Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea

12 luglio 2004

Equazione del trasporto e problema di Cauchy per campi vettoriali debolmente differenziabili

Candidato	Relatore
Gianluca Crippa	Prof. Luigi Ambrosio

Anno Accademico 2003/2004

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è lo studio della buona positura dell'equazione del trasporto e dell'equazione differenziale ordinaria per campi vettoriali $b(t,x)$ aventi poca regolarità rispetto alla variabile spaziale x.

Cominciamo con il descrivere in maniera più dettagliata i vari aspetti del problema. Sia $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale boreliano. Il *problema euleriano* consiste nello studio della buona positura della seguente equazione lineare alle derivate parziali, detta **equazione del trasporto** o **equazione di continuità**:

$$\text{(PDE)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mu_t}{\partial t} + D_x \cdot (b\mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \bar{\mu}\,. \end{cases}$$

Tale equazione è da intendersi nel senso delle distribuzioni su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ e una soluzione, indicata con μ_t, sarà una famiglia dipendente dal tempo di misure reali su $\mathbb{R}^d$ che al tempo $t = 0$ coincida con $\bar{\mu}$. Questo problema è classicamente collegato al *problema lagrangiano*, riguardante esistenza ed unicità per l'**equazione ordinaria**

$$\text{(ODE)} \qquad \begin{cases} \dot{\psi}(t) = b(t, \psi(t)) \\ \psi(0) = x\,. \end{cases}$$

Per questo problema si può sperare in un'unicità "generica", cioè per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni dato iniziale $x \in \mathbb{R}^d$. Una richiesta più debole (alla quale si riuscirà a dare in certi casi una risposta positiva) è quella relativa alla ricerca di un *principio di selezione*, che ci permetta di identificare per quasi ogni x una traiettoria $\psi(\cdot, x)$ in modo che tale scelta sia stabile rispetto ad approssimazioni regolari del campo vettoriale b.

Il setting classico del problema consiste nel considerare il caso in cui $b(t,x)$ sia localmente lipschitziano in x, uniformemente rispetto a t. In questo caso, la buona positura (locale nel tempo) dell'(ODE) è garantita dal *teorema di Cauchy–Lipschitz*, mentre esistenza ed unicità per la (PDE) sono garantite dalla *teoria delle caratteristiche.*

Il primo approccio al problema nel caso in cui il campo sia solo debolmente differenziabile è dovuto a **R. J. DiPerna e P. L. Lions** ([32], 1989), che affrontano il caso in cui la dipendenza dalla variabile spaziale sia di tipo Sobolev. L'ingrediente chiave del lavoro di DiPerna e Lions è l'introduzione del concetto di *soluzione rinormalizzata*, cioè di una soluzione debole dell'equazione del trasporto (limitata, cioè rappresentabile come $\mu_t = w_t \mathscr{L}^d$ con $w_t \in L^\infty$) per cui valga

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b \cdot \nabla_x w = c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \beta(w)}{\partial t} + b \cdot \nabla_x \beta(w) = c\beta'(w)$$

per ogni funzione $\beta \in C^1(\mathbb{R})$. Questa implicazione segue immediatamente dalla formula di derivazione della funzione composta nel caso in cui la soluzione w sia differenziabile in senso classico, ma necessita di una prova diretta nel caso in cui w non sia regolare. Lo *schema di regolarizzazione di DiPerna e Lions* è particolarmente naturale: consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b \cdot \nabla_x w = c$$

e convolviamo entrambi i membri con un nucleo di regolarizzazione ρ_ϵ. Definendo $w_\epsilon = w * \rho_\epsilon$ e moltiplicando l'equazione ottenuta per $\beta'(w_\epsilon)$, con pochi passaggi si ottiene che

$$\frac{\partial \beta(w_\epsilon)}{\partial t} + b \cdot \nabla_x \beta(w_\epsilon) = (c * \rho_\epsilon)\beta'(w_\epsilon) + \beta'(w_\epsilon)\big(b \cdot \nabla_x w_\epsilon - (b \cdot \nabla_x w) * \rho_\epsilon\big).$$

Allora definiamo il *commutatore* (tra l'operatore di convoluzione e quello di moltiplicazione per b)

$$r_\epsilon = b \cdot \nabla_x (w * \rho_\epsilon) - (b \cdot \nabla_x w) * \rho_\epsilon.$$

Data la non–linearità della funzione β, per ottenere l'implicazione desiderata è necessario che il commutatore converga fortemente a zero. Nel caso trattato da DiPerna e Lions, questo si può dedurre dalla scrittura esplicita del commutatore come

$$-r_\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(t, x - \epsilon z) \left[\frac{b(t, x - \epsilon z) - b(t,x)}{\epsilon} \cdot \nabla \rho_\epsilon(z) \right] dz - (w \mathrm{div}_x b) * \rho_\epsilon(t,x)$$

e dal fatto che i rapporti incrementali di una funzione di Sobolev convergono fortemente alla derivata.

La proprietà di rinormalizzazione è molto importante, dato che da essa segue in modo molto naturale un *principio di confronto* per le soluzioni della (PDE). Questo principio garantisce che, se consideriamo due dati iniziali w_0 e $\widetilde{w}_0$ per l'equazione del trasporto con $w_0 \le \widetilde{w}_0$, le relative soluzioni soddisfano la disuguaglianza $w_t \le \widetilde{w}_t$ per ogni $t \in [0,T]$. Dal principio del confronto seguono l'*unicità* per le soluzioni dell'equazione del trasporto e teoremi di *stabilità* rispetto ad approssimazioni regolari del campo vettoriale e del dato iniziale. Inoltre, già nel lavoro di DiPerna e Lions è ben illustrato il passaggio dalla (PDE) alla (ODE): per regolarizzazione del campo vettoriale, ricordando la teoria delle caratteristiche nel caso classico ed applicando il teorema di stabilità, si ottiene l'esistenza di una soluzione distribuzionale dell'(ODE). Inoltre, grazie al risultato di unicità per la (PDE), viene dedotta l'unicità del flusso dell'equazione ordinaria.

Successivamente, **I. Capuzzo Dolcetta e B. Perthame** ([22], 1996) hanno esteso il risultato di DiPerna e Lions, mostrando che la proprietà di rinormalizzazione vale anche se solo la parte simmetrica della derivata distribuzionale del campo, i.e.

$$Eb = \frac{1}{2}\big(Db + {}^t Db\big) \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)]^{d\times d},$$

è una funzione localmente sommabile. La prima estensione significativa dei risultati a campi vettoriali con derivata misura è realizzata in un importante lavoro di **F. Bouchut** ([17], 2001), in cui viene introdotta la tecnica di *regolarizzazione anisotropa*: viene scelto un nucleo di convoluzione ρ non più radiale, ma con un profilo che dipende dalla direzione spaziale, in modo che nelle direzioni in cui il campo vettoriale ha meno regolarità si possa effettuare una regolarizzazione più veloce. Questa tecnica è stata raffinata in seguito da **F. Colombini e N. Lerner** ([26], 2003), permettendo di ottenere il lemma di rinormalizzazione nel caso di un campo vettoriale *conormale* BV, cioè nel caso in cui, a meno di un cambiamento di coordinate di classe $C^{1,1}$, la derivata del campo lungo tutte le direzioni tranne una sia una funzione sommabile e lungo la restante direzione sia una misura.

Infine, partendo dall'intuizione che, grazie al teorema del rango uno di Alberti, ogni campo vettoriale BV ha un comportamento asintoticamente conormale, **L. Ambrosio** ([7], 2003) ha mostrato la proprietà di rinormalizzazione nel caso di un campo vettoriale a variazione limitata. Nel caso BV non si ha convergenza forte dei rapporti incrementali, ma se ne può dare uno spezzamento canonico in cui un addendo converge fortemente alla parte assolutamente continua della derivata e l'altro viene stimato per mezzo della parte singolare della derivata. La proprietà di rinormalizzazione segue allora tramite un processo di localizzazione e di regolarizzazione anisotropa basato sul teorema di Alberti.

Nel suo lavoro, Ambrosio introduce anche una nuova tecnica che permette un naturale collegamento tra (PDE) e (ODE) senza alcuna ipotesi di regolarità sul campo. Essa si basa sostanzialmente sul *principio di sovrapposizione*, secondo il quale tutte le soluzioni positive della (PDE) si possono esprimere come sovrapposizioni di soluzioni caratteristiche. Se $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times C([0,T];\mathbb{R}^d))$ è una misura concentrata sull'insieme delle coppie (x,ψ) tali che ψ è una soluzione dell'equazione ordinaria con $\psi(0)=x$, allora è facile verificare che la misura μ_t^γ definita da

$$\mu_t^\gamma(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d\times C([0,T];\mathbb{R}^d)} \varphi(\psi(t))\,d\gamma(x,\psi) \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$$

è una soluzione della (PDE). Il principio di sovrapposizione ci garantisce che ogni soluzione positiva μ_t della (PDE) è di tale forma, cioè data μ_t esiste una misura $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times C([0,T];\mathbb{R}^d))$ tale che $\mu_t = \mu_t^\gamma$.

Il risultato di Ambrosio e il precedente lavoro di Capuzzo Dolcetta e Perthame ci hanno portato a congetturare che la proprietà di rinormalizzazione continui a valere anche nel caso in cui il campo vettoriale sia a *deformazione limitata*, cioè tale che la derivata simmetrica sia una misura localmente finita. Ciò è stato dimostrato (**L. Ambrosio, G. Crippa e S. Maniglia**, [10], 2004) nell'ipotesi più forte che il campo vettoriale sia speciale a deformazione limitata, cioè tale che la parte singolare della derivata sia concentrata su un insieme rettificabile di codimensione uno. La dimostrazione di questo fatto si basa su uno studio approfondito delle *tracce normali di campi con divergenza misura.* Se C è un campo vettoriale su $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ limitato e con divergenza misura, $D \cdot C \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, possiamo definire la traccia normale di C sul bordo di un aperto regolare $\Omega' \subset\subset \Omega$ come una distribuzione su Ω:

$$\langle \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega'), \varphi \rangle := \int_{\Omega'} \nabla\varphi \cdot C \, dx + \int_{\Omega'} \varphi \, dD \cdot C \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Il principale teorema di [10] è la seguente formula di *cambiamento di variabile per le tracce.* Siano

$$w : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,, \qquad B : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

localmente limitati, con $B \in BD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $D \cdot (wB) \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Allora per ogni funzione h di classe C^1 su $\mathbb{R}$ abbiamo

$$\mathrm{Tr}(h(w)B, \partial\Omega') = h\left(\frac{\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')}{\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')}\right) \mathrm{Tr}(B, \partial\Omega') \quad \mathscr{H}^{d-1}\text{-quasi ovunque su } \partial\Omega',$$

intendendo che il rapporto $\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')/\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')$ è arbitrariamente definito nei punti in cui la traccia $\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')$ si annulla. Questa formula permette di controllare la concentrazione su ipersuperfici della divergenza dei campi rinormalizzati, il che ci consente poi di dedurre la proprietà di rinormalizzazione in SBD.

Diamo ora una descrizione più analitica del contenuto dei diversi capitoli. Nel *Capitolo 1* riassumiamo alcuni strumenti di teoria della misura che saranno utilizzati più volte nella tesi. Nel *Capitolo 2* illustriamo la teoria delle funzioni a variazione limitata e degli insiemi di perimetro finito, con particolare attenzione alle proprietà fini delle funzioni BV e alla struttura della derivata. Queste nozioni saranno indispensabili per comprendere l'argomento di Ambrosio relativo alla rinormalizzazione in BV. Nell'ultima parte del capitolo diamo inoltre una breve descrizione delle proprietà delle funzioni a deformazione limitata, soffermandoci in particolare sul teorema di struttura, che sarà essenziale per dedurre le stime dei commutatori per campo BD a partire da quelle per campo BV tramite un procedimento di slicing.

Con il *Capitolo 3* entriamo nel cuore della materia. Cominciamo con l'illustrare la teoria nel caso regolare, richiamando il concetto di caratteristica e dando in tale caso l'espressione esplicita della soluzione dell'equazione del trasporto. Mostriamo poi un teorema di esistenza per l'equazione del trasporto e successivamente alcuni esempi di non unicità. Nell'ultima sezione infine diamo una descrizione informale della tecnica di regolarizzazione di Diperna e Lions, illustrando in un caso particolarmente semplice le conseguenze della proprietà di rinormalizzazione.

Nel *Capitolo 4* illustriamo alcune parti del lavoro di DiPerna e Lions, descrivendo in dettaglio lo schema di regolarizzazione e ricavando il teorema di unicità per l'equazione del trasporto con campo vettoriale di Sobolev. Illustriamo inoltre alcuni sviluppi successivi della teoria, in particolare i lavori di Capuzzo Dolcetta e Perthame, di Bouchut e di Colombini e Lerner.

Il *Capitolo 5* è dedicato alla dimostrazione di Ambrosio del lemma di rinormalizzazione per l'equazione del trasporto con campo vettoriale BV; come immediata conseguenza viene illustrato il principio di confronto per le soluzioni dell'equazione del trasporto. Descriviamo inoltre un argomento di Alberti che permette di evitare l'utilizzo del teorema del rango uno nel processo di ottimizzazione del nucleo di convoluzione. L'analisi del lavoro di Ambrosio prosegue nel *Capitolo 6*, in cui vengono illustrate le applicazioni all'equazione ordinaria. Descriviamo il concetto di flusso lagrangiano regolare e, tramite il principio di sovrapposizione, ricaviamo risultati di unicità, esistenza e stabilità per l'equazione ordinaria.

La parte originale di questa tesi è contenuta nei successivi due capitoli. Nel *Capitolo 7* riassumiamo alcuni risultati sulle tracce normali di campi vettoriali con divergenza misura, dimostrando in particolare teoremi di località e di continuità debole ed illustrando il fenomeno della concentrazione della divergenza su ipersuperfici. Questi risultati sono applicati nel *Capitolo 8*, in cui ricaviamo alcune stime per i rapporti incrementali di campi BD e successivamente dimostriamo la formula di cambiamento di variabile per la tracce normali. Da essa discende in modo molto semplice la proprietà di rinormalizzazione per campo SBD.

Infine, nel *Capitolo 9* presentiamo alcuni controesempi che indicano la necessità di una qualche condizione di regolarità del campo e di limitatezza della divergenza al fine di ottenere l'unicità per l'equazione del trasporto. Illustriamo inoltre alcuni problemi aperti, con particolare attenzione alla congettura di Bressan.

Desidero ringraziare tutte le persone che mi hanno aiutato durante la preparazione di questa tesi. Innanzitutto ringrazio il mio relatore, Luigi Ambrosio, per avermi introdotto nel modo della ricerca con grande professionalità e competenza, ma anche con cordialità, amicizia e disponibilità. Ho cominciato a lavorare con Luigi Ambrosio sin dal terzo anno, in occasione del colloquio presso la Scuola Normale, e da allora ho trovato in lui un costante riferimento per i miei studi e una valida guida nell'intricato ed affascinante mondo della matematica. Ringrazio Stefania Maniglia, con cui ho studiato la maggior parte degli argomenti qui presentati, per il sostegno e l'amicizia che mi ha dato in questo anno di collaborazione. Ringrazio inoltre Giovanni Alberti per avermi insegnato molta della teoria geometrica della misura su cui si basa questa tesi e per avermi più volte consigliato e incoraggiato durante questi mesi di lavoro.

Molte altre persone hanno contribuito alla buona riuscita di questo lavoro, con consigli e stimolanti discussioni o fornendomi materiale e referenze: ringrazio quindi François Bouchut, Ferruccio Colombini, Camillo De Lellis, Vladimir Georgiev, Nicola Gigli, Myriam Lecumberry, Carlo Mantegazza, Giampiero Palatucci, François Trèves, Caterina Zeppieri.

Ho avuto modo di approfondire le tematiche descritte nella tesi durante numerose scuole e conferenze: ringrazio tutte le istituzioni che mi hanno ospitato e finanziato, in particolare la Scuola Normale Superiore di Pisa, il Centre International de Rencontres Mathématiques di Luminy (Marseille - Francia), l'Università di Padova, il Centro Internazionale per la Ricerca Matematica di Trento, l'Università di Trento e la Carnegie Mellon University di Pittsburgh (Pennsylvania - Stati Uniti).

Ringrazio la Scuola Normale Superiore e l'Università di Pisa per avermi permesso di studiare per quattro anni in un magnifico e stimolante ambiente. Ringrazio la mia famiglia per avermi pazientemente sostenuto durante miei studi. Infine, un ringraziamento particolare va a tutte le persone che hanno fatto di questi quattro anni un periodo piacevole ed emozionante anche dal punto di vista personale: i miei compagni d'anno di matematica, Antonella e tutti i miei amici.

Capitolo 1

Preliminari di Teoria Geometrica della Misura

In questo primo capitolo richiamiamo alcuni strumenti di teoria geometrica della misura, che verranno utilizzati in tutto il resto del lavoro. Daremo solo gli enunciati dei principali teoremi, per chiarire l'ambito in cui ci muoveremo e per fissare le notazioni. Seguiremo l'approccio del testo di Ambrosio, Fusco e Pallara [12], ma altri possibili riferimenti sono [36], [6], [37], [47], [48], [52] e [38].

1.1 Teoria della misura astratta

Cominciamo con le principali definizioni di σ-algebra, spazi di misura e misure.

Definizione 1.1 (σ-algebre e spazi di misura). *Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{A}$ una collezione di sottoinsiemi di X. $\mathcal{A}$ viene detta* σ-algebra *se contiene l'insieme vuoto, è chiusa per complemento ed è chiusa per unione numerabile. La coppia $(X, \mathcal{A})$ è detta* spazio di misura.

Definizione 1.2 (Misure positive). *Una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ che sia σ-additiva (cioè tale che, se (E_i) è una famiglia numerabile disgiunta di elementi di $\mathcal{A}$, si abbia $\mu(\cup_i E_i) = \sum_i \mu(E_i)$) e tale che $\mu(\emptyset) = 0$ è chiamata* misura positiva. *Una misura positiva μ è detta* finita *se $\mu(X) < +\infty$,* di probabilità *se $\mu(X) = 1$,* σ-finita *se esiste una famiglia numerabile $(X_i) \subset \mathcal{A}$ tale che $X = \cup_i X_i$ e $\mu(X_i) < +\infty$ per ogni i.*

Definizione 1.3 (Misure reali o vettoriali). *Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio di misura e sia $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Una funzione $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^m$ σ-additiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$ è detta* misura. *Se $m = 1$ μ è anche chiamata* misura reale, *se $m > 1$* misura vettoriale.

Passiamo ora a descrivere costruzioni e operazioni che sono naturali in teoria della misura e che saranno diffusamente utilizzate in tutto il seguito.

Variazione totale. Data una misura (reale o vettoriale) μ costruiamo la misura *variazione totale* $|\mu|$. Per ogni insieme $E \in \mathcal{A}$ definiamo

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} |\mu(E_h)| \; : \; E_h \in \mathcal{A} \text{ disgiunti}, \, E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right\}.$$

$|\mu|$ risulta essere una misura positiva finita.

Insieme di concentrazione. Una misura (positiva, reale o vettoriale) μ è *concentrata* su $S \subset X$ se $S \in \mathcal{A}$ e $|\mu|(X \setminus S) = 0$.

Restrizione. Sia μ una misura (positiva, reale o vettoriale). Se $E \in \mathcal{A}$ poniamo $\mu \llcorner E(F) = \mu(E \cap F)$ per ogni $F \in \mathcal{A}$. La misura $\mu \llcorner E$ è detta *restrizione di μ ad E*.

