufficientemente piccolo che assicura che il segnale più veloce non attraversi una cella all'interno di un passo temporale. Questa è una condizione di Courant-Friedrichs-Lewy. Nello schema esplicito, l'equazione iperbolica mantiene la sua natura finché rimane stabile. Utilizziamo ora uno schema implicito per risolvere le equazioni di Maxwell:

$$\vec{B}^{n+1/2} - \vec{B}^{n-1/2} = -\Delta t \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}^{n+1} \quad (\text{D-15})$$

$$\vec{E}^{n+1} - \vec{E}^n = \Delta t (c \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}^{n+1/2} - \frac{c}{\mu_0} \vec{J}^{n+1}) \quad (\text{D-16})$$

$$\vec{J}^{n+1} = \vec{J}^n + \Delta t \frac{ne^2}{m} \vec{E}^{n+1} \quad (\text{D-17})$$

L'equazione (D-15) porta a:

*Sviluppo di un modello Ibrido-Particellare per lo studio di un motore  
MPD con campo magnetico applicato*

$$(1 + k^2 c^2 \Delta t^2 + \omega_p^2 \Delta t^2) E^{n+1} = E^n + \Delta t c k \times B^{n+1/2} - \frac{c}{\mu_0} \Delta t J^n \quad (D-18)$$

Se si trascura il termine  $(\Delta t)^0$  l'equazione sopra diventa:

$$E^{n+1} (k^2 c^2 + \omega_p^2) \Delta t = c k \times B^{n+1/2} - \frac{c}{\mu_0} J^{n-1} = S \quad (D-19)$$

Se eliminiamo il termine sorgente l'equazione (D-19) diventa:

$$c^2 \nabla \times \nabla \times E + \omega_p^2 E = 0 \quad (D-20)$$

Che è una tipica equazione ellittica.

Un'equazione parabolica come ad esempio l'equazione della diffusione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (D-21)$$

Contiene un termine iperbolico (il secondo termine a sinistra dell'uguale). Questa equazione mostra un dominio di influenza rispetto a un punto arbitrario  $(x, t)$  marcato dalla linea caratteristica di pendenza  $\pm \sqrt{\Delta t / 2k}$  lungo  $(x, t)$  come mostrato in figura:

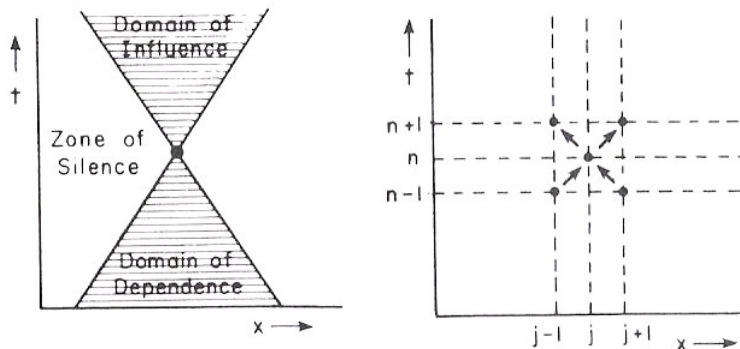


Figura D-1: Equazione differenziale iperbolica, domini di influenza e dipendenza e zona di silenzio

## Appendice D

Un diagramma spazio-tempo mostra che ogni punto ha un dominio di dipendenza, un dominio di influenza e una zona di silenzio. La pendenza della caratteristica che racchiude queste zone è data da  $\pm \sqrt{\Delta t / 2k}$ .

In uno schema alle differenze, il punto  $(j, n)$  dipende da  $(j \pm 1, n-1)$  e influenza  $(j \pm 1, n+1)$ . Se confrontiamo il dominio di influenza della PDE, con quello della appropriata equazione alle differenze, si può derivare la condizione CFL per la differenti pendenze:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{\frac{\Delta t}{2k}} \Rightarrow \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{k} \quad (\text{D-22})$$

Questo significa che è necessario includere l'intero dominio di influenza della PDE all'interno del dominio di influenza che stiamo considerando per il calcolo.