Push–forward. Siano $(X, \mathcal{A})$ e $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}})$ due spazi di misura e sia $f : X \to \tilde{X}$ tale che $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ per ogni $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Per ogni misura (positiva, reale o vettoriale) μ su $(X, \mathcal{A})$ definiamo la misura $f_\# \mu$ su $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{A}})$ secondo la formula

$$f_\# \mu(E) = \mu\big(f^{-1}(E)\big) \qquad \text{per ogni } E \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

$f_\# \mu$ è detta *push–forward* di μ tramite f.

Assoluta continuità. Siano μ una misura positiva e ν una misura reale o vettoriale su $(X, \mathcal{A})$. Diciamo che ν è *assolutamente continua* rispetto a μ, e scriviamo $\nu \ll \mu$, se per ogni $E \in \mathcal{A}$ vale l'implicazione

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\nu|(E) = 0.$$

Mutua singolarità. Se μ e ν sono misure positive, diciamo che sono *mutuamente singolari*, e scriviamo $\mu \perp \nu$, se esiste $E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) = 0$ e $\nu(X \setminus E) = 0$. Se μ e ν sono misure reali o vettoriali, diciamo che sono *mutuamente singolari* se $|\mu|$ e $|\nu|$ lo sono. Osserviamo che, se $\mu \perp \nu$, allora $|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$.

Completamento di uno spazio di misura. Se μ è una misura positiva su $(X, \mathcal{A})$, possiamo definire il *completamento di $\mathcal{A}$ rispetto a μ* come lo spazio di misura $(X, \mathcal{A}_\mu)$, dove

$$\mathcal{A}_\mu = \{F \subset X \; : \; F = E \cup N \text{ con } E \in \mathcal{A} \text{ e } N \subset M \,, \text{ con } M \in \mathcal{A} \text{ e } \mu(M) = 0\}.$$

La misura μ si estende a tutta $\mathcal{A}_\mu$ ponendo $\mu(F) = \mu(E)$ per ogni $F \in \mathcal{A}_\mu$ che si decompone come sopra. Se μ è una misura reale o vettoriale, con completamento rispetto a μ si intende il completamento rispetto alla variazione totale $|\mu|$.

Definiamo ora le funzioni misurabili, cioè quelle funzioni che rispettano la struttura di spazio di misura introdotta nella Definizione 1.1.

Definizione 1.4 (Funzioni misurabili). *Sia μ una misura positiva su $(X, \mathcal{A})$ e sia (Y, d) uno spazio metrico. Allora diciamo che $f : X \to Y$ è*

(i) $\mathcal{A}$-misurabile *se $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ per ogni $A \subset Y$ aperto;*

(ii) μ-misurabile *se è $\mathcal{A}_\mu$-misurabile.*

Osservazione 1.5. Si può mostrare che, se Y è separabile, allora f è μ-misurabile se e solo se coincide μ-quasi ovunque con una funzione $\mathcal{A}$-misurabile.

A questo punto si può definire l'integrale, prima restringendosi alle funzioni semplici, quindi per funzioni positive ed infine per funzioni sommabili. Si possono anche definire integrali rispetto a misure reali o vettoriali. Per non appesantire troppo questo capitolo di preliminari non daremo una trattazione completa della teoria dell'integrazione, per la quale si possono comunque consultare [47] o [12].

Passiamo ora a definire gli spazi di Lebesgue L^p. Sia μ una misura positiva su $(X, \mathcal{A})$ e sia $u : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ-misurabile. Definiamo

$$\|u\|_p = \Big(\int_X |u|^p d\mu\Big)^{1/p} \qquad \text{per } 1 \leq p < +\infty\,,$$

$$\|u\|_\infty = \inf\big\{C \in [0, +\infty] \ : \ |u(x)| \leq C \text{ per } \mu\text{-quasi ogni } x \in X\big\}\,.$$

Diciamo che u appartiene a $L^p(X, \mu)$ se $\|u\|_p < \infty$. Se consideriamo equivalenti funzioni che coincidano μ-quasi ovunque, $L^p(X, \mu)$ con la norma $\|\cdot\|_p$ risulta essere uno spazio di Banach. Richiamiamo alcuni risultati utili relativi a integrazione e spazi di Lebesgue.

Disuguaglianza di Chebyshev. Sia $f \in L^1(X, \mu)$ positiva e sia $t > 0$. Allora

$$\mu\big(\{x \in X : f(x) > t\}\big) \leq \frac{1}{t}\int_X f d\mu.$$

Teorema di convergenza monotona. Sia (f_n) una famiglia di funzioni misurabili, tale che $f_n \geq g \in L^1(X, \mu)$ per ogni n e $f_n(x) \uparrow f(x)$ puntualmente in X. Allora f è misurabile e

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu.$$

Lemma di Fatou. Sia (f_n) una famiglia di funzioni misurabili. Se $f_n \geq g \in L^1(X, \mu)$ per ogni n, allora

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Se $f_n \leq g \in L^1(X, \mu)$ per ogni n, allora

$$\int_X (\limsup_{n\to\infty} f_n) d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema della convergenza dominata. Sia (f_n) una famiglia di funzioni misurabili tale che $f_n \to f$ puntualmente μ-quasi ovunque in X. Supponiamo che esista $g \in L^1(X, \mu)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ per μ-quasi ogni x e per ogni n. Allora $f \in L^1(X, \mu)$ e valgono

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Disuguaglianza di Hölder. Siano f e g funzioni misurabili. Allora

$$\int_X f g d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

dove p e q sono *esponenti coniugati*, cioè tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Disuguaglianza di Jensen. Sia $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione convessa e semicontinua inferiormente e sia μ una misura finita e positiva su X. Allora, per ogni funzione $u : X \to \mathbb{R}^k$ che sia μ-sommabile vale

$$\Phi\Big(⨍_X u d\mu\Big) \leq ⨍_X \Phi(u) d\mu.$$

Ricordiamo inoltre che, se $f_h \to f$ in $L^p(X, \mu)$ (secondo la *convergenza forte* data dalla norma), allora è possibile estrarre da (f_h) una sottosuccessione $(f_{h(k)})$ tale che

$f_{h(k)} \to f$ puntualmente μ-quasi ovunque in X.

Negli spazi L^p possiamo anche introdurre la nozione di *convergenza debole*, utile perché ci garantisce alcuni teoremi di compattezza. Se μ è una misura positiva su $(X, \mathcal{A})$, si ottiene che

$$(L^p(X,\mu))^* = L^q(X,\mu) \qquad \text{se } 1 < p < \infty, \text{ con } q \text{ tale che } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$(L^1(X,\mu))^* = L^\infty(X,\mu) \qquad \text{se } \mu \text{ è } \sigma\text{-finita.}$$

In generale, invece, il duale di $L^\infty(X,\mu)$ contiene strettamente $L^1(X,\mu)$.

Siano date $(f_h) \subset L^p(X,\mu)$, $f \in L^p(X,\mu)$ (con μ σ-finita se $p = 1$). Si possono allora definire

(i) la *convergenza debole in* $L^p(X,\mu)$, se $1 \leq p < \infty$:

$$f_h \rightharpoonup f \text{ debolmente in } L^p(X,\mu) \text{ (oppure in } L^p(X,\mu) - w)$$

$$\text{se } \int_X f_h g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{per ogni } g \in L^q(X,\mu);$$

(ii) la *convergenza debole* in* $L^\infty(X,\mu)$:

$$f_h \rightharpoonup f \text{ debolmente}^* \text{ in } L^\infty(X,\mu) \text{ (oppure in } L^\infty(X,\mu) - w^*)$$

$$\text{se } \int_X f_h g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{per ogni } g \in L^1(X,\mu).$$

Vale quindi il seguente teorema di compattezza:

Teorema 1.6 (di compattezza sequenziale debole in L^p). *Sia $1 < p \leq \infty$ e sia (f_h) una successione equilimitata in $L^p(X,\mu)$. Allora esiste una sottosuccessione che converge debolmente in $L^p(X,\mu)$ (debolmente* se $p = \infty$).*

Richiamiamo altri due concetti che utilizzeremo più volte nel seguito.

Convergenza in misura. Siano f_n e f misurabili su (X,μ) e quasi ovunque finite. Diciamo che $f_n \to f$ *in misura* se per ogni $\delta > 0$ vale

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) = 0.$$

Misura indotta da una funzione sommabile. Se μ è una misura positiva su $(X, \mathcal{A})$ e $f \in [L^1(X,\mu)]^m$, possiamo definire la misura $f\mu$ a valori in $\mathbb{R}^m$ ponendo

$$f\mu(E) = \int_E f \, d\mu \qquad \text{per ogni } E \in \mathcal{A}.$$

Inoltre si può mostrare che $|f\mu| = |f|\mu$.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per enunciare il seguente teorema, che dà una decomposizione canonica di una misura in parte assolutamente continua e parte singolare rispetto ad una fissata misura positiva.

Teorema 1.7 (Radon–Nikodým). *Siano μ una misura positiva e ν una misura a valori in $\mathbb{R}^m$ su $(X, \mathcal{A})$, e supponiamo che μ sia σ-finita. Allora esiste un'unica coppia di misure vettoriali ν^a e ν^s tali che $\nu^a \ll \mu$, $\nu^s \perp \mu$ e $\nu = \nu^a + \nu^s$. Inoltre, esiste un'unica (a meno di modifiche in insiemi μ-trascurabili) funzione $f \in [L^1(X, \mu)]^m$ tale che $\nu^a = f\mu$. La funzione f è detta* densità di ν rispetto a μ *e si indica anche con ν/μ.*

Corollario 1.8 (Decomposizione polare). *Sia μ una misura a valori in $\mathbb{R}^m$ su $(X, \mathcal{A})$. Allora esiste un'unica (a meno di modifiche in insiemi μ-trascurabili) funzione $f \in [L^1(X, |\mu|)]^m$, con $|f(x)| = 1$ per $|\mu|$-quasi ogni x, tale che $\mu = f|\mu|$. Tale scrittura viene chiamata* decomposizione polare *di μ.*

1.2 Misure in spazi metrici

In questa sezione X sarà uno spazio metrico localmente compatto e separabile. Indicheremo con $\mathcal{B}(X)$ la σ-algebra dei *boreliani*, ossia la più piccola σ-algebra contenente gli aperti.

Definizione 1.9 (Misure di Borel e di Radon).

(i) *Una misura positiva su $(X, \mathcal{B}(X))$ viene detta* misura di Borel*. Se una misura di Borel è finita sui compatti, allora viene detta* misura di Radon positiva*.*

(ii) *Una funzione (reale o vettoriale) definita sui sottoinsiemi boreliani e relativamente compatti di X, che sia una misura su $(K, \mathcal{B}(K))$ per ogni $K \subset X$ compatto, è chiamata* misura di Radon (reale o vettoriale) *su X. Se $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}^m$ è una misura (nel senso della Definizione 1.2), allora è detta* misura di Radon finita*.*

Indichiamo con $[\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(X)]^m$ e con $[\mathcal{M}(X)]^m$ rispettivamente lo spazio delle misure di Radon a valori in $\mathbb{R}^m$ e lo spazio delle misure di Radon finite a valori in $\mathbb{R}^m$.

Lo spazio $[\mathcal{M}(X)]^m$ delle misure di Radon finite su X risulta essere uno spazio di Banach con la norma $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Solitamente, intenderemo che tutte le misure di Borel saranno estese al completamento $\mathcal{B}_\mu(X)$. Osserviamo inoltre che, se μ è una misura di Radon tale che $\sup\{|\mu|(K) : K \subset X \text{ compatto}\} < \infty$, allora essa si può estendere a tutta $\mathcal{B}(X)$, e l'estensione risulta essere una misura di Radon finita.

Supporto. Sia μ una misura di Borel positiva su X. L'insieme chiuso

$$\mathrm{spt}\mu = \{x \in X \ : \ \mu(U) > 0 \text{ per ogni intorno } U \text{ di } x\}$$

è detto *supporto* di μ. Se μ è una misura reale o vettoriale, definiamo sptμ come il supporto della variazione totale $|\mu|$.

Definizione 1.10 (Funzioni boreliane). *Siano X e Y due spazi metrici e sia $f : X \to Y$. Diciamo che f è una* funzione boreliana *(o* di Borel*) se $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$ per ogni aperto $A \subset Y$.*

Teorema 1.11 (Regolarità interna ed esterna). *Sia μ una misura di Borel su X e sia $E \subset X$ un insieme μ-misurabile.*

(i) *Se μ è σ-finita allora*

$$\mu(E) = \sup\big\{\mu(K) \ : \ K \subset E \ , \ K \ \textit{compatto}\big\}.$$

(ii) *Supponiamo che esista una successione (X_h) di insiemi aperti tale che $\mu(X_h) < \infty$ per ogni h e $X = \cup_h X_h$; allora*

$$\mu(E) = \inf\big\{\mu(A) \ : \ E \subset A \ , \ A \ \textit{aperto}\big\}.$$

Indichiamo con $C_c(X)$ e $C_0(X)$ gli spazi vettoriali rispettivamente delle funzioni a valori reali continue con supporto compatto in X e delle funzioni a valori reali continue su X che si annullano all'infinito (cioè tali che, per ogni $\epsilon > 0$, esista un compatto $K \subset X$ tale che la funzione è in modulo minore di ϵ su $X \setminus K$).

Teorema 1.12 (di rappresentazione di Riesz). *Si ha*

$$\big[[C_0(X)]^m\big]^* = [\mathcal{M}(X)]^m \quad \textit{e} \quad \big[[C_c(X)]^m\big]^* = [\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(X)]^m$$

secondo l'accoppiamento di dualità

$$\langle \mu, u \rangle = \sum_{h=1}^{m} \int_X u_h d\mu_h.$$

Grazie al teorema di Riesz possiamo dire che una successione μ_h di misure di Radon (risp. misure di Radon finite) a valori in $\mathbb{R}^m$ *converge debolemente** a μ se vale

$$\int_X \varphi d\mu_h \to \int_X \varphi d\mu$$

per ogni $\varphi \in [C_c(X)]^m$ (risp. per ogni $\varphi \in [C_0(X)]^m$). Vale allora il classico risultato di compattezza di De La Vallée Poussin.

Teorema 1.13 (di compattezza sequenziale debole*).

(i) *Se (μ_h) è una successione di misure di Radon finite su X tale che* $\sup\{|\mu_h|(X) : h \in \mathbb{N}\} < \infty$*, allora esiste una sottosuccessione che converge debolmente*. Inoltre, la mappa $\mu \mapsto |\mu|(X)$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole*.*

(ii) *Se (μ_h) è una successione di misure di Radon su X tale che* $\sup\{|\mu_h|(K) : h \in \mathbb{N}\} < \infty$ *per ogni compatto $K \subset X$, allora esiste una sottosuccessione che converge localmente debolmente*. Inoltre, per ogni insieme aperto $A \subset X$, la mappa $\mu \mapsto |\mu|(A)$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole* locale.*

Inoltre abbiamo la seguente caratterizzazione della convergenza debole* di misure di Radon su $\mathbb{R}^n$:

Teorema 1.14. *Siano μ, μ_h (con $h \in \mathbb{N}$) misure di Radon su $\mathbb{R}^n$. Allora sono fatti equivalenti*

(i) *μ_h converge debolmente*, nella dualità con $C_c(\mathbb{R}^n)$, a μ;*

(ii) $\limsup_h \mu_h(K) \leq \mu(K)$ *per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e* $\mu(U) \leq \liminf_h \mu_h(U)$ *per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^n$;*

(iii) $\lim_h \mu_h(B) = \mu(B)$ *per ogni boreliano limitato $B \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\mu(\partial B) = 0$.*

In questo contesto risulta utile ricordare la seguente proposizione, in cui viene discusso il comportamento delle mappe $\mu \mapsto \mu(E)$ e $\mu \mapsto \int f d\mu$ nel caso di convergenza debole*.

Proposizione 1.15. *Sia (μ_h) una successione di misure di Radon su X che converge localmente debolmente* a μ.*

(i) *Se le misure μ_h sono positive, allora per ogni funzione semicontinua inferiormente $u : X \to [0, +\infty]$ vale*

$$\liminf_{h\to\infty} \int_X u d\mu_h \geq \int_X u d\mu$$

e per ogni funzione semicontinua superiormente $v : X \to [0, +\infty)$ con supporto compatto vale

$$\limsup_{h\to\infty} \int_X v d\mu_h \leq \int_X v d\mu;$$

(ii) *Se $|\mu_h|$ converge localmente debolmente* a λ, allora $\lambda \geq |\mu|$; inoltre, se E è un insieme relativamente compatto e μ-misurabile tale che $\lambda(\partial E) = 0$, allora $\mu_h(E) \to \mu(E)$.*

D'ora in poi restringeremo la nostra attenzione allo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$. Su di esso si definiscono la *misura di Lebesgue* $\mathscr{L}^n$ e la *misura di Hausdorff* $\mathscr{H}^k$. Ricordiamo la definizione di misura di Hausdorff: sia $k \geq 0$ reale e sia $B \subset \mathbb{R}^n$. Poniamo $\mathscr{H}^k(B) = \lim\limits_{\delta\downarrow 0} \mathscr{H}^k_\delta(B) = \sup\limits_{\delta>0} \mathscr{H}^k_\delta(B)$, dove

$$\mathscr{H}^k_\delta(B) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\Big\{\sum_{i\in I}(\mathrm{diam} B_i)^k \ : \ \mathrm{diam} B_i < \delta \ , \ B \subset \bigcup_{i\in I} B_i\Big\},$$

con

$$\omega_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}\,, \qquad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} s^{t-1}e^{-s}ds.$$

Nel caso in cui $k \geq 1$ sia un intero, la costante ω_k coincide con la misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbb{R}^k$, per cui risulta che $\mathscr{L}^n = \mathscr{H}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Osserviamo che $\mathscr{H}^k$ è identicamente nulla per $k > n$ e coincide con la misura che conta i punti se $k = 0$; inoltre, se $k > k' \geq 0$, vale l'implicazione

$$\mathscr{H}^k(B) > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{H}^{k'}(B) = +\infty.$$

Questo permette di definire la *dimensione di Hausdorff* di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ come

$$\dim_{\mathscr{H}} A = \inf\big\{k \geq 0 \ : \ \mathscr{H}^k(A) = 0\big\}.$$

Come facile conseguenza dell'osservazione appena fatta, si ottiene che $\mathscr{H}^k(A) = +\infty$ se $k < \dim_{\mathscr{H}} A$ e $\mathscr{H}^k(A) = 0$ se $k > \dim_{\mathscr{H}} A$. Nel caso $k = \dim A$ nulla si può dire in via generale. Grazie al Teorema 1.11 la misura di Lebesgue $\mathscr{L}^n$ è regolare. Non possiamo applicare direttamente tale teorema alla misura di Hausdorff $\mathscr{H}^k$, dato che essa non è σ-finita in $\mathbb{R}^n$. Valgono però i seguenti fatti:

(i) se $E \subset \mathbb{R}^n$, allora esiste un boreliano $G \supset E$ tale che $\mathscr{H}^k(G) = \mathscr{H}^k(E)$;

(ii) se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme $\mathscr{H}^k$-misurabile e di misura finita, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subset E$ tale che $\mathscr{H}^k(E \setminus C) < \epsilon$; quindi E contiene un boreliano F con $\mathscr{H}^k(E) = \mathscr{H}^k(F)$.

Nelle applicazioni è spesso utile sapere quando una data misura μ si può rappresentare in termini della misura di Hausdorff, o comunque si può cercare di stimare la dimensione di Hausdorff dell'insieme su cui μ è concentrata. L'idea naturale è guardare il comportamento asintotico dei rapporti $\mu(B_r(x))/\omega_k r^k$, il che motiva la seguente definizione.

Definizione 1.16 (Densità k-dimensionale). *Sia μ una misura di Radon positiva su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $k \geq 0$. La* densità superiore *e la* densità inferiore *k-dimensionali di μ in x sono rispettivamente definite da*

$$\Theta^*_k(\mu, x) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k} \qquad e \qquad \Theta_{*k}(\mu, x) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\omega_k r^k}.$$

Se $\Theta^*_k(\mu, x) = \Theta_{*k}(\mu, x)$, il valore comune viene indicato con $\Theta_k(\mu, x)$.

Teorema 1.17 (Misure di Radon e di Hausdorff). *Nelle ipotesi della definizione precedente, per ogni $t \in (0, +\infty)$ e ogni boreliano $B \subset \Omega$ valgono le seguenti implicazioni:*

$$\begin{aligned} \Theta^*_k(\mu, x) \geq t \qquad \forall x \in B \quad &\Rightarrow \quad \mu \geq t\mathscr{H}^k \llcorner B \\ \Theta^*_k(\mu, x) \leq t \qquad \forall x \in B \quad &\Rightarrow \quad \mu \leq 2^k t\mathscr{H}^k \llcorner B. \end{aligned}$$

Dal teorema segue facilmente la seguente implicazione, che useremo più volte nel seguito:

$$\mu \llcorner E = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(B_r(x)) = o(r^k) \quad \text{per } \mathscr{H}^k\text{-quasi ogni } x \in E. \tag{1.1}$$

Infatti, se la tesi fosse falsa potremmo trovare $\epsilon > 0$ e un insieme $F \subset E$ con $\mathscr{H}^k(F) > 0$ tali che $\Theta^*_k(\mu, x) \geq \epsilon$ per ogni $x \in F$. Ma ciò sarebbe assurdo, considerata la prima parte del teorema precedente.

1.3 Derivate distribuzionali, spazi di Sobolev e convoluzioni

La motivazione che ha portato all'introduzione delle distribuzioni è stata la necessità di uno spazio che includa tutti gli spazi "ragionevoli" utilizzati in analisi (spazi di funzioni localmente sommabili, spazi di misure ...) e in cui abbia senso l'operazione di *derivazione*. Inoltre, su tale spazio si dovrà definire una maneggevole nozione di convergenza, con possibilmente una classe densa con buone proprietà.

Consideriamo un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e poniamo $\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty_c(\Omega)$ (spazio delle *funzioni test*). Definiamo innanzitutto la nozione di convergenza delle funzioni test. Diciamo che $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che spt$\varphi_n \subset K$ per ogni n e $D^\alpha \varphi_n \to 0$ uniformemente per ogni multi–indice α. Lo *spazio delle distribuzioni su* Ω è lo spazio dei funzionali lineari e continui su $\mathcal{D}(\Omega)$, e viene indicato con $\mathcal{D}'(\Omega)$. Su $\mathcal{D}'(\Omega)$ si considera la convergenza debole*, che viene detta *convergenza nel senso delle distribuzioni*:

$$T_n \to T \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \qquad \text{se} \quad \langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle \text{ per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

È facile vedere che $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si immergono in modo naturale in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Infatti, basta definire l'azione di una funzione localmente sommabile f o di una misura localmente finita μ su una funzione test φ nel modo seguente:

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\ , \qquad \langle \mu, \varphi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)d\mu(x).$$

Per ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si può definire la *derivata nel senso delle distribuzioni di* T, ponendo per dualità

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$$

per ogni multi–indice α. Grazie alla formula di integrazione per parti, le nozioni di "derivata distribuzionale" e di "derivata classica" coincidono quando quest'ultima esiste.

Una proprietà notevole delle distribuzioni è espressa dal cosiddetto *principio di località*. Innanzitutto, se $\Omega' \subset \Omega$ è un aperto, diciamo che $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si annulla su Ω' se $\langle T, \varphi\rangle = 0$ per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega')$. Allora vale il fatto seguente: se $\Omega = \cup_i \Omega_i$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si annulla su Ω_i per ogni i, allora $T = 0$ come distribuzione su Ω.

Grazie al concetto di derivata distribuzionale, è facile definire gli spazi di Sobolev come spazi di funzioni in L^p con derivate distribuzionali in L^p.

Definizione 1.18 (Spazi di Sobolev). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $1 \le p \le \infty$. Diciamo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se $u \in L^p(\Omega)$ e tutte le derivate distribuzionali del primo ordine di u si rappresentano con funzioni in $L^p(\Omega)$.*

$W^{1,p}(\Omega)$ con la norma

$$\begin{cases} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega |D^i u(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{per } 1 \le p < \infty \\ \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \displaystyle\sum_{i=1}^n \|D^i u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{per } p = \infty \end{cases}$$

risulta essere uno spazio di Banach, e in particolare uno spazio di Hilbert per $p = 2$ con prodotto scalare

$$(u, v)_{W^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega D^i u(x) D^i v(x)dx.$$

Si possono inoltre definire gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$, richiedendo che tutte le derivate distribuzionali sino all'ordine k siano in $L^p(\Omega)$.

Sullo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ si può definire la convergenza debole (debole* per $p = \infty$) come spazio di Banach, ma si verifica che vale

$$u_n \rightharpoonup u \text{ debolmente in } W^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_n \rightharpoonup u & \text{debolmente in } L^p(\Omega) \\ D^i u_n \rightharpoonup D^i u & \text{debolmente in } L^p(\Omega)\ \forall i, \end{cases}$$

dove "debolmente" è sostituito da "debolmente*" se $p = \infty$. Per un'analisi più approfondita degli spazi di Sobolev si rimanda, ad esempio, a [52].

Se f e g sono funzioni definite su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$, possiamo definire la *convoluzione tra f e g* ponendo

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy$$

nei punti x in cui ciò ha senso. È un prodotto commutativo e associativo, ben definito (quasi ovunque) se ad esempio $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con p qualsiasi. Vale la stima

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Inoltre

$$\operatorname{spt}(f * g) \subset \operatorname{spt}(f) + \operatorname{spt}(g),$$

dove a secondo membro abbiamo la somma vettoriale dei due insiemi $\operatorname{spt}(f)$ e $\operatorname{spt}(g)$, definita in generale da

$$A + B = \big\{z \in \mathbb{R}^n : z = x + y \text{ con } x \in A \text{ e } y \in B\big\}.$$

Da questa formula otteniamo subito che, se f e g hanno supporto compatto, anche $f * g$ ha supporto compatto.

Se $f \in L^1_{\text{loc}}$ e $g \in C_c$, allora $f * g \in C$. Se $f \in L^1_{\text{loc}}$ e $g \in C^\infty_c$ (oppure $f \in L^1$ e $g \in C^\infty$), allora $f * g \in C^\infty$. Inoltre, la derivata (eventualmente distribuzionale) si può scaricare su una qualsiasi delle due funzioni, cioè vale

$$D^{\alpha+\beta}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D^{\alpha+\beta} g(x - y)dy = (D^\alpha f) * (D^\beta g)(x)$$

per ogni coppia di multi–indici α e β.

Le convoluzioni si possono usare in modo naturale per *regolarizzare* le funzioni. Consideriamo una funzione $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pari, positiva, con supporto contenuto nella palla unitaria e con integrale unitario. Una tale funzione ρ sarà detta *nucleo di convoluzione*. Tipicamente, questi nuclei vengono scelti radiali, ma per alcune stime più raffinate di cui avremo bisogno nel seguito sarà necessario scegliere nuclei anisotropi, cioè con profili diversi a seconda della direzione spaziale considerata. Definiamo

$$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\rho(\frac{x}{\epsilon}) \qquad \forall\, \epsilon > 0.$$

Una tale famiglia (ρ_ϵ) è chiamata *famiglia di mollificatori*. Se $f \in L^p_{\text{loc}}$, allora $f_\epsilon = f * \rho_\epsilon \in C^\infty$ e $f_\epsilon \to f$ fortemente in L^p_{loc}, per $1 \le p < \infty$. Se f è continua, f_ϵ converge a f uniformemente sui compatti.

In generale, è possibile utilizzare i nuclei di convoluzione per regolarizzare anche le distribuzioni: si ottiene una successione di regolarizzate che converge alla distribuzione di partenza nel senso delle distribuzioni. Dato che questa costruzione sarà utilizzata nel seguito, descriviamola esplicitamente nel caso delle misure. Se μ è una misura di Radon a valori in $\mathbb{R}^m$ su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e f è una funzione continua in Ω, possiamo definire il prodotto di convoluzione tra μ e f come

$$\mu * f(x) = \int_\Omega f(x-y)d\mu(y),$$

nei punti in cui ciò ha senso. Se ora consideriamo $f = \rho_\epsilon$, le funzioni $\mu_\epsilon = \mu * \rho_\epsilon$ sono regolari e ben definite per ogni $x \in \Omega$ tale che $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon$. Si può mostrare che le misure $\mu_\epsilon \mathscr{L}^n$ convergono localmente debolmente* in Ω a μ e che vale la stima (disuguaglianza di Jensen)

$$\int_E |\mu * \rho_\epsilon|(x)dx \le |\mu|(E_\epsilon), \tag{1.2}$$

dove E è un qualsiasi boreliano contenuto in $\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\}$ e E_ϵ è l'intorno di raggio ϵ di E. Inoltre, le misure $|\mu_\epsilon \mathscr{L}^n|$ convergono localmente debolmente* in Ω a $|\mu|$.

1.4 Teoremi di ricoprimento e di derivazione

Data una famiglia di palle chiuse che ricopre un insieme, è ragionevole chiedersi se è sempre possibile trovare una sottofamiglia che continui a ricoprire tutto (o quasi tutto) l'insieme, e che abbia delle buone proprietà, cioè che risulti fatta di palle disgiunte, o con numero di possibili intersezioni controllato a priori. Riuscire a compiere una "selezione" di questo tipo è l'obiettivo dei teoremi di ricoprimento.

Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ è detta *disgiunta* se i suoi elementi sono a due a due disgiunti. Data una qualsiasi famiglia $\mathcal{F}$, indicheremo con $\bigcup \mathcal{F}$ l'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{F}$, cioè

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

I primi due teoremi, dovuti a Besicovitch, permettono di estrarre un sottoricoprimento da un ricoprimento dato, in modo che il numero delle intersezioni sia controllato da una costante che dipende solo dalla dimensione dello spazio.

Teorema 1.19 (Besicovitch). *Esiste un numero intero ξ, dipendente solo dalla dimensione n dello spazio, tale che, se $\mathcal{F}$ è una famiglia di palle chiuse il cui insieme A dei centri è limitato, allora esistono ξ sottofamiglie disgiunte $\mathcal{F}_i$ tali che*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup \mathcal{F}_i.$$

Teorema 1.20 (di ricoprimento di Besicovitch). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e sia $\rho : A \to (0, \infty)$. Allora esiste $S \subset A$ al più numerabile tale che*

$$A \subset \bigcup_{x \in S} B_{\rho(x)}(x)$$

e ogni punto di $\mathbb{R}^n$ appartiene al più a ξ palle $B_{\rho(x)}(x)$ centrate in punti di S, dove ξ è un intero che dipende solo dalla dimensione n dello spazio.

Il teorema di Vitali permette invece di trovare (sotto ipotesi più restrittive sul ricoprimento iniziale) una sottofamiglia disgiunta che ricopra quasi tutto l'insieme. Premettiamo una definizione.

Definizione 1.21. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di palle chiuse e sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che $\mathcal{F}$ è un* ricoprimento fine *di A se*

$$\inf \left\{ \rho > 0 \ : \ \overline{B}_\rho(x) \in \mathcal{F} \right\} = 0$$

per ogni $x \in A$.

Teorema 1.22 (di ricoprimento di Vitali). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un boreliano limitato, sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento fine di A e sia μ una misura positiva localmente finita in $\mathbb{R}^n$. Allora esiste una sottofamiglia numerabile e disgiunta $\mathcal{F}'$ tale che*

$$\mu\Big(A \setminus \bigcup \mathcal{F}'\Big) = 0.$$

I teoremi di ricoprimento hanno due importanti conseguenze, che ci saranno spesso utili nel seguito. Il primo teorema dà una caratterizzazione della densità di una misura assolutamente continua rispetto a una misura di riferimento positiva (si ricordi il teorema di Radon–Nikodým).

Teorema 1.23 (di derivazione di Besicovitch). *Sia μ una misura positiva localmente finita in $\mathbb{R}^n$ e sia λ una misura a valori in $\mathbb{R}^m$ tale che $\lambda \ll \mu$. Allora, per μ-quasi ogni $x \in \mathrm{spt}\mu$, esiste*

$$f(x) = \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\lambda(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} \in \mathbb{R}^m.$$

Inoltre, vale $\lambda = f\mu$.

Il seguente corollario invece ci assicura che una funzione sommabile è approssimativamente continua in quasi ogni punto.

Corollario 1.24 (Punti di Lebesgue). *Sia μ una misura positiva in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mu)$. Allora per μ-quasi ogni $x \in \mathrm{spt}\mu$ vale*

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \fint_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0.$$

Un tale punto x viene detto punto di Lebesgue *per f, o* punto di continuità approssimata *di f.*

1.5 Rettificabilità e formule di area e coarea

Cominciamo con le definizioni di insieme rettificabile, concetto centrale nella teoria geometrica della misura, in quanto naturale estensione dell'idea di superficie regolare.

Definizione 1.25 (Insiemi rettificabili). *Un insieme boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$ viene detto* numerabilmente $\mathscr{H}^k$-rettificabile *se $\mathscr{H}^k$-quasi tutto E si ricopre con una successione di grafici lipschitziani di dimensione k.*

Osservazione 1.26. Quanto richiesto nella definizione è equivalente (grazie a teoremi di estensione e di approssimazione) ad ognuna delle seguenti due condizioni:

(i) $\mathscr{H}^k$-quasi tutto E si ricopre con una successione di grafici C^1 di dimensione k;

(ii) $\mathscr{H}^k$-quasi tutto E si ricopre con una successione di insiemi parametrizzati da funzioni lipschitziane $\phi : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.

Una classe “opposta” è quella degli insiemi puramente non rettificabili:

Definizione 1.27 (Insiemi puramente non rettificabili). *Un insieme boreliano* $E \subset \mathbb{R}^n$ *viene detto* puramente $\mathscr{H}^k$-non rettificabile *se* $\mathscr{H}^k(E \cap F) = 0$ *per ogni insieme numerabilmente* $\mathscr{H}^k$*-rettificabile* F.

Ricordiamo ora il classico teorema di Rademacher:

Teorema 1.28 (Rademacher). *Sia* $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *lipschitziana. Allora* f *è differenziabile in* $\mathscr{L}^k$*-quasi ogni punto di* D.

Due teoremi di grande importanza riguardano le *formule di area e di coarea*. La prima ci permette di calcolare l'area (con molteplicità) dell'immagine lipschitziana di un insieme boreliano.

Teorema 1.29 (Formula dell'area). *Sia* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *una funzione lipschitziana, con* $n \geq k$ *e sia* $E \subset \mathbb{R}^k$ *un insieme* $\mathscr{L}^k$*-misurabile. Allora la funzione molteplicità* $\mathscr{H}^0(E \cap f^{-1}(y))$ *è* $\mathscr{H}^k$*-misurabile in* $\mathbb{R}^n$ *e vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{H}^0(E \cap f^{-1}(y)) d\mathscr{H}^k(y) = \int_E J_k df_x d\mathscr{H}^k(x),$$

dove lo Jacobiano k-dimensionale *è definito da*

$$J_k L = \sqrt{\det(L^* \, L)},$$

per ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *con trasposta* $L^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

La formula di coarea invece generalizza il teorema di Fubini, dicendo che l'integrale su un dominio coincide con l'integrale doppio fatto prima su delle superfici che “foliano” il dominio e successivamente rispetto alla variabile che le parametrizza, corretto con un opportuno fattore (detto fattore di coarea).

Osserviamo preliminarmente che, se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme $\mathscr{H}^k$-rettificabile, il *tangente* k*-dimensionale approssimato ad* E *in* x, indicato con $\mathrm{Tan}^k(E, x)$, è ben definito per $\mathscr{H}^k$-quasi ogni $x \in E$. Infatti, dato che $E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ con $\mathscr{H}^k(E_0) = 0$ e $E_1, E_2, \ldots$ k-superfici C^1, per $\mathscr{H}^k$-quasi ogni $x \in E$ possiamo trovare il minimo i tale che $x \in E_i$ e porre $\mathrm{Tan}^k(E, x) = \mathrm{Tan}^k(E_i, x)$, dove a secondo membro il tangente è inteso in senso classico. Si verifica che l'applicazione $x \mapsto \mathrm{Tan}^k(E, x)$ così costruita è ben definita per $\mathscr{H}^k$-quasi ogni $x \in E$. Se ora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una funzione lipschitziana, diciamo che f è *tangenzialmente differenziabile* in $x \in E$ se la restrizione di f a $x + \mathrm{Tan}^k(E, x)$ è differenziabile in x. Risulta che il *differenziale tangente* $d^E f_x : \mathrm{Tan}^k(E, x) \to \mathbb{R}^m$ esiste per $\mathscr{H}^k$-quasi ogni $x \in E$.

Teorema 1.30 (Formula di coarea). *Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ una funzione lipschitziana e sia $E \subset \mathbb{R}^m$ un insieme numerabilmente $\mathscr{H}^n$-rettificabile. Allora la funzione $t \mapsto \mathscr{H}^{n-k}(E \cap f^{-1}(t))$ è $\mathscr{L}^k$ misurabile in $\mathbb{R}^k$, $E \cap f^{-1}(t)$ è numerabilmente $\mathscr{H}^{n-k}$-rettificabile per $\mathscr{L}^k$-quasi ogni $t \in \mathbb{R}^k$ e vale*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \mathscr{H}^{n-k}(E \cap f^{-1}(t)) d\mathscr{H}^k(t) = \int_E C_k d^E f_x d\mathscr{H}^n(x),$$

dove il fattore di coarea k-dimensionale *è definito da*

$$C_k L = \sqrt{\det(L\, L^*)},$$

per ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con trasposta $L^* : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.

1.6 Disintegrazione e misure di Young

Innanzitutto diamo le principali definizioni riguardanti la misurabilità di mappe a valori misure e i prodotti generalizzati di misure.

Definizione 1.31. *Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^k$ insiemi aperti e sia μ una misura di Radon positiva su E. Una mappa $x \mapsto \nu_x$ da E nelle misure di Radon finite a valori in $\mathbb{R}^m$ su F è detta* (debolmente*) μ-misurabile *se $x \mapsto \int_F \varphi\, d\nu_x$ è μ-misurabile per ogni funzione $\varphi \in C_0(F)$.*

Osserviamo che la condizione richiesta nella definizione è equivalente alla seguente: per ogni boreliano $B \subset F$, l'applicazione $x \mapsto \nu_x(B)$ è μ-misurabile.

Definizione 1.32 (Prodotto generalizzato di misure). *Siano E, F, μ e ν_x come sopra e supponiamo che*

$$\int_{E'} |\nu_x|(F) d\mu(x) < +\infty \qquad \textit{per ogni aperto } E' \subset\subset E.$$

Allora definiamo la misura di Radon $\mu \otimes \nu_x$ a valori in $\mathbb{R}^m$ su $E \times F$ per mezzo della formula

$$\mu \otimes \nu_x(B) = \int_E \int_F \chi_B(x,y) d\nu_x(y) d\mu(x) \qquad \textit{per ogni } B \in \mathcal{B}(K \times F),$$

dove $K \subset E$ è un qualsiasi compatto.

Osservazione 1.33. Con procedimenti standard di approssimazione, si può mostrare che vale

$$\int_{E \times F} f(x,y) d(\mu \otimes \nu_x)(x,y) = \int_E \int_F f(x,y) d\nu_x(y) d\mu(x)$$

se $f : E \times F \to \mathbb{R}$ è di Borel limitata con $\operatorname{spt} f \subset E' \times F$ per un certo $E' \subset\subset E$, oppure se f è $\mu \otimes \nu_x$-sommabile.

Il seguente teorema permette di "invertire" la costruzione effettuata nella definizione di prodotto generalizzato, cioè dimostra che è possibile scrivere una misura su uno spazio prodotto come prodotto di misure sui due fattori. Una dimostrazione si può trovare nella Sezione 2.5 di [12].

Teorema 1.34 (di disintegrazione). *Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ e $F \subset \mathbb{R}^k$ insiemi aperti, ν una misura di Radon su $E \times F$ a valori in $\mathbb{R}^m$, $\pi : E \times F \to E$ la proiezione sul primo fattore e $\mu = \pi_\# |\nu|$. Supponiamo che $|\nu|(K \times F) < \infty$ per ogni compatto $K \subset E$.*
Allora esistono delle misure di Radon finite ν_x su F a valori in $\mathbb{R}^m$ tali che $x \mapsto \nu_x$ sia μ-misurabile, $|\nu_x|(F) = 1$ per μ-quasi ogni $x \in E$ e per ogni $f \in L^1(E \times F, |\nu|)$

(i) *$f(x, \cdot) \in L^1(F, |\nu_x|)$ per μ-quasi ogni $x \in E$;*

(ii) *$x \mapsto \int_F f(x, y) d\nu_x(y) \in L^1(E, \mu)$;*

(iii) *vale l'identità*

$$\int_{E\times F} f(x, y) d\nu(x, y) = \int_E \int_F f(x, y) d\nu_x(y) d\mu(x);$$

(iv) *$|\nu| = \mu \otimes |\nu_x|$.*

Inoltre, se $x \mapsto \nu'_x$ è un'altra mappa μ-misurabile tale che valgano (ii) *e* (iii) *per ogni funzione di Borel limitata con supporto compatto e tale che $\nu'_x(F) \in L^1_{\text{loc}}(E, \mu)$, allora $\nu_x = \nu'_x$ per μ-quasi ogni $x \in E$.*

Se ν è una misura positiva su $E \times F$, allora le ν_x costruite nel teorema risultano essere delle misure di probabilità su F per μ-quasi ogni $x \in E$. Nella teoria della probabilità, questo risultato è noto come esistenza delle probabilità condizionali di una variabile aleatoria a valori in $E \times F$ con legge ν.

Le misure di Young sono state introdotte in [51] per studiare i limiti di successioni di funzioni rapidamente oscillanti, nell'ambito dei problemi di controllo ottimo. Per una trattazione più diffusa si veda la Sezione 2 di [5].

Un problema naturale è quello di calcolare il limite debole in L^p di una successione $f(u_n)$, conoscendo il limite debole della successione u_n. Il seguente esempio mostra che ciò non è in generale possibile.

Esempio 1.35. Consideriamo le successioni di funzioni definite su $[0, 1]$

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x \in \left[\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right[\ \text{ per qualche intero } k \in [0, n-1] \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$v_n(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se} \quad x \in \left[\frac{3k}{3n}, \frac{3k+2}{3n}\right[\quad \text{per qualche intero } k \in [0, n-1] \\ -1 & \text{altrimenti} \ . \end{cases}$$

È facile verificare che $u_n \rightharpoonup 0$ e $v_n \rightharpoonup 0$ debolmente in $L^p([0,1])$ per ogni $p \in [1, \infty[$ e debolmente* per $p = \infty$. Ma considerando $f(t) = t^3$, abbiamo che $f(u_n) \rightharpoonup 0$ e $f(v_n) \rightharpoonup -7/8$.

Fissiamo un aperto $E \subset \mathbb{R}^n$ e uno spazio metrico compatto K. L'idea è associare a una funzione $u : E \to K$ la misura $\nu = \mathscr{L}^n \otimes \delta_{u(x)}$ e di lavorare quindi nello spazio delle misure su $E \times K$. Nel caso di una successione u_k di funzioni rapidamente oscillanti, al limite potremo ottenere una misura $\mathscr{L}^n \otimes \nu_x$, con ν_x che non sia una delta di Dirac. Euristicamente, se le u_k oscillano, la misura ν_x dà la distribuzione asintotica di u_k attorno al punto $x \in K$. L'utilità di questo processo sta nel fatto che lo spazio che otterremo avrà buone proprietà di compattezza.

Definizione 1.36 (Misure di Young). *Una* misura di Young *è una mappa $\nu : E \to \mathcal{P}(K)$ (dove $\mathcal{P}(K)$ è lo spazio delle misure di probabilità su K) che sia $\mathscr{L}^n$-misurabile. La* misura di Young elementare *associata a una mappa misurabile $u : E \to K$ è la mappa $\nu^u : E \to \mathcal{P}(K)$ tale che $\nu^u_x = \delta_{u(x)}$.*

Teorema 1.37 (fondamentale delle misure di Young). *Siano K uno spazio metrico compatto e $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile e limitato. Sia $\eta_{h,x}$ una successione di misure di Young. Allora esistono una misura di Young η_x e una sottosuccessione $\eta_{h(k),x}$ tale che $\eta_{h(k),x} \to \eta_x$ nel senso delle misure di Young, cioè*

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \int_K \phi(x,u) d\eta_{h(k),x}(u) dx = \int_E \int_K \phi(x,u) d\eta_x(u) dx$$

per ogni funzione limitata $\phi(x,u) : E \times K \to \mathbb{R}$ continua rispetto a u e $\mathscr{L}^n$-misurabile rispetto a x.

Capitolo 2

Funzioni BV, insiemi di perimetro finito, funzioni BD

In questo capitolo descriviamo le principali proprietà delle *funzioni a variazione limitata* e delle *funzioni a deformazione limitata*, senza pretesa di completezza, con lo scopo di dare una panoramica globale delle nozioni che ci serviranno nel seguito. In particolare ci concentreremo sulle proprietà fini e sulla decomposizione della derivata.

Per le funzioni a variazione limitata e gli insiemi di perimetro finito il principale riferimento sarà [12], ma una trattazione approfondita si può trovare anche in [36], [40] e [50]. Per quanto riguarda invece le funzioni a deformazione limitata, si possono consultare [34], [9] o [49].

2.1 Funzioni BV

In tutto il seguito indicheremo con Ω un generico aperto di $\mathbb{R}^n$, su cui non faremo (se non in pochi casi particolari) alcuna ipotesi di regolarità.

Definizione 2.1 (Funzioni BV). *Sia $u \in L^1(\Omega)$. Diciamo che u è una* funzione a variazione limitata in Ω *se la derivata distribuzionale di u è rappresentabile con una misura di Radon finita in Ω, cioè se*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega \varphi d(D_i u) \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ e per ogni } i = 1, \dots, n$$

per qualche misura $Du = (D_1 u, \dots, D_n u)$ a valori in $\mathbb{R}^n$. Lo spazio vettoriale delle funzioni a variazione limitata in Ω sarà denotato con $BV(\Omega)$.

Si può anche definire lo spazio $BV_{\text{loc}}(\Omega)$ delle funzioni che siano a variazione limitata in ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$. Osserviamo che lo spazio di Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$

è incluso in $BV(\Omega)$ e che l'inclusione è stretta (si consideri ad esempio, su $\mathbb{R}$, la funzione di Heaviside $\chi_{(0,+\infty)}$).

Passiamo ora a definire la *variazione* di una funzione localmente sommabile in Ω, a valori in $\mathbb{R}^m$.

Definizione 2.2 (Variazione). *Sia $u \in [L^1_{\rm loc}(\Omega)]^m$. Allora definiamo la* variazione di u in Ω *come*

$$V(u,\Omega) = \sup\left\{ \sum_{\alpha=1}^{m} \int_\Omega u^\alpha \mathrm{div}\varphi^\alpha dx \ : \ \varphi \in [C^\infty_c(\Omega)]^{mn} \ , \ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}.$$

Osserviamo che, se $u \in C^1(\Omega)$, allora $V(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|$ (dove $|\nabla u|$ indica la norma euclidea della matrice ∇u) e che la mappa $u \mapsto V(u,\Omega) \in [0,+\infty]$ è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia di $[L^1_{\rm loc}(\Omega)]^m$.

Osservazione 2.3. Sia $u \in [L^1(\Omega)]^m$. Allora $u \in [BV(\Omega)]^m$ se e solo se $V(u,\Omega) < \infty$. Se ciò accade, si ha anche $V(u,\Omega) = |Du|(\Omega)$.

Dall'osservazione appena fatta segue subito che, per $u \in [BV(\Omega)]^m$, la mappa $u \mapsto |Du|(\Omega)$ è semicontinua inferiormente rispetto alla topologia di $[L^1_{\rm loc}(\Omega)]^m$. Inoltre, anche $|Du|(\Omega)$ viene normalmente detta *variazione di u in* Ω.

$[BV(\Omega)]^m$ risulta essere uno spazio di Banach con la norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \int_\Omega |u| dx + |Du|(\Omega).$$

Questa norma però risulta troppo forte per molte applicazioni: ad esempio, le funzioni regolari non sono dense in BV rispetto ad essa. Ci sono vari modi di indebolire la nozione di convergenza in BV (convergenza debole, convergenza stretta ...), su cui però non ci soffermeremo. Citiamo solamente il risultato di densità seguente:

Teorema 2.4 (Approssimazione regolare in BV). *Sia $u \in [L^1(\Omega)]^m$. Allora $u \in [BV(\Omega)]^m$ se e solo se esiste una successione $(u_h) \subset [C^\infty(\Omega)]^m$ tale che $u_h \to u$ in $[L^1(\Omega)]^m$ e $L = \lim_h \int_\Omega |\nabla u_h| dx < \infty$. Inoltre, la migliore costante L è proprio $|Du|(\Omega)$.*

2.2 Funzioni BV di una variabile

Dato che nel seguito ci ridurremo spesso al caso uno–dimensionale considerando restrizioni su rette, è opportuno studiare in modo approfondito le funzioni BV di una variabile. Inoltre lo studio unidimensionale chiarirà molti concetti che verranno poi sviluppati nella descrizione delle proprietà fini delle funzioni BV definite su un aperto di $\mathbb{R}^n$.

La *variazione puntuale* di una funzione u definita *ovunque* in un intervallo $I = (a,b)$ di $\mathbb{R}$, eventualmente anche illimitato, a valori in $\mathbb{R}^m$, è la quantità

$$pV(u,I) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \ : \ n \geq 2 \ , \ a < t_1 < \ldots < t_n < b \right\}.$$

Se u è definita su un qualunque aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$, $pV(u,\Omega)$ si ottiene sommando sui vari intervalli di una partizione di Ω. Questo oggetto però non è invariante per modifiche di u in insiemi $\mathscr{L}^1$-trascurabili, quindi introduciamo la nozione di *variazione essenziale*

$$eV(u,\Omega) = \inf\Big\{ pV(v,\Omega) \ : \ v = u \ \ \mathscr{L}^1\text{-quasi ovunque in } \Omega \Big\}.$$

Il minimo è realizzato se $u \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^m$ e coincide con la variazione $V(u,\Omega)$ precedentemente definita. Ogni funzione $\bar{u}$ che realizzi il minimo viene detta *buona rappresentante* di u. In una dimensione la buona rappresentante si può caratterizzare in modo particolarmente espressivo. Dato che tutte le questioni sono di natura locale, possiamo supporre che u sia definita su un intervallo.

Teorema 2.5 (Struttura della buona rappresentante). *Sia $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $u \in [BV(I)]^m$. Sia A l'insieme degli atomi di Du (cioè $t \in A$ se e solo se $Du(\{t\}) \neq 0$). Allora valgono i fatti seguenti.*

(i) *Esiste un unico $c \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$u^l(t) = c + Du((a,t))\,, \qquad u^r(t) = c + Du((a,t]) \qquad t \in I$$

sono buone rappresentanti di u, rispettivamente quella continua a sinistra e quella continua a destra. Ogni altra funzione $\bar{u} : I \to \mathbb{R}^m$ è una buona rappresentante di u se e solo se

$$\bar{u}(t) \in \big\{ \theta u^l(t) + (1-\theta) u^r(t) \ : \ \theta \in [0,1] \big\} \qquad t \in I.$$

(ii) *Ogni buona rappresentante $\bar{u}$ è continua in $I \setminus A$ ed ha una discontinuità di salto in ogni punto di A:*

$$\bar{u}(t_-) = u^l(t) = u^r(t_-)\,, \qquad \bar{u}(t_+) = u^l(t_+) = u^r(t) \qquad t \in A.$$

(iii) *Ogni buona rappresentante $\bar{u}$ è differenziabile $\mathscr{L}^1$-quasi ovunque in I. La derivata $\bar{u}'$ coincide con la densità di Du rispetto a $\mathscr{L}^1$.*

Osservazione 2.6 (Teorema fondamentale del calcolo in BV). Possiamo riformulare le equazioni che definiscono u^l e u^r nel modo seguente:

$$u^l(s) - u^l(t) = Du([t,s)), \qquad u^r(s) - u^r(t) = Du((t,s]) \qquad a < t < s < b.$$

Queste due equazioni possono essere rilette come il "teorema fondamentale del calcolo in BV"; si deve comunque ricordare che il valore delle buone rappresentanti non è unicamente determinato nei punti che sono atomi di Du, quindi la derivata distribuzionale non è sufficiente per ricostruire completamente la funzione.

In generale, una misura localmente finita μ su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ si può dividere in tre parti. Innanzitutto, la decomposizione di Radon-Nikodým (vedi Teorema 1.7) ci permette di scrivere $\mu = \mu^a + \mu^s$, con $\mu^a \ll \mathscr{L}^1$ e $\mu^s \perp \mathscr{L}^1$. Poi, se poniamo $A = \{t \in \Omega : \mu(\{t\}) \neq 0\}$ (ricordiamo che tale insieme degli atomi di μ è al più numerabile), possiamo ulteriormente decomporre la parte singolare in una parte *di salto* $\mu^j = \mu^s \llcorner A$ e una parte *cantoriana* $\mu^c = \mu^s \llcorner (\Omega \setminus A)$. In questo modo si ottiene

$$\mu = \mu^a + \mu^s = \mu^a + \mu^j + \mu^c.$$

Dato che queste tre misure sono a due a due ortogonali, abbiamo anche $|\mu| = |\mu^a| + |\mu^j| + |\mu^c|$. Diremo che $u \in BV(\Omega)$ è una funzione *di salto* se $Du = D^j u$, cioè se Du è puramente atomica, e che u è una funzione *cantoriana* se $Du = D^c u$, cioè se Du è una misura singolare ma senza atomi.

In una dimensione (e non in dimensione maggiore) possiamo dare la seguente decomposizione di ogni funzione BV.

Corollario 2.7 (Decomposizione di funzioni BV in dimensione uno). *Sia $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato. Allora, ogni funzione $u \in [BV(\Omega)]^m$ si può rappresentare con $u^a + u^j + u^c$, dove $u^a \in [W^{1,1}(\Omega)]^m$, u^j è una funzione di salto e u^c è una funzione cantoriana. Queste tre funzioni sono univocamente determinate a meno di costanti additive e*

$$\begin{aligned} |Du|(\Omega) &= |Du^a|(\Omega) + |Du^j|(\Omega) + |Du^c|(\Omega) \\ &= \int_a^b |\bar{u}'(t)|dt + \sum_{t \in A} |\bar{u}(t_+) - \bar{u}(t_-)| + |Du^c|(\Omega), \end{aligned}$$

dove $\bar{u}$ è una qualsiasi buona rappresentante di u.

2.3 Insiemi di perimetro finito

Definizione 2.8 (Insiemi di perimetro finito). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{L}^n$-misurabile e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Allora il* perimetro *di E in Ω, indicato con $P(E,\Omega)$, è la variazione di χ_E in Ω. Diciamo che E è un* insieme di perimetro finito *in Ω se $P(E,\Omega) < \infty$.*

Osserviamo subito che se la frontiera di E è di classe C^1 allora $P(E,\Omega) = \mathscr{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial E)$, grazie al teorema della divergenza. Quindi questa nozione di perimetro è consistente con la definizione classica di "misura del bordo".

La teoria degli insiemi di perimetro finito ha strette correlazioni con la teoria delle funzioni BV. Se supponiamo che $\mathscr{L}^n(E \cap \Omega) < \infty$, allora $\chi_E \in L^1(\Omega)$. Grazie all'Osservazione 2.3, concludiamo subito che *E ha perimetro finito in Ω se e solo se $\chi_E \in BV(\Omega)$*, e inoltre $P(E,\Omega)$ coincide con $|D\chi_E|(\Omega)$. In generale possiamo sempre affermare che funzioni caratteristiche di insiemi di perimetro finito in Ω appartengono a $BV_{\text{loc}}(\Omega)$ (non necessariamente a $BV(\Omega)$, dato che può mancare la sommabilità). Viceversa, se $\chi_E \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ possiamo dire che E ha perimetro finito in ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$; in questo caso, diciamo che E è un *insieme di perimetro localmente finito in Ω*.

Il seguente teorema generalizza la formula di coarea mostrata precedentemente per le funzioni lipschitziane e in particolare ci dice che, se $u \in BV(\Omega)$, la misura Du si può ricostruire integrando le funzioni caratteristiche dei sopralivelli di u.

Teorema 2.9 (Formula di coarea in BV). *Per ogni insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ vale*

$$V(u,\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{x \in \Omega : u(x) > t\}, \Omega) dt.$$

In particolare se $u \in BV(\Omega)$ gli insiemi $\{u > t\}$ hanno perimetro finito in Ω per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e

$$|Du|(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} |D\chi_{\{u>t\}}|(B) dt \quad , \quad Du(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} D\chi_{\{u>t\}}(B) dt$$

per ogni boreliano $B \subset \Omega$.

La struttura degli insiemi di perimetro finito è molto chiara in una dimensione, mentre le cose si complicano in dimensione superiore. Vale il fatto seguente:

Proposizione 2.10 (Struttura degli insiemi di perimetro finito in una dimensione). *Sia E un insieme di perimetro finito in $(a,b) \subset \mathbb{R}$ tale che $\mathscr{L}^1(E \cap (a,b)) > 0$. Allora esistono un intero $p \geq 1$ e p intervalli $J_i = [a_{2j-1}, a_{2j}]$ a due a due disgiunti tali che $E \cap (a,b)$ è equivalente a $\cup_1^p J_i$ e $P(E,(a,b)) = \#\{i \in \{1,\dots,2p\} : a_i \in (a,b)\}$.*

In dimensione superiore non si può ottenere una caratterizzazione così elementare degli insiemi di perimetro finito. Il prossimo teorema, dovuto a E. De Giorgi ([29]), mostra che la frontiera (definita in modo opportuno) di un insieme E di perimetro finito è rettificabile e inoltre che la misura $D\chi_E$ si concentra su tale frontiera.

Definizione 2.11 (Frontiera ridotta). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. La* frontiera ridotta *$\mathcal{F}E$ di E è costituita dai punti $x \in \operatorname{spt}|D\chi_E| \cap \Omega$ tali che esista il limite*

$$\nu_E(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E|(B_\rho(x))}$$

e sia $|\nu_E(x)| = 1$.
La mappa $\nu_E : \mathcal{F}E \to \mathbb{S}^{n-1}$ viene detta normale interna generalizzata.

Osservazione 2.12. Si verifica che $\mathcal{F}E$ e ν_E sono di Borel. Inoltre dal teorema di derivazione di Besicovitch (Teorema 1.23) segue subito che $|D\chi_E|$ è concentrata su $\mathcal{F}E$ e che $D\chi_E = \nu_E|D\chi_E|$.

Teorema 2.13 (De Giorgi). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito in Ω. Allora $\mathcal{F}E$ è numerabilmente $(n-1)$-rettificabile e $|D\chi_E| = \mathscr{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$.*

Osservazione 2.14. Combinando il teorema di De Giorgi e la formula di coarea in BV si può mostrare la seguente implicazione:

$$\mathscr{H}^{n-1}(B) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad |Du|(B) = 0,$$

dove $B \subset \Omega$ è un boreliano e $u \in [BV(\Omega)]^m$.

Si può dare anche un'altra nozione di "frontiera nel senso della misura" per un insieme misurabile, tramite la nozione di densità.

Definizione 2.15. *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, per ogni $t \in [0,1]$ definiamo l'*insieme dei punti di densità t

$$E^t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathscr{L}^n(E \cap B_\rho(x))}{\mathscr{L}^n(B_\rho(x))} = t \right\}.$$

La frontiera essenziale di E *è l'insieme*

$$\partial^* E = \mathbb{R}^n \setminus (E^0 \cup E^1).$$

Teorema 2.16 (Federer). *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito in Ω. Allora*

$$\mathcal{F}E \cap \Omega \subset E^{1/2} \subset \partial^* E \qquad e \qquad \mathscr{H}^{n-1}(\Omega \setminus (E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1)) = 0.$$

In particolare, E ha densità 0, $1/2$ o 1 per $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ogni $x \in \Omega$ e $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ogni $x \in \partial^* E \cap \Omega$ appartiene a $\mathcal{F}E$.

2.4 Proprietà fini delle funzioni BV

Cominciamo con il definire il concetto di *limite approssimato*. La nostra definizione è leggermente diversa da quella usuale (data per mezzo delle densità degli insiemi di livello), ma manteniamo questo approccio dato che saremo sempre interessati a funzioni localmente sommabili e definite solo quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue.

Definizione 2.17 (Limite approssimato). *Sia $u \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^m$. Diciamo che u ha* limite approssimato in $x \in \Omega$ *se esiste $z \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\lim_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(x)} |u(y) - z| dy = 0.$$

L'insieme S_u dei punti in cui u non ha limite approssimato viene detto insieme di discontinuità approssimata di u. *Inoltre, se $x \in \Omega \setminus S_u$, il valore $z = \tilde{u}(x)$ (univocamente) definito sopra è detto* limite approssimato di u in x.

Diremo anche che una funzione u (definita ovunque in Ω) è *approssimativamente continua* in x se $x \notin S_u$ e $\tilde{u}(x) = u(x)$. Osserviamo che, per il teorema di derivazione di Lebesgue (Corollario 1.24), $\mathscr{L}^n(S_u) = 0$. Inoltre, $\tilde{u} : \Omega \setminus S_u \to \mathbb{R}^m$ è una funzione boreliana e $\tilde{u} = u$ $\mathscr{L}^n$-quasi ovunque in $\Omega \setminus S_u$.

Ora vogliamo descrivere il comportamento di una funzione che salti lungo una ipersuperficie. Fissiamo $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ e definiamo le "mezze palle" lungo la direzione ν:

$$B^{\pm}_\rho(x,\nu) = \big\{ y \in B_\rho(x) \ : \ \langle y - x, \nu \rangle \gtrless 0 \big\}.$$

Definizione 2.18 (Salti approssimati). *Sia $u \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^m$ e sia $x \in \Omega$. Diciamo che x è un* punto di salto approssimato *per u se esistono $a, b \in \mathbb{R}^m$, con $a \neq b$, e $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ tali che*

$$\lim_{\rho\to 0} \fint_{B^+_\rho(x,\nu)} |u(y) - a| dy = 0 \qquad e \qquad \lim_{\rho\to 0} \fint_{B^-_\rho(x,\nu)} |u(y) - b| dy = 0.$$

La terna (a, b, ν) è univocamente determinata, a meno di un cambio di segno di ν e dello scambio di a e b, e sarà indicata con $(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x))$. Denoteremo con J_u l' insieme dei punti di salto approssimato di u.

Osserviamo che $J_u \subset S_u$ è un insieme di Borel e che è possibile scegliere in modo boreliano le funzioni

$$(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x)) : J_u \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Osservazione 2.19 (Convergenza delle regolarizzate). Sia $u \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^m$. Allora

$$\begin{aligned} x \in \Omega \setminus S_u \quad &\Rightarrow \quad u * \rho_\epsilon(x) \to \tilde{u}(x) && \text{per } \epsilon \downarrow 0 \\ x \in J_u \quad &\Rightarrow \quad u * \rho_\epsilon(x) \to \frac{1}{2}(u^+(x) + u^-(x)) && \text{per } \epsilon \downarrow 0, \end{aligned}$$

dove ρ_ϵ è una qualsiasi famiglia di mollificatori (definita come nella Sezione 1.3).

Il seguente teorema generalizza il teorema di De Giorgi (Teorema 2.13) e descrive il comportamento della derivata di una funzione BV sull'insieme di salto.

Teorema 2.20 (Federer-Vol'pert). *Per ogni $u \in [BV(\Omega)]^m$ l'insieme S_u è numerabilmente $(n-1)$-rettificabile, $\mathscr{H}^{n-1}(S_u \setminus J_u) = 0$ e $Du \llcorner J_u = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathscr{H}^{n-1} \llcorner J_u$.*

Passiamo ora alla definizione di *differenziabilità approssimata.*

Definizione 2.21 (Differenziabilità approssimata). *Sia $u \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^m$ e sia $x \in \Omega \setminus S_u$. Diciamo che u è* approssimativamente differenziabile in x *se esiste una matrice $m \times n$ L tale che*

$$\lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - L(y-x)|}{\rho} dy = 0.$$

Se u è approssimativamente differenziabile in x, la matrice L (univocamente) definita sopra è detta differenziale approssimato *di u in x e verrà indicata con $\nabla u(x)$.*

Anche l'insieme $\mathcal{D}_u \subset \Omega \setminus S_u$ dei punti di differenziabilità approssimata è boreliano e la mappa $\nabla u : \mathcal{D}_u \to \mathbb{R}^{m \times n}$ è di Borel.

Il seguente classico teorema dimostra che una funzione BV è approssimativamente differenziabile in quasi ogni punto e che il differenziale approssimato permette di ricostruire la parte assolutamente continua della derivata.

Teorema 2.22 (Calderón–Zygmund). *Una funzione $u \in [BV(\Omega)]^m$ è approssimativamente differenzabile per $\mathscr{L}^n$-quasi ogni $x \in \Omega$ e ∇u coincide con la densità di Du rispetto a $\mathscr{L}^n$.*

Enunciamo infine due teoremi sulle tracce di funzioni BV.

Teorema 2.23 (Tracce su insiemi rettificabili interni). *Sia $u \in [BV(\Omega)]^m$ e sia $\Gamma \subset \Omega$ un insieme numerabilmente $(n-1)$-rettificabile orientato dal vettore normale ν. Allora, per $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ogni $x \in \Gamma$ esistono $u^\pm_\Gamma \in \mathbb{R}^m$ tali che*

$$\lim_{\rho \to 0} \fint_{B^\pm_\rho(x,\nu(x))} |u(y) - u^\pm_\Gamma(x)| dy = 0.$$

Inoltre $Du \llcorner \Gamma = (u^+_\Gamma - u^-_\Gamma) \otimes \nu \mathscr{H}^{n-1} \llcorner \Gamma$ e gli operatori di traccia *$u \mapsto u^\pm_\Gamma$ sono continui tra $[BV(\Omega)]^m$ dotato della convergenza stretta (data dalla convergenza in $[L^1(\Omega)]^m$ delle funzioni e in $\mathbb{R}$ delle variazioni totali in Ω) e $[L^1(\Gamma, \mathscr{H}^{n-1} \llcorner \Gamma)]^m$.*

Teorema 2.24 (Operatore di traccia sul bordo). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con frontiera lipschitziana e limitata e sia $u \in [BV(\Omega)]^m$. Allora per $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ogni $x \in \partial\Omega$ esiste $u^\Omega(x) \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \rho^{-n} \int_{\Omega \cap B_\rho(x)} |u(y) - u^\Omega(x)| dy = 0.$$

*Inoltre, l'*operatore di traccia *$u \mapsto u^\Omega$ è continuo tra $[BV(\Omega)]^m$ dotato della convergenza stretta e $[L^1(\partial\Omega, \mathscr{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega)]^m$.*

Osserviamo che il secondo teorema discende facilmente dal primo, grazie al fatto che $u \in [BV(\Omega)]^m$ può essere prolungata a $v \in [BV(\mathbb{R}^n)]^m$ ponendo $v = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

2.5 Decomposizione della derivata e chain–rule

In analogia a quanto fatto in una dimensione (vedi Corollario 2.7), vogliamo identificare diverse parti della derivata Du di una funzione $u \in [BV(\Omega)]^m$, in base al diverso comportamento come misure. Dal Teorema di Radon–Nikodým possiamo scrivere $Du = D^a u + D^s u$, con $D^a u \ll \mathscr{L}^n$ e $D^s u \perp \mathscr{L}^n$.

Definizione 2.25. *Sia $u \in [BV(\Omega)]^m$. La* parte di salto *di Du è $D^j u = D^s \llcorner J_u$, la* parte cantoriana *di Du è $D^c u = D^s u \llcorner (\Omega \setminus S_u)$.*

Ricordando che $|Du|(S_u \setminus J_u) = 0$, dato che l'insieme $S_u \setminus J_u$ è $\mathscr{H}^{n-1}$-trascurabile (Osservazione 2.14), abbiamo la decomposizione

$$Du = D^a u + D^j u + D^c u = \widetilde{D}u + D^j u,$$

dove con $\widetilde{D}u = D^a u + D^j u$ abbiamo indicato la *parte diffusa* della derivata.

La parte cantoriana della derivata è la più difficile da controllare: questo ha portato all'introduzione, da parte di De Giorgi e Ambrosio ([30]), dello spazio SBV delle funzioni *speciali a variazione limitata*, nell'ambito dei problemi a discontinuità libera. Si definisce

$$SBV(\Omega) = \{u \in BV(\Omega) : D^c u = 0\}.$$

Le parti assolutamente continua e di salto hanno caratterizzazioni abbastanza esplicite. Dal Teorema 2.22 segue che $D^a u = \nabla u \mathscr{L}^n$, mentre per quanto riguarda la parte di salto abbiamo la rappresentazione

$$D^j u = (u^+(x) - u^-(x)) \otimes \nu_u(x) \mathscr{H}^{n-1} \llcorner J_u.$$

Considerando la decomposizione polare $Du = g|Du|$, data la mutua singolarità delle tre misure, otteniamo anche $D^\sigma u = g|D^\sigma u|$, con $\sigma = a, c, j$. Allora vale

$g(x) = \nabla u(x)/|\nabla u(x)|$ per $\mathscr{L}^n$-quasi ogni $x \in \Omega$ tale che $\nabla u(x) \neq 0$. Inoltre, $g(x) = \eta(x) \otimes \nu_u(x)$ per $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ogni $x \in J_u$, con $\eta(x) = \dfrac{u^+(x) - u^-(x)}{|u^+(x) - u^-(x)|}$. È naturale chiedersi quale sia il rango della matrice g: quanto detto garantisce che il rango di $g(x)$ è uno per $|D^j u|$-quasi ogni $x \in \Omega$. Il seguente teorema ci garantisce che tale proprietà vale anche $|D^c u|$-quasi ovunque.

Teorema 2.26 (del rango uno di Alberti). *Se $u \in [BV(\Omega)]^m$ e $Du = g|Du|$, allora g ha rango uno $|D^j u| + |D^c u|$-quasi ovunque in Ω.*

Per completezza, descriviamo anche la chain–rule in BV. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $u \in [BV(\Omega)]^m$. Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ è di classe C^1, allora $v = f \circ u \in [BV(\Omega)]^p$ e, ricordando che $\widetilde{D}u = D^a u + D^c u$ è la parte diffusa della derivata, vale la seguente rappresentazione di Dv:

$$\begin{cases} \widetilde{D}v = \nabla f(u) \nabla u \mathscr{L}^n + \nabla f(\tilde{u}) D^c u = \nabla f(\tilde{u}) \widetilde{D}u \\ D^j v = (f(u^+) - f(u^-)) \otimes \nu_u \mathscr{H}^{n-1} \llcorner J_u. \end{cases}$$

2.6 Sezioni unidimensionali di funzioni BV

Un possibile approccio alle funzioni a variazione limitata è tramite le *sezioni unidimensionali*. Questo metodo consiste nel guardare il comportamento delle restrizioni della funzione lungo un numero di direzioni indipendenti pari alla dimensione dello spazio, deducendo informazioni sulla derivata in $\mathbb{R}^n$ da informazioni sulle derivate direzionali delle restrizioni. Storicamente questo è il primo approccio con cui si è guardato a BV (ma anche alle funzioni di Sobolev) in dimensione maggiore o uguale a due; per una trattazione di questo tipo si può vedere [50].

Cominciamo con il fissare le principali notazioni. Sia $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, indichiamo con π_ξ l'iperpiano ortogonale a ξ e con Ω^ξ la proiezione ortogonale di Ω su π_ξ. Per $y \in \Omega^\xi$ poniamo

$$\Omega^\xi_y = \{t \in \mathbb{R} : y + t\xi \in \Omega\}$$

e

$$u^\xi_y : \Omega^\xi_y \to \mathbb{R}^m \ , \qquad u^\xi_y(t) = u(y + t\xi).$$

Definizione 2.27. *Sia $u \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^m$ e sia $p \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Diciamo che la derivata direzionale di u lungo p è una misura se esiste una misura di Radon μ in Ω a valori in $\mathbb{R}^m$ tale che*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial p} dx = -\int_\Omega \varphi d\mu \qquad \textit{per ogni } \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

La misura μ (se esiste) è univocamente determinata da questa condizione ed è indicata con $D_p u$.

Osservazione 2.28. È immediato verificare che $u \in [BV(\Omega)]^m$ se e solo se $u \in [L^1(\Omega)]^m$ ed esistono $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti tali che $D_{p_i} u$ è una misura di Radon per ogni $i = 1, \dots, n$.

Possiamo definire la variazione di u in Ω nella direzione ξ come

$$V_\xi(u, \Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} dx \quad : \quad \varphi \in C_c^1(\Omega)\,, \quad |\varphi(x)| \leq 1 \right\},$$

e si verifica facilmente che $V_\xi(u, \Omega)$ condivide tutte le buone proprietà della variazione $V(u, \Omega)$ definita in precedenza.

Teorema 2.29. *Siano $u \in [L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)]^m$ e $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$. Allora*

$$V_\xi(u, \Omega) = \int_{\Omega^\xi} V(u_y^\xi, \Omega_y^\xi) d\mathscr{H}^{n-1}(y).$$

Osservazione 2.30. Dall'ultimo teorema e dall'osservazione immediatamente precedente segue che per $u \in [L^1(\Omega)]^m$ sono equivalenti

(i) $u \in [BV(\Omega)]^m$;

(ii) esistono $\xi_1, \dots \xi_n \in \mathbb{S}^{n-1}$ linearmente indipendenti tali che $u_y^{\xi_i} \in [BV(\Omega_y^{\xi_i})]^m$ per $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ogni $y \in \Omega^\xi$ e $\int_{\Omega^{\xi_i}} |Du_y^{\xi_i}|(\Omega_y^{\xi_i}) d\mathscr{H}^{n-1}(y) < +\infty$, per ogni $i = 1, \dots, n$.

Il seguente teorema di struttura descrive come è possibile ricostruire la derivata direzionale a partire dalle derivate delle restrizioni; la tesi ammette una scrittura compatta utilizzando il formalismo dei prodotti generalizzati introdotto nella Definizione 1.32.

Teorema 2.31 (di struttura in BV). *Se $u \in [BV(\Omega)]^m$ e $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ allora*

$$D_\xi u = \mathscr{L}^{n-1} \llcorner \Omega^\xi \otimes Du_y^\xi$$

e per $\sigma = a, j, c$

$$D_\xi^\sigma u = \mathscr{L}^{n-1} \llcorner \Omega^\xi \otimes D^\sigma u_y^\xi.$$

2.7 Funzioni a deformazione limitata

Lo spazio delle *funzioni a deformazione limitata* $BD(\Omega)$ è stato introdotto da H. Matthies, G. Strang e E. Christiansen in [45] e successivamente studiato da vari autori, in relazione a problemi variazionali in teoria della plasticità. Si tratta di una classe di campi vettoriali che ha alcune caratteristiche in comune con le funzioni BV, principalmente dal punto di vista delle proprietà fini, ma per la cui definizione si richiede solo che la derivata *simmetrica* sia una misura: sia ha dunque l'inclusione stretta $BV \subset BD$. In questa sezione e nella successiva descriviamo i principali risultati noti sulle funzioni a deformazione limitata, seguendo la trattazione data in [9] e in [34]. Un ulteriore riferimento è [49].

Definizione 2.32 (Funzioni BD). *Sia $u \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Diciamo che u è una* funzione a deformazione limitata*, e scriviamo $u \in BD(\Omega)$, se la derivata distribuzionale simmetrica Eu,*

$$Eu = \frac{1}{2}\big(Du + {}^tDu\big),$$

è una misura di Radon finita su Ω, a valori nelle matrici $n \times n$.

Osserviamo che, se Ω è un aperto limitato con bordo lipschitziano e $u \in BD(\Omega)$, allora la funzione

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a $BD(\mathbb{R}^n)$.

Ripercorriamo i risultati ottenuti nella teoria delle funzioni BV, mostrando che buona parte di essi si adattano in maniera naturale a BD. I limiti approssimati e i salti approssimati introdotti nella Sezione 2.4 sono ben definiti nella sola ipotesi che la funzione sia localmente sommabile, quindi anche nel caso BD otteniamo un insieme di discontinuità approssimata S_u e un insieme di salto approssimato J_u. Il teorema di Radon–Nikodým permette di decomporre la derivata Eu in una parte assolutamente continua e in una singolare rispetto a $\mathscr{L}^d$. Considerando poi la restrizione della parte singolare a J_u oppure al complementare si ottiene la decomposizione

$$Eu = E^a u + E^s u = E^a u + E^s u \llcorner J_u + E^s u \llcorner (\Omega \setminus J_u) = E^a u + E^j u + E^c u.$$

Indichiamo con $\mathscr{E}u$ la densità di Eu rispetto a $\mathscr{L}^d$; analogamente a quanto fatto nel caso BV, $\mathscr{E}u$ si può rileggere come *differenziale simmetrico approssimato* di u, cioè vale

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \fint_{B_\rho(x)} \frac{|\langle u(y) - u(x) - \mathscr{E}u(x)(y-x), y-x\rangle|}{|y-x|^2} dy = 0$$

per $\mathscr{L}^n$-quasi ogni $x \in \Omega$. Anche nel caso BD si può mostrare che J_u è numerabilmente $\mathscr{H}^{n-1}$-rettificabile, e si può mostrare la formula per la parte di salto della derivata

$$Eu \llcorner J_u = (u^+ - u^-) \odot \nu_u \mathscr{H}^{n-1} \llcorner J_u, \tag{2.1}$$

avendo indicato con $\odot$ il prodotto tensoriale simmetrico (cioè $a \odot b = (a \otimes b + b \otimes a)/2$). Un problema attualmente aperto per BD è quello relativo alla misura della differenza $S_u \setminus J_u$. Nel caso BV è noto che $\mathscr{H}^{n-1}(S_u \setminus J_u) = 0$, mentre nel caso BD si sa solamente che la dimensione di Hausdorff della differenza tra i due insiemi è al più $n-1$.

2.8 Teorema di struttura e funzioni SBD

Sia $u \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e sia $\xi \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Allora definiamo Ω_y^ξ e Ω^ξ come fatto nella Sezione 2.6 e poniamo, diversamente da quanto fatto prima,

$$u_y^\xi(t) = \langle u(y + t\xi), \xi \rangle.$$

Come al solito, $\tilde{u} : \Omega \setminus S_u \to \mathbb{R}^n$ indica la rappresentante approssimativamente continua di u, definita solo sui punti di Lebesgue.

Il seguente teorema, che sarà di fondamentale importanza per lo studio dei commutatori in BD nella Sezione 8.1, estende le costruzioni fatte nella Sezione 2.6 (in particolare il Teorema 2.31), mostrando come si possa ricostruire la derivata simmetrica di una funzione BD a partire da informazioni sulle derivate direzionali di certe componenti del campo.

Teorema 2.33 (di struttura in BD). *Sia $u \in BD(\Omega)$ e sia $\xi \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Allora per $\mathscr{H}^{n-1}$-quasi ogni $y \in \Omega^\xi$ le funzioni u_y^ξ e $\tilde{u}_y^\xi$ appartengono a $BV(\Omega_y^\xi)$ e coincidono $\mathscr{L}^1$-quasi ovunque in Ω_y^ξ, le misure Du_y^ξ e $V(\tilde{u}_y^\xi, \cdot)$ coincidono su Ω_y^ξ e*

$$\langle \mathscr{E}u(y + t\xi)\xi, \xi \rangle = \nabla u_y^\xi(t) = (\tilde{u}_y^\xi)'(t)$$

per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in \Omega_y^\xi$. Inoltre, per $\sigma = a, j, c$ valgono

$$\langle E^\sigma u\xi, \xi \rangle = \int_{\Omega^\xi} D^\sigma u_y^\xi \, d\mathscr{H}^{n-1}(y)\,, \qquad |\langle E^\sigma u\xi, \xi \rangle| = \int_{\Omega^\xi} |D^\sigma u_y^\xi| \, d\mathscr{H}^{n-1}(y).$$

Il teorema di struttura ha motivato l'introduzione delle funzioni *speciali a deformazione limitata*, cioè le funzioni a deformazione limitata la cui parte cantoriana della derivata è nulla:

$$SBD(\Omega) = \{u \in BD(\Omega) : E^c u = 0\}.$$

Dal teorema di struttura si ricava subito l'equivalenza, per $u \in BD(\Omega)$:

$$u \in SBD(\Omega) \iff \forall \xi \in \mathbb{S}^{n-1}, u_y^\xi \in SBV(\Omega_y^\xi) \text{ per } \mathscr{H}^{n-1}\text{-quasi ogni } y \in \Omega^\xi.$$

Capitolo 3

Problema di Cauchy ed equazione del trasporto

Cominciamo ora a descrivere l'argomento centrale di questa tesi, cioè il rapporto tra l'*equazione del trasporto* e il *problema di Cauchy* nel caso in cui il campo vettoriale non sia regolare, ma solo debolmente differenziabile. In questo capitolo descriviamo in maniera informale i due diversi approcci al problema e sintetizziamo i principali risultati della teoria nel caso regolare. Presentiamo inoltre un risultato generale di esistenza per l'equazione del trasporto e descriviamo alcuni esempi di non unicità. Infine, viene introdotta la nozione di *soluzione rinormalizzata* e si mostra la strategia che permette di dedurre l'unicità per l'equazione del trasporto dalla proprietà di rinormalizzazione.

3.1 Problema di Cauchy ed equazione del trasporto

Sia $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^d$, dipendente dal tempo. Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = b(t, \psi(t)) \\ \psi(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Se il campo $b(t,x)$ è sufficientemente regolare, i teoremi dell'analisi classica ci assicurano esistenza, unicità e stabilità rispetto al dato iniziale del flusso. Il *teorema di Cauchy–Lipschitz* dà esistenza ed unicità locale della soluzione se b è localmente lipschitziano in x, uniformemente rispetto a t. Se b è anche limitato si ha esistenza della soluzione per tutti i tempi, cioè per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^d$ si trova una funzione $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ che risolve il problema (3.1). In questo modo si costruisce il *flusso* Ψ del campo b, cioè una funzione

$$\Psi : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(t,x) = b(t, \Psi(t,x)) \\ \Psi(0,x) = x. \end{cases}$$

Il *teorema di Peano* invece dà esistenza della soluzione nella sola ipotesi di continuità di b rispetto a x (rispetto a t, in entrambi i teoremi, è sufficiente che ci sia misurabilità). In generale la soluzione non è unica, come mostra il seguente ben noto esempio su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = \sqrt{|\psi(t)|} \\ \psi(0) = 0. \end{cases}$$

Bisogna però osservare che per tutti i dati iniziali $\psi(0) = x_0 \neq 0$ si ha unicità locale della soluzione del problema di Cauchy. Per verificarlo supponiamo $x_0 > 0$ e definiamo $G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\sqrt{y}}$. Allora esiste un intorno di x_0 su cui G è di classe C^1 e $G' \neq 0$, e quindi possiede un'inversa g, anch'essa C^1. Sia allora $\psi(t)$ una soluzione C^1 del problema di Cauchy in un intorno di $t = 0$. Dato che $\frac{d}{dt}G(\psi(t)) = 1$, otteniamo che $G(\psi(t)) = t$ e quindi che $\psi(t) = g(t)$ (sul comune intervallo di definizione), da cui l'unicità.

Il primo problema che vorremmo affrontare è quello di determinare le "minime" condizioni di regolarità da imporre al campo b in modo da avere un'unica soluzione del problema (3.1), almeno per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^d$. In questa forma forte il problema è attualmente aperto, per cui affronteremo una formulazione più debole: cercheremo unicità per i flussi nella classe delle soluzioni che siano "stabili" per approssimazioni regolari del campo b. Questo primo aspetto del problema viene normalmente detto *lagrangiano*.

In parallelo, sviluppando ed ampliando i risultati della classica *teoria delle caratteristiche*, si svolge lo studio del versante *euleriano* del problema, cioè quello relativo all'esistenza ed unicità delle soluzioni (deboli) dell'equazione del trasporto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu_t}{\partial t} + D_x \cdot (b\mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \bar{\mu}, \end{cases} \tag{3.2}$$

in cui il dato iniziale $\bar{\mu}$ è una misura e l'incognita è una famiglia di misure μ_t, $t \in [0,T]$, che risolva (3.2) in senso distribuzionale. La teoria delle caratteristiche permette di ottenere una soluzione dell'equazione del trasporto avendo a disposizione il flusso del campo vettoriale. Il passaggio inverso è relativamente recente e risale al lavoro di DiPerna e Lions del 1989 ([32]).

Nella prossima sezione vedremo che esiste un collegamento naturale tra questi due problemi, almeno nel caso in cui b sia sufficientemente regolare. Nei successivi capitoli si chiarirà poi come estendere queste tecniche nel caso in cui il campo sia meno regolare (tipicamente, di Sobolev o a variazione limitata).

L'approccio maggiormente seguito in letteratura è quello di mostrare l'unicità (in una certa classe) delle soluzioni dell'equazione del trasporto: da ciò vengono poi dedotte informazioni sui flussi dell'equazione ordinaria. La principale strategia per arrivare all'unicità si basa sulla cosiddetta *proprietà di rinormalizzazione*. Tale proprietà consiste nel richiedere che, data una soluzione w dell'equazione del trasporto, per ogni $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 la funzione $\beta(w)$ risulti essere una soluzione di un'opportuna equazione del trasporto, ottenuta applicando formalmente la regola di derivazione della funzione composta nel caso regolare. Gran parte del lavoro che si dovrà compiere consisterà nel mostrare la validità della proprietà di rinormalizzazione in ipotesi di regolarità sempre più deboli su b.

3.2 La teoria nel caso regolare

La teoria dell'equazione del trasporto è ben sviluppata nel caso in cui il campo sia regolare e si basa principalmente sulla teoria delle caratteristiche: riferimenti generali sono ad esempio [35] e [41]. In questa sezione riassumiamo i risultati principali, seguendo l'esposizione che si può trovare in [18].

L'equazione del trasporto si può trovare in due diverse forme, equivalenti nel caso in cui b abbia divergenza spaziale nulla:

(i) *equazione del trasporto in forma non conservativa, o in "advective form"*

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0\,; \tag{3.3}$$

(ii) *equazione di continuità o equazione del trasporto in forma conservativa*

$$\partial_t f(t,x) + \mathrm{div}_x[b(t,x) f(t,x)] = 0\,. \tag{3.4}$$

In questa sezione supporremo che il campo $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sia "sufficientemente regolare", cioè regolare quanto basta per soddisfare tutte la manipolazioni formali che effettueremo.

Definizione 3.1. *Una* caratteristica *per (3.3) o (3.4) è una funzione $X(s)$ di classe C^1 su un intervallo di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^d$ tale che*

$$\frac{dX}{dt} = b(s, X(s)).$$

In ipotesi di regolarità e limitatezza del campo le caratteristiche esistono sempre. In particolare, per ogni $t \in [0, T]$ e ogni $x \in \mathbb{R}^d$, esiste un'unica caratteristica definita su tutto $[0, T]$ e tale che $X(t) = x$. Tale caratteristica sarà indicata con

$$X(s, t, x) \in C^1([0, T]_s \times [0, T]_t \times \mathbb{R}^d_x).$$

Dalla definizione di X e dall'unicità nel problema di Cauchy segue subito che, per ogni $t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ e ogni $x \in \mathbb{R}^d$, vale la *proprietà di semigruppo*:

$$X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x). \tag{3.5}$$

Se poi definiamo $J(s, t, x) = \det(\nabla_x X(s, t, x))$, si può facilmente mostrare che J è sempre strettamente positivo e verifica l'equazione

$$\frac{\partial J}{\partial s} = (\mathrm{div}_x b)(s, X(s, t, x))J. \tag{3.6}$$

Infine, osservando che per ogni $s, t \in [0, T]$ la mappa $x \mapsto X(s, t, x)$ è un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^d$ con inversa $X(t, s, \cdot)$, si deduce che le caratteristiche verificano la seguente coppia di equazioni:

$$\begin{cases} \partial_s X(s, t, x) = b(s, X(s, t, x)) \\ \partial_t X(s, t, x) + (b(t, x) \cdot \nabla_x) X(s, t, x) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

A questo punto siamo in grado di enunciare il teorema di esistenza e unicità per i problemi di Cauchy relativi a (3.3) e (3.4).

Teorema 3.2. *Supponiamo che $b(t, x)$ sia limitato e di classe C^1.*

(i) *Se $u^0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, allora esiste un'unica soluzione $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ di (3.3) con dato iniziale $u(0, x) = u^0(x)$, e inoltre u è data da*

$$u(t, x) = u^0(X(0, t, x)). \tag{3.8}$$

(ii) *Se $f^0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$, allora esiste un'unica soluzione $f \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ di (3.4) con dato iniziale $f(0, x) = f^0(x)$, e inoltre f è data da*

$$f(t, x) = f^0(X(0, t, x))J(0, t, x). \tag{3.9}$$

Dim. (i) Per mostrare che (3.8) definisce una soluzione di (3.3) è sufficiente moltiplicare la seconda equazione in (3.7) per $\nabla_x u^0(X(0,t,x))$. Viceversa, sia $u \in C^1$ soluzione di (3.3). Allora per ogni coppia (t_0, x_0) vale

$$\frac{d}{ds}u(s,X(s,t_0,x_0)) = \partial_t u(s,X(s,t_0,x_0)) + \nabla_x u(s,X(s,t_0,x_0)) \cdot b(s,X(s,t_0,x_0)) = 0,$$

quindi $u(s,X(s,t_0,x_0)) = u^0(X(0,t_0,x_0))$. Ponendo $X(s,t_0,x_0) = x$ abbiamo

$$u(s,x) = u^0(X(0,t_0,X(t_0,s,x))) = u^0(X(0,s,x)).$$

(ii) Sia f una soluzione di (3.4). Allora

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f(s,X(s,t_0,x_0)) &= \partial_t f(s,X(s,t_0,x_0)) + \nabla_x f(s,X(s,t_0,x_0)) \cdot b(s,X(s,t_0,x_0)) \\ &= -(\mathrm{div}_x b)(s,X(s,t_0,x_0)) f(s,X(s,t_0,x_0)) \\ &= -f(s,X(s,t_0,x_0))\frac{\partial_s J(s,t_0,x_0)}{J(s,t_0,x_0)}.\end{aligned}$$

Quindi

$$f(s,X(s,t_0,x_0)) = f^0(X(0,t_0,x_0))\frac{J(0,t_0,x_0)}{J(s,t_0,x_0)}.$$

Differenziando la (3.5) rispetto a x e prendendone i determinanti si ottiene

$$J(t_3,t_2,X(t_2,t_1,x))J(t_2,t_1,x) = J(t_3,t_1,x),$$

che per $t_3 = 0$, $t_2 = s$, $t_1 = t_0$ e $x = x_0$ dà

$$\frac{J(0,t_0,x_0)}{J(s,t_0,x_0)} = J(0,s,X(s,t_0,x_0)),$$

da cui si ricava immediatamente l'espressione (3.9). Viceversa, f definita da (3.9) verifica per ogni (t_0, x_0)

$$(\partial_t f + \mathrm{div}_x(bf))(s,X(s,t_0,x_0)) = 0$$

e quindi è soluzione di (3.4). $\square$

Osservazione 3.3. Le ipotesi di regolarità sui dati iniziali sono chiaramente sovrabbondanti: le equazioni (3.3) e (3.4) hanno un'unica soluzione anche se i dati iniziali (in senso distribuzionale) u^0 e f^0 appartengono solo a $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Inoltre, anche se sostituiamo a (3.3) e (3.4) le equazioni

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = v(t,x)$$

e

$$\partial_t f(t,x) + \mathrm{div}_x[b(t,x)f(t,x)] = g(t,x),$$

con v e g in $L^1_{\mathrm{loc}}(0,T;L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$, si ha un'unica soluzione, per la quale si può anche dare una formula esplicita, analoga alle (3.8) e (3.9).

Osservazione 3.4 (Soluzioni misure dell'equazione di continuità). La formula (3.9) ha un'immediata generalizzazione nel caso in cui si cerchino soluzioni dell'equazione di continuità che siano *misure*, nel senso del problema di Cauchy (3.2). Adottando per semplicità la notazione $X(t,x) = X(t,0,x)$, risulta che la soluzione μ_t è il push–forward del dato iniziale $\bar\mu$ secondo il flusso del campo b, cioè

$$\mu_t = X(t,\cdot)_\#\bar\mu.$$

Verifichiamo che μ_t è soluzione di (3.2) nel senso delle distribuzioni in $(0,T)\times\mathbb{R}^d$. Poiché è sufficiente considerare funzioni test del tipo $\psi(t)\varphi(x)$, con $\psi \in C^\infty_c((0,T))$ e $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, basta verificare che

$$\int_{\mathbb{R}} \big[-\psi'(t)\langle \mu_t,\varphi\rangle - \psi(t)\langle b\mu_t,\nabla\varphi\rangle\big]dt = 0\,.$$

Ciò è equivalente a

$$\frac{d}{dt}\langle \mu_t,\varphi\rangle = \langle b\mu_t,\nabla\varphi\rangle \quad \text{in } \mathcal{D}'((0,T))\,, \qquad \text{per ogni } \varphi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^d).$$

Dato che la mappa $t\mapsto\langle\mu_t,\varphi\rangle$ è continua per ogni φ, possiamo verificare questa identità distribuzionale puntualmente in t. Ma allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \mu_t,\varphi\rangle &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(X(t,x))d\bar\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\nabla\varphi(X(t,x))\cdot\partial_t X(t,x)d\bar\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\nabla\varphi(X(t,x))\cdot b(t,X(t,x))d\bar\mu(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\nabla\varphi(y)\cdot b(t,y)d\mu_t(y)\\
&= \langle\mu_t,\nabla\varphi\cdot b\rangle = -\langle D_x\cdot(b\mu_t),\varphi\rangle,
\end{aligned}$$

cioè la tesi. Possiamo reinterpretare la formula (3.9) in questo nuovo quadro: in effetti è facile verificare (sfruttando la formula dell'area) che vale

$$f(t,x)\mathscr{L}^d = X(t,\cdot)_\# f^0(x)\mathscr{L}^d.$$

A questo punto è molto chiaro come i due problemi, quello lagrangiano e quello euleriano, siano collegati, almeno nella direzione lagrangiano $\rightsquigarrow$ euleriano. Il passaggio inverso, euleriano $\rightsquigarrow$ lagrangiano, già presente nel lavoro di DiPerna e Lions ([32]), sarà illustrato seguendo l'approccio di L. Ambrosio ([7]), basandosi essenzialmente sulla teoria delle *misure di Young* (si veda il Capitolo 6).

3.3 Esistenza, ma non unicità

Per quanto riguarda l'equazione del trasporto l'*esistenza* di soluzioni non è mai un problema. Il seguente semplice lemma mostra che, in ipotesi ragionevoli (limitatezza dei dati), si ha esistenza di una soluzione debole limitata.

Lemma 3.5 (Esistenza per l'equazione del trasporto). *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}_x(bu) + cu = f \\ u(0,x) = u^0(x), \end{cases} \tag{3.10}$$

con $t \in [0,T]$ e $x \in \mathbb{R}^d$, e supponiamo che f, c, b e $\mathrm{div}_x b$ siano in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e che $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora esiste una soluzione debole $u \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$.

Dim. Regolarizziamo tutti i dati (ad esempio per convoluzione) in modo che $b_\epsilon \to b$, $u^0_\epsilon \to u^0$, $c_\epsilon \to c$ e $f_\epsilon \to f$, dove tutte le convergenze sono in L^1_{loc} dei rispettivi domini, e in modo che si abbia uniforme limitatezza, cioè $|b_\epsilon| \leq C$, $|u^0_\epsilon| \leq C$, $|c_\epsilon| \leq C$, $|f_\epsilon| \leq C$ e $|\mathrm{div} b_\epsilon| \leq C$ per ogni ϵ. Sia poi u_ϵ la soluzione classica del problema regolarizzato

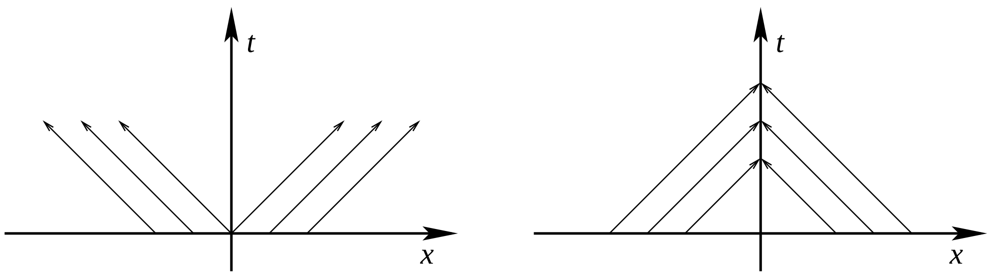
$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon + \mathrm{div}_x(b_\epsilon u_\epsilon) + c_\epsilon u_\epsilon = f_\epsilon \\ u_\epsilon(0,x) = u^0_\epsilon(x). \end{cases}$$

Dalla rappresentazione esplicita di u_ϵ, che può essere ricavata in modo analogo a quanto è stato fatto nel Teorema 3.2 e richiamato nell'Osservazione 3.3, segue che (u_ϵ) è limitata in $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, uniformemente rispetto ad ϵ. Allora, grazie alla linearità dell'equazione, è possibile passare al limite in $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$-debole* nelle equazioni regolarizzate, e ogni punto limite di (u_ϵ) risulta essere una soluzione di (3.10). $\square$

In generale però la soluzione non è unica, inoltre si possono produrre concentrazioni in tempo finito, cioè un dato iniziale L^∞ può evolvere diventando una misura con parte atomica. Si vedano i seguenti due esempi: nella figura a pagina seguente sono indicate le caratteristiche per le due equazioni.

Esempio 3.6 (Non unicità per l'equazione del trasporto). Consideriamo l'equazione
$$\partial_t u + \mathrm{sgn} x \, \partial_x u = 0 \tag{3.11}$$
in una dimensione spaziale, dove la funzione segno è definita da
$$\mathrm{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$
Per ogni funzione $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiamo
$$u(t,x) = \begin{cases} u^0(x+t) & \text{se } x+t < 0 \\ u^0(x-t) & \text{se } x-t > 0 \\ h(t-|x|) & \text{se } -t < x < t\,. \end{cases}$$

Se la funzione h e il dato iniziale u^0 sono lipschitziani e vale inoltre $h(0) = u^0(0)$, allora $u(t,x)$ è lipschitziana nelle due variabili e soddisfa (quasi ovunque in t e x) l'equazione (3.11) con dato iniziale u^0. Data l'arbitrarietà di h, non si ha unicità per la soluzione dell'equazione (3.11).



Esempio 3.7 (Concentrazione della soluzione). Consideriamo ora l'equazione in forma conservativa
$$\partial_t f - \partial_x(\mathrm{sgn} x \, f) = 0, \tag{3.12}$$
in una dimensione spaziale. Allora una soluzione di (3.12) nel senso delle distribuzioni è
$$f(t,x) = \begin{cases} f^0(x+t) & \text{se } x > 0 \\ f^0(x-t) & \text{se } x < 0 \\ \left(\int_{-t}^{t} f^0\right) \delta(x) & \text{se } x = 0\,, \end{cases}$$
dove f^0 è il dato iniziale, che può anche essere scelto di classe C^∞: lo si può verificare ricordando l'Osservazione 3.4. Quindi, anche a partire da dati iniziali molto regolari, possono immediatamente svilupparsi concentrazioni nella soluzione. Osserviamo anche che, se il campo vettoriale $b(t,x) = -\mathrm{sgn} x$ è considerato definito solamente

$\mathscr{L}^2$-quasi ovunque (ad esempio, se si considera definita la funzione segno solo fuori dall'origine), si hanno dei problemi nella definizione della quantità $b(t,x)f(t,x)$ per $x = 0$. Non tratteremo questo aspetto del problema, dato che considereremo sempre soluzioni L^∞ rispetto alla misura di Lebesgue; possibili riferimenti in questa direzione sono [46], [19] e [20].

Come vedremo nei prossimi capitoli, i due esempi proposti sono altamente singolari. Infatti, le condizioni "giuste" che dovranno essere imposte sui campi vettoriali saranno di due tipi (oltre ad altre condizioni tecniche e di crescita, che illustreremo nel seguito):

- condizioni di *regolarità* del campo, che potrà essere in uno spazio di Sobolev ([32]) oppure in BV ([7]); in alternativa si possono imporre opportune condizioni sulla parte simmetrica della derivata distribuzionale ([22] e [10]);

- condizioni sulla *divergenza spaziale* del campo, che dovrà sempre essere assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.

Nei due esempi non viene chiaramente soddisfatta la seconda condizione, quindi l'intera teoria risulta non applicabile. Nel seguito vedremo anche alcuni esempi più raffinati, in cui le richieste sul campo verrano indebolite in maniera più ridotta, fornendo anche alcune indicazioni in vista di una discussione sull'"ottimalità" delle ipotesi.

3.4 Soluzioni rinormalizzate

Come già accennato nella prima sezione di questo capitolo, la principale strategia per mostrare l'unicità della soluzione dell'equazione del trasporto, introdotta in [32], consiste nel mostrare che le soluzioni godono della *proprietà di rinormalizzazione*.

In questa sezione introdurremo, per ora a livello informale, la proprietà di rinormalizzazione come una chain–rule, elementare nel caso regolare, ma da dimostrare nei casi di minore regolarità del campo b. Inoltre mostreremo come, in opportune ipotesi, la proprietà di rinormalizzazione implichi l'unicità.

Consideriamo dunque l'equazione del trasporto

$$\partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0. \tag{3.13}$$

Sia $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Moltiplicando la (3.13) per $\beta'(u(t,x))$, otteniamo

$$\beta'(u(t,x))\partial_t u(t,x) + \beta'(u(t,x))b(t,x) \cdot \nabla_x u(t,x) = 0.$$

Nel caso regolare l'ordinaria chain–rule ci permette di riscrivere l'equazione precedente come

$$\partial_t \beta(u(t,x)) + b(t,x) \cdot \nabla_x \beta(u(t,x)) = 0. \tag{3.14}$$

Questo passaggio non è però giustificato (e in generale è falso, come si vedrà in seguito) senza ipotesi di regolarità. u viene detta *soluzione rinormalizzata* dell'equazione del trasporto (3.13) se vale (3.14) per ogni funzione $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Nei capitoli successivi daremo la definizione di soluzione rinormalizzata in ambito più generale, quando ad esempio l'equazione (3.13) avrà un membro destro non nullo, oppure per funzioni u a valori vettoriali.

Concludiamo questa sezione mostrando l'idea della dimostrazione dell'unicità delle soluzioni rinormalizzate di (3.13). Per la linearità dell'equazione, è sufficiente mostrare che se il dato iniziale è nullo allora si ha solo la soluzione identicamente nulla. Integrando su tutto $\mathbb{R}^d$ l'equazione (3.14), otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \beta(u(t,x)) dx + \int_{\mathbb{R}^d} b(t,x) \cdot \nabla_x \beta(u(t,x)) dx = 0.$$

Grazie al teorema sulla divergenza, supponendo che il termine di bordo si annulli, si ricava

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \beta(u(t,x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \beta(u(t,x)) \mathrm{div}_x b(t,x) dx. \tag{3.15}$$

Ora supponiamo che β sia positiva e che ci sia un controllo uniforme della divergenza spaziale del campo, cioè che esista $C < \infty$ indipendente da t tale che

$$\|\mathrm{div}_x b(t,x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \qquad \text{per ogni } t \in [0,T].$$

In queste ipotesi dalla (3.15) deduciamo che

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \beta(u(t,x)) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} \beta(u(t,x)) dx.$$

Scegliamo $\beta(s) = s^2$ e applichiamo il Lemma di Gronwall: essendo il dato iniziale u^0 nullo abbiamo $\int_{\mathbb{R}^d} (u(0,x))^2 dx = 0$ e allora otteniamo subito che $\int_{\mathbb{R}^d} (u(t,x))^2 dx = 0$ per ogni t, e quindi che $u(t,x) \equiv 0$.

Capitolo 4

La teoria di DiPerna–Lions e i suoi sviluppi successivi

Il primo approccio al problema di Cauchy e all'equazione del trasporto per campi vettoriali non regolari risale al 1989 ed è dovuto a R. J. DiPerna e P. L. Lions ([32] e [33]). Nelle prime tre sezioni di questo capitolo descriviamo la Sezione II di [32], dando risultati di esistenza, stabilità ed unicità per l'equazione del trasporto con campo vettoriale di Sobolev. Rimandiamo invece le applicazioni alle equazioni ordinarie (Sezione III di [32]) alla Sezione 6.3 (in cui si farà un confronto con l'approccio considerato in [7]) e i controesempi (Sezione IV di [32]) al Capitolo 9.

Presentiamo inoltre alcuni sviluppi successivi della teoria di DiPerna e Lions. Nella Sezione 4.4 illustriamo un risultato di Capuzzo Dolcetta e Perthame ([22]), che mostra che la proprietà di rinormalizzazione vale anche nell'ipotesi più debole che la parte simmetrica della derivata distribuzionale sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Ci muoviamo poi nella direzione dei campi vettoriali con derivata misura. Nel 1998 Lions ([44]) ha introdotto un'opportuna classe di campi vettoriali "$W^{1,1}$ a tratti", estendendo la teoria di [32] anche a questa classe. Successivamente, F. Bouchut ([17]) ha studiato un caso di regolarità parziale, $W^{1,1}$ rispetto ad alcune variabili e BV rispetto ad altre, nell'ambito più particolare dell'equazione di Vlasov (Sezione 4.5): il suo lavoro è di fondamentale importanza dato che viene introdotta la tecnica di *regolarizzazione anisotropa*. Nel lavoro di F. Colombini e N. Lerner [26] viene introdotta la classe dei campi vettoriali "conormali BV", per cui gli autori mostrano unicità delle soluzioni deboli (Sezione 4.6). Nel 2003 L. Ambrosio ([7]) ha provato la proprietà di rinormalizzazione per campi vettoriali BV con divergenza assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Il suo risultato sarà presentato nel successivo Capitolo 5. Infine, vedendo contemporaneamente i risultati in [22] e [7], siamo stati spinti a cercare una prova della proprietà di rinormalizzazione per campi BD: questo obiettivo non è stato raggiunto completamente, ma nel Capitolo 8 verranno esposti i risultati ottenuti con L. Ambrosio e S. Maniglia (contenuti in [10]) relativi alla rinormalizzazione in SBD.

4.1 Esistenza e regolarizzazione

Chiariamo una notazione che ricorrerà molto spesso nel seguito. Se X è uno spazio di Banach, è chiaro cosa si intenda con gli spazi $L^1(I;X)$ e $L^1_{\rm loc}(I;X)$, dove I è un intervallo di $\mathbb{R}$. Se X è uno spazio di Lebesgue o di Sobolev, spesso ci servirà un'ulteriore localizzazione, anche nella variabile spaziale. Dovremo cioè definire anche gli spazi $L^1(I;L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))$, $L^1(I;W^{1,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))\dots$ Diremo ad esempio che $f \in L^1_{\rm loc}(I;X_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))$ se, per ogni $J \subset\subset I$ e ogni $R>0$, vale

$$\int_J \|f_t\|_{X(B_R)} dt < \infty.$$

Diremo inoltre che $f_n \to f$ in $L^1_{\rm loc}(I;X_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))$ se, per ogni $J \subset\subset I$ e ogni $R>0$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \int_J \|(f_n)_t - f_t\|_{X(B_R)} dt = 0.$$

Il primo problema che viene affrontato in [32] è quello dell'esistenza di soluzioni per l'equazione del trasporto nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - b\cdot\nabla_x u + cu = 0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d)\,, \tag{4.1}$$

nell'ipotesi che

$$b \in L^1(0,T;(L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d)\,, \qquad c \in L^1(0,T;L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)). \tag{4.2}$$

Data una condizione iniziale $u^0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, per qualche $p \in [1,\infty]$, cerchiamo soluzioni di (4.1) appartenenti a $L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^d))$. Il dato iniziale deve essere inteso in senso distribuzionale, ad esempio si può richiedere che valga

$$-\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d} u\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxdt - \int_{\mathbb{R}^d} u^0\varphi(0,x)dx + \int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d} u[\mathrm{div}(b\varphi)+c\varphi]dxdt = 0 \tag{4.3}$$

per ogni funzione test $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ con supporto contenuto in $[0,T[\times\mathbb{R}^d$. Infatti, nel caso regolare, la (4.3) si ricava integrando per parti l'equazione

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d}\left[\frac{\partial u}{\partial t} - b\cdot\nabla_x u + cu\right]\varphi\, dtdx = 0$$

ed imponendo che il dato iniziale classico sia u^0. Osserviamo che, per dare senso a questa definizione, dobbiamo anche supporre

$$c + \mathrm{div} b \in L^1(0,T; L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)) , \qquad b \in L^1(0,T; (L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d), \tag{4.4}$$

dove q è l'esponente coniugato di p (cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Proposizione 4.1 (Esistenza per l'equazione (4.1)). *Siano $p \in [1, \infty]$ e $u^0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Supponiamo che valgano (4.2) e (4.4) e che*

$$\begin{cases} c + \frac{1}{p}\mathrm{div}\, b \in L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^d)) & se\;\; p > 1 \\ c,\ \mathrm{div}\, b \in L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^d)) & se\;\; p = 1. \end{cases}$$

Allora esiste una soluzione $u \in L^\infty(0,T; L^p(\mathbb{R}^d))$ di (4.1) con dato iniziale u^0.

Omettiamo la dimostrazione, che comunque ricalca le linee della dimostrazione del Lemma 3.5, con qualche complicazione dovuta alla minore regolarità dei dati. L'idea è trovare delle stime a priori per le soluzioni regolari, poi regolarizzare i dati in modo da avere soluzioni classiche, e infine passare al limite debole, sfruttando la compattezza ottenuta grazie alle stime a priori.

Sia ρ_ϵ una famiglia di mollificatori su $\mathbb{R}^d$, su cui per ora non facciamo particolari ipotesi oltre a quelle standard (supponiamo cioè $\rho \in C^\infty_c$, pari e con integrale unitario). Uno dei principali risultati di DiPerna e Lions è il seguente teorema.

Teorema 4.2. *Sia $p \in [1, \infty]$, sia $u \in L^\infty(0,T; L^p(\mathbb{R}^d))$ una soluzione di (4.1) e supponiamo che*

$$b \in L^1(0,T; (W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d) , \qquad c \in L^1(0,T; L^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$$

per qualche $\alpha \geq q$. Allora $u_\epsilon = u * \rho_\epsilon$ soddisfa

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\epsilon + c u_\epsilon = s_\epsilon,$$

dove $s_\epsilon \to 0$ in $L^1(0,T; L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$, con $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{p}$ se α o $p < \infty$, $\beta < \infty$ arbitrario se $\alpha = p = \infty$.

Osservazione 4.3. Lo stesso risultato vale se sostituiamo 0 nel membro a destra della (4.1) con $f \in L^1(0,T; L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$.

Questo teorema risulta essere una conseguenza immediata del seguente

Lemma 4.4 (Convergenza dei commutatori).

(i) *Siano* $b \in (W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d$ *e* $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *con* $p \in [1,\infty]$ *e* $\alpha \geq q$. *Allora il commutatore* r_ϵ *tende a zero fortemente, i.e.*

$$r_\epsilon = (b \cdot \nabla u) * \rho_\epsilon - b \cdot \nabla(u * \rho_\epsilon) \to 0 \qquad \text{in } L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d),$$

con β *come nel Teorema 4.2.*

(ii) *Siano* $b \in L^1(0,T;(W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d)$ *e* $u \in L^\infty(0,T;L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$ *con* $p \in [1,\infty]$ *e* $\alpha \geq q$. *Allora il commutatore* r_ϵ *tende a zero fortemente, i.e.*

$$r_\epsilon = (b \cdot \nabla u) * \rho_\epsilon - b \cdot \nabla(u * \rho_\epsilon) \to 0 \qquad \text{in } L^1(0,T;L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)),$$

con β *come nel Teorema 4.2.*

Dim. (i) Innanzitutto, osserviamo che possiamo riscrivere il commutatore nel modo seguente:

$$\begin{aligned} r_\epsilon &= (b \cdot \nabla u) * \rho_\epsilon - b \cdot \nabla(u * \rho_\epsilon) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} u(y)[\mathrm{div}_y(b(y)\rho_\epsilon(x-y)) + b(x) \cdot \nabla\rho_\epsilon(x-y)]dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} u(y)[(b(y)-b(x)) \cdot \nabla\rho_\epsilon(x-y)]dy - (u\mathrm{div} b) * \rho_\epsilon. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Da risultati standard sulle convoluzioni (richiamati nella Sezione 1.3), il secondo termine converge a $u\,\mathrm{div} b$ in $L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ per $\epsilon \to 0$. Se $\mathrm{spt}\rho \subset B_C$, possiamo stimare il primo addendo per ϵ abbastanza piccolo con

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{|x-y|<C\epsilon} u(y)(b(y)-b(x)) \cdot \nabla\rho_\epsilon(x-y)dy \right\|_{L^\beta_x(B_R)} \\ \leq\ & \int_{z \in B_{C\epsilon}} \|u(x-z)(b(x-z)-b(x)) \cdot \nabla\rho_\epsilon(z)\|_{L^\beta_x(B_R)} dz \\ \leq\ & \int_{z \in B_{C\epsilon}} \|u\|_{L^p(B_{R+C\epsilon})} \|(b(x-z)-b(x)) \cdot \nabla\rho_\epsilon(z)\|_{L^\alpha_x(B_R)} dz \\ \leq\ & \|u\|_{L^p(B_{R+1})} \int_{z \in B_{C\epsilon}} \left\| \frac{b(x-z)-b(x)}{\epsilon\, \epsilon^d} \cdot \epsilon^{d+1}\nabla\rho_\epsilon(z) \right\|_{L^\alpha_x(B_R)} dz, \end{aligned}$$

ricordando che $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\alpha}$ e supponendo anche $C\epsilon < 1$.

Ora, osservando che $\epsilon^{d+1}\nabla\rho_\epsilon$ è limitato in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ indipendentemente da ϵ, dobbiamo stimare solo

$$\begin{aligned}
&\int_{z\in B_{C\epsilon}} \frac{1}{\epsilon^d}\left(\int_{x\in B_R}\left|\frac{b(x-z)-b(x)}{\epsilon}\right|^\alpha dx\right)^{1/\alpha} dz \\
\leq &\left(\int_{y\in B_C}\int_{x\in B_R}\left|\frac{b(x-\epsilon y)-b(x)}{\epsilon}\right|^\alpha dxdy\right)^{1/\alpha} \\
= &\left(\int_{y\in B_C}\int_{x\in B_R}\left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^1\frac{d}{dt}b(x-t\epsilon y)dt\right|^\alpha dxdy\right)^{1/\alpha} \\
= &\left(\int_{y\in B_C}\int_{x\in B_R}\left|\int_0^1\nabla b(x-t\epsilon y)(-y)dt\right|^\alpha dxdy\right)^{1/\alpha} \\
\leq &\ C\left(\int_{y\in B_C}\int_{x\in B_R}\int_0^1\left|\nabla b(x-t\epsilon y)\right|^\alpha dtdxdy\right)^{1/\alpha} \quad\leq\quad C\|\nabla b\|_{L^\alpha(B_{R+C})},
\end{aligned}$$

dove si è applicata due volte la disuguaglianza di Jensen (1.2), ricordando che $\alpha\geq 1$.

Per concludere, nel caso $p<\infty$, è sufficiente mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(y)[(b(y)-b(x))\cdot\nabla\rho_\epsilon(x-y)]dy \to u\mathrm{div}b \qquad \text{in } L^\beta_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$$

nel caso in cui u e b siano regolari: il caso generale segue per densità, sfruttando la stima uniforme appena ricavata. Ma la convergenza è chiara nel caso in cui u e b siano regolari: infatti

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} u(y)[(b(y)-b(x))\cdot\nabla\rho_\epsilon(x-y)]dy \\
= &\int_{\mathbb{R}^d} u(x-\epsilon z)\frac{b(x-\epsilon z)-b(x)}{\epsilon}\cdot\nabla\rho(z)dz \\
\longrightarrow &\ -u(x)\int_{\mathbb{R}^d} Db(x)(z)\cdot\nabla\rho(z)dz \\
= &\ -u(x)\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial b^i}{\partial x_j}(x)z_j\frac{\partial\rho}{\partial z_i}(z)dz \\
= &\ -u(x)\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial b^i}{\partial x_j}(x)\int_{\mathbb{R}^d} z_j\frac{\partial\rho}{\partial z_i}(z)dz \ = \ u(x)\mathrm{div}b(x),
\end{aligned}$$

dato che $\int z_j\frac{\partial\rho}{\partial z_i}(z)dz = -\delta_{ij}$, come si verifica facilmente con un'integrazione per parti.

Questo procedimento di regolarizzazione non funziona nel caso $p = \infty$, dato che permetterebbe di ottenere la tesi solo per le funzioni u che siano continue. Bisognerà stimare in modo più accurato, osservando che nel caso L^∞ si ha convergenza in misura delle traslate. Non diamo qui la dimostrazione completa in questo caso, dato che essa sarà recuperata in un contesto più generale (si veda la dimostrazione del Teorema 5.3).

(ii) La seconda parte del lemma è una facile conseguenza della prima parte e del teorema della convergenza dominata. Infatti le stime ricavate in (i) valgono per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in [0,T]$, grazie alle ipotesi su u e b. Quindi, per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in [0,T]$, abbiamo che

$$\Big((b \cdot \nabla u) * \rho_\epsilon - b \cdot \nabla(u * \rho_\epsilon)\Big)(t,x) \to 0 \qquad \text{in } L^\beta_{\mathrm{loc},x}(\mathbb{R}^d).$$

Vogliamo mostrare che

$$\int_0^T \Big\| \big((b \cdot \nabla u) * \rho_\epsilon - b \cdot \nabla(u * \rho_\epsilon)\big)(t,x) \Big\|_{L^\beta_x(B_R)} dt \to 0$$

per ogni $R > 0$. È sufficiente allora far vedere che l'integrando, come funzione di t, è dominato da una funzione sommabile su $[0,T]$. Ma per il punto (i) si ha

$$\begin{aligned} & \Big\| \Big((b \cdot \nabla u) * \rho_\epsilon - b \cdot \nabla(u * \rho_\epsilon)\Big)(t,x) \Big\|_{L^\beta_x(B_R)} \\ \leq \;& K\Big[\|u(t,x)\|_{L^p_x(B_{R+1})} \|\nabla b(t,x)\|_{L^\alpha_x(B_{R+C})} + \|(u \mathrm{div} b)(t,x)\|_{L^\beta_x(B_R)} \Big], \end{aligned}$$

che è appunto una funzione sommabile su $[0,T]$ grazie alle ipotesi sulla dipendenza da t di u e b. □

Osservazione 4.5 (Campo BV e soluzioni continue). Otteniamo la stessa tesi, con $\beta = 1$, anche se supponiamo u continua in $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$, $c \in L^1(0,T; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$, $b \in L^1(0,T; (L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d)$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} b_j(t,x) \quad \text{misura limitata su } [0,T] \times K \text{ per ogni } i,j = 1, \dots, d$$

e

$$\int_0^T \|\mathrm{div}_x b(t,x)\|_{L^1(K)} dt < \infty$$

per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^d$. Questo include chiaramente anche il caso

$$b \in L^1(0,T; (W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d),$$

ma sotto ipotesi più restrittive su u. Verifichiamolo nel caso in cui non ci sia dipendenza dal tempo. La stima del primo addendo del commutatore nella forma (4.5), in queste nuove ipotesi, diventa

$$\left\| \int_{|x-y|<C\epsilon} u(y)(b(y)-b(x)) \cdot \nabla\rho_\epsilon(x-y)dy \right\|_{L^1_x(B_R)} \leq C\|u\|_{L^\infty(B_{R+1})}|Db|(B_{R+C}).$$

A questo punto per concludere la dimostrazione è sufficiente approssimare in L^1_{loc} il campo b con funzioni regolari: la continuità di u garantisce la tesi come nella dimostrazione precedente. A questo livello risulta naturale congetturare che si possa dimostrare la convergenza dei commutatori nel caso in cui il campo b sia in BV, con divergenza assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, e la soluzione u sia solo in L^∞_{loc}. Questo risultato è stato dimostrato nel 2003 da L. Ambrosio ([7]): il suo lavoro sarà presentato nel Capitolo 5.

DIM. (DEL TEOREMA 4.2) Convolvendo ambo i membri della 4.1 con ρ_ϵ otteniamo

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial t} - b\cdot\nabla_x u + cu\Big) * \rho_\epsilon = 0\,,$$

e sviluppando i conti ricaviamo

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - b\cdot\nabla u_\epsilon + cu_\epsilon = [(b\cdot\nabla u)*\rho_\epsilon - b\cdot\nabla u_\epsilon] + cu_\epsilon - (cu)*\rho_\epsilon\,.$$

Per concludere è ora sufficiente applicare il Lemma 4.4 e osservare che

$$cu_\epsilon - (cu)*\rho_\epsilon \to 0 \qquad \text{in} \;\; L^1(0,T;L^\beta_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)).$$

□

4.2 Unicità per l'equazione del trasporto

Il lavoro di DiPerna e Lions procede quindi con la dimostrazione dell'unicità delle soluzioni dell'equazione del trasporto.

Teorema 4.6 (Unicità per l'equazione (4.1)). *Sia* $p \in [1,\infty]$ *e sia*

$$u \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^d))$$

una soluzione di (4.1) con dato iniziale $u^0 \equiv 0$ *(i.e., u soddisfa (4.3) con* $u^0 \equiv 0$*). Supponiamo che c,* $\mathrm{div} b \in L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^d))$, $b \in L^1(0,T;(W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))^d)$ *e*

$$\frac{b}{1+|x|} \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{R}^d)) + L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^d)). \tag{4.6}$$

Allora $u \equiv 0$.

La dimostrazione di questo teorema ricorda quanto fatto alla fine della Sezione 3.4, con le dovute modifiche viste le minori condizioni di regolarità e sommabilità. Inoltre, combinando il Teorema 4.6 con la Proposizione 4.1, otteniamo immediatamente il seguente corollario, che dà esistenza e unicità per l'equazione (4.1).

Corollario 4.7. *Sia $p \in [1, \infty]$ e sia $u^0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Supponiamo che c,* $\operatorname{div} b \in L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^d))$*, $b \in L^1(0, T; (W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d)$ e*

$$\frac{b}{1 + |x|} \in L^1(0, T; L^1(\mathbb{R}^d)) + L^1(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

Allora esiste un'unica soluzione u di (4.1) in $L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^d))$ che ha come dato iniziale u^0.

Dim. (del Teorema 4.6) Innanzitutto, applicando il Teorema 4.2, deduciamo che

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - b \cdot \nabla u_\epsilon + c u_\epsilon = s_\epsilon \to 0 \qquad \text{in } L^1(0, T; L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)).$$

Da questo otteniamo che, se $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ con β' limitata, allora abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u_\epsilon) - b \cdot \nabla \beta(u_\epsilon) + c u_\epsilon \beta'(u_\epsilon) = s_\epsilon \beta'(u_\epsilon).$$

Per ϵ che tende a zero si ottiene allora

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u) - b \cdot \nabla \beta(u) + c u \beta'(u) = 0 \qquad \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}^d. \tag{4.7}$$

Ora consideriamo delle funzioni di taglio $\phi_R = \phi\left(\frac{\cdot}{R}\right)$ per $R \geq 1$, dove ϕ è una funzione di classe C^∞ su $\mathbb{R}^d$, positiva, con supporto contenuto in B_2 e identicamente uguale ad 1 su B_1. Allora, testando l'equazione distribuzionale (4.7) contro ϕ_R, otteniamo

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \beta(u)\phi_R dx + \int_{\mathbb{R}^d} [c u \beta'(u) + \beta(u) \operatorname{div} b]\phi_R dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \beta(u) b \cdot \nabla \phi_R dx. \tag{4.8}$$

Nel caso $p < \infty$ vorremmo scegliere come funzione per la rinormalizzazione $\beta(t) = (|t| \wedge 1)^p$, che è una funzione lipschitziana, ma non C^1, su $\mathbb{R}$. È però facile verificare (per approssimazione con funzioni regolari) che la formula (4.8) vale anche per tale funzione, quindi deduciamo che

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} (|u| \wedge 1)^p \phi_R dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (|u| \wedge 1)^p \phi_R dx + \frac{C}{R}\int_{R \leq |x| \leq 2R} (|u| \wedge 1)^p |b(t, x)| dx,$$

dove $C = C(t)$ è indipendente da x ed appartiene a $L^1(0,T)$. Ora osserviamo che $(|u| \wedge 1)^p \in L^\infty(0,T; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$ e che

$$\frac{|b(t,x)|}{R}\chi_{\{R \le |x| \le 2R\}} \le 3\frac{|b(t,x)|}{1+|x|}\chi_{\{R \le |x|\}}.$$

Quindi deduciamo dall'ipotesi (4.6) che

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} (|u| \wedge 1)^p \phi_R dx \le C \int_{\mathbb{R}^d} (|u| \wedge 1)^p \phi_R dx \\ + \quad & 3Cm \int_{|x| \ge R} (|u| \wedge 1)^p dx + 3C \int_{|x| \ge R} \frac{|b_1(t,x)|}{1+|x|} dx, \end{aligned}$$

in cui $b = b_1 + b_2$, con $b_1/(1+|x|) \in L^1(0,T; L^1(\mathbb{R}^d))$, $b_2/(1+|x|) \in L^1(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ e $m = \|b_2/(1+|x|)\|_\infty$. Mandando R all'infinito, segue che

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} (|u| \wedge 1)^p dx \le C(t) \int_{\mathbb{R}^d} (|u| \wedge 1)^p dx,$$

da cui applicando il lemma di Gronwall si ricava $(|u| \wedge 1) \equiv 0$ e quindi la tesi.

La dimostrazione nel caso $p = \infty$ si ottiene tramite un argomento di dualità, per il quale ci riferiamo a [32]. In alternativa, si veda direttamente la dimostrazione nel caso BV (Teorema 5.10). □

Concludiamo questa sezione osservando che, dalla dimostrazione del Teorema 4.6, segue anche la validità della formula

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u) - b \cdot \nabla\beta(u) + cu\beta'(u) = 0 \qquad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^d$$

per ogni funzione $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ tale che

$$|\beta'(t)| \le C(1 + |t|^r),$$

con $r = p - 1$ se $q > d$, $r < p - 1$ se $q = d$, $r = \frac{p}{d}$ se $q < d$.

4.3 Soluzioni rinormalizzate e teoremi di stabilità

In [32] viene successivamente esteso il concetto di soluzione rinormalizzata, in modo da poter trattare soluzioni dell'equazione del trasporto non necessariamente in senso distribuzionale. Ciò è utile quando non ci siano stime a priori sulla soluzione (si veda ad esempio la Sezione 4 di [42]).

In tutto il resto di questa sezione supporremo che

$$b \in L^1(0,T;(W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d)\,, \quad \mathrm{div} b \in L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^d))\,, \quad c \in L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^d))$$

e

$$\frac{|b(t,x)|}{1+|x|} \in L^1(0,T;L^1(\mathbb{R}^d)) + L^1(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

Definiamo $L^0 = \{u : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}} : \mathscr{L}^d(\{|u| > \lambda\}) < +\infty \text{ per ogni } \lambda > 0\}$. Se $u \in L^0$ e $\beta \in C(\mathbb{R})$ è limitata e si annulla in un intorno di zero, allora $\beta(u) \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Diciamo che $u_n \to u$ in L^0 se $\beta(u_n) \to \beta(u)$ in L^1 per ogni tale β e che (u_n) è limitata in L^0 se $(\beta(u_n))$ è limitata in L^1 per ogni tale β.

Definizione 4.8. $u \in L^\infty(0,T;L^0)$ *viene detta* soluzione rinormalizzata *di (4.1) se vale*

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta(u) - b \cdot \nabla\beta(u) + cu\beta'(u) = 0 \qquad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^d$$

per ogni $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ che si annulli in un intorno di zero e tale che β e $\dfrac{\beta'(t)}{1+|t|}$ siano limitate su $\mathbb{R}$.

Il seguente teorema garantisce che, in ipotesi di sufficiente regolarità, le nozioni di soluzione rinormalizzata e di soluzione distribuzionale coincidono. Si osservi che la seconda parte del teorema è conseguenza quasi immediata delle osservazioni fatte alla fine della sezione precedente.

Teorema 4.9 (Consistenza). *Supponiamo che*

$$u \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^d))\,, \quad b \in L^1(0,T;(L^{p'}(\mathbb{R}^d))^d) \ \text{ per qualche } p \in [1,\infty]$$

e che valgano le condizioni enunciate all'inizio della sezione. Se u è una soluzione rinormalizzata di (4.1) nel senso della Definizione 4.8, allora u è una soluzione distribuzionale di (4.1). Se $b \in L^1(0,T;(W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))^d)$ vale anche il viceversa.

Citiamo infine il teorema di stabilità seguente, tratto sempre da [32], che dà delle condizioni sotto le quali si ha convergenza delle soluzioni di equazioni approssimanti alla soluzione rinormalizzata dell'equazione limite. Per semplicità consideriamo solo il caso $c = 0$.

Teorema 4.10 (Stabilità per $c = 0$). *Siano $b_n, c_n \in L^1(0,T;L^1_{\mathrm{loc}})$ tali che $\mathrm{div} b_n \in L^1(0,T;L^1_{\mathrm{loc}})$ e supponiamo che b_n, c_n e $\mathrm{div} b_n$ convergano rispettivamente a b, 0 e $\mathrm{div} b$ in $L^1(0,T;L^1_{\mathrm{loc}})$, dove il campo limite b soddisfa le ipotesi enunciate all'inizio della sezione (con $c = 0$). Sia (u_n) una successione limitata in $L^\infty(0,T;L^0)$ tale che, per ogni n, u_n sia soluzione rinormalizzata (nel senso della Definizione 4.8)* *dell'equazione (4.1) con* (b, c) *sostituiti da* (b_n, c_n)*, relativa al dato iniziale* u_n^0*. Supponiamo che* u_n^0 *converga in* L^0_{loc} *a qualche* $u^0 \in L^0$*.*

(i) (Convergenza locale). *Allora* u_n *converge in* $C([0, T]; L^0_{\mathrm{loc}})$ *alla soluzione rinormalizzata* u *di (4.1) con* $c = 0$ *corrispondente al dato iniziale* u^0*. Se supponiamo inoltre che* u_n^0 *converga a* u^0 *in* L^p_{loc} *per qualche* $p \in [1, \infty[$*, che* (u_n) *sia limitata in* $L^\infty(0, T; L^p_{\mathrm{loc}})$ *e che* b_n*,* c_n *e* $\mathrm{div} b_n$ *siano limitate in* $L^1(0, T; L^\infty_{\mathrm{loc}})$*, allora* u_n *converge a* u *in* $C([0, T]); L^p_{\mathrm{loc}})$*.*

(ii) (Convergenza globale). *Supponiamo che* c_n *converga a zero in* $L^1(0, T; L^1 + L^r)$ *(per qualche* $r < \infty$*), che* $\mathrm{div} b_n = \alpha_n^1 + \alpha_n^2$*, con* (α_n^2) *limitata in* $L^1(0, T; L^\infty)$ *e* (α_n^1) *convergente in* $L^1(0, T; L^1)$*, che* u_n^0 *converga a* u^0 *in* L^0 *e che per ogni* n *valga*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \beta(u_n)dx + \int_{\mathbb{R}^d} c_n u_n \beta'(u_n) + \mathrm{div} b_n \beta(u_n)dx = 0$$

per ogni $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ *limitata e nulla in un intorno di zero. Allora* u_n *converge a* u *in* $C([0, T]; L^0)$*. Inoltre, se supponiamo che* u_n^0 *converga a* u^0 *in* L^p *per qualche* $p \in [1, \infty[$*, che* (u_n) *sia limitata in* $L^\infty(0, T; L^p)$ *(o che* $c_n = 0$*) e che* b_n*,* c_n *e* $\mathrm{div} b_n$ *siano limitate in* $L^1(0, T; L^\infty)$*, allora* u_n *converge a* u *in* $C([0, T]); L^p)$*.*

4.4 L'estensione di Capuzzo Dolcetta e Perthame

Nel 1996, I. Capuzzo Dolcetta e B. Perthame ([22]) hanno mostrato la convergenza dei commutatori (vedi il Lemma 4.4) con la sola ipotesi che la *parte simmetrica* della derivata (e non l'intera derivata) di b sia localmente sommabile. Questo risultato, assieme al lavoro di Ambrosio [7], ha motivato la ricerca di un'estensione di questi teoremi nel caso in cui il campo sia BD, obiettivo parzialmente raggiunto in [10] (si veda il Capitolo 8).

Il risultato di Capuzzo Dolcetta e Perthame consiste nel ricavare una stima per (4.5) nello spirito del Lemma 4.4, ma solamente per mezzo della derivata simmetrica. Per questo scopo, è sufficiente considerare un nucleo di convoluzione *radiale*, cioè del tipo $\rho(z) = h(|z|)$, con $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Partendo dalla (4.5) possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} u(y)[(b(y) - b(x)) \cdot \nabla\rho_\epsilon(x - y)]dy \\
= &\int_{\mathbb{R}^d} u(x - \epsilon z)\left[\frac{b(x - \epsilon z) - b(x)}{\epsilon} \cdot \nabla\rho(z)\right]dz \\
= &\int_{\mathbb{R}^d} u(x - \epsilon z)\left[\frac{b(x - \epsilon z) - b(x)}{\epsilon} \cdot \frac{z}{|z|}h'(|z|)\right]dz.
\end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente osservare che

$$\frac{b(x-\epsilon z)-b(x)}{\epsilon}\cdot\frac{z}{|z|}\longrightarrow -Eb(x)z\cdot\frac{z}{|z|}\qquad \text{in } L^1_{\mathrm{loc},x}(\mathbb{R}^d),$$

dato che la derivata simmetrica Eb è localmente sommabile. Per verificarlo, si può utilizzare il teorema di struttura per funzioni di Sobolev, che si può enunciare in modo analogo a quanto fatto nelle Sezioni 2.6 e 2.8. Quindi per concludere è sufficiente ripercorrere l'ultima parte della dimostrazione del lemma 4.4, ottenendo la convergenza a zero dei commutatori. La dimostrazione sarà ripresa con tutti i dettagli nel caso $b \in BD$, trattato nel Capitolo 8: anche in tal caso verranno utilizzati dei nuclei di convoluzione radiali, stimando poi i commutatori con le diverse parti della derivata simmetrica del campo.

4.5 Equazione di Vlasov con coefficienti BV

In questa sezione riassumiamo un risultato di F. Bouchut ([17]) riguardante le soluzioni rinormalizzate dell'equazione di Vlasov con coefficienti a variazione limitata. Presentiamo questo risultato perché viene introdotta la tecnica di *regolarizzazione anisotropa*, che sarà alla base di [7]. L'idea è la seguente: supponiamo di avere un campo che dipenda da due gruppi di variabili x_1 e x_2, con "pochissima" regolarità in x_1 e una "ragionevole" regolarità in x_2 (tutto questo verrà chiarito e formalizzato in questa sezione, nell'Osservazione 5.8 e nella Sezione 9.3). Regolarizziamo il campo con due distinti mollificatori, ρ_ϵ nelle variabili x_1 e τ_μ nelle variabili x_2. La tecnica di regolarizzazione anisotropa consiste nel mandare a zero il parametro di regolarizzazione ϵ più velocemente di τ: ciò permette di ignorare la poca regolarità del campo rispetto alla prima variabile.

L'equazione di Vlasov

$$\partial_t f + \xi\cdot\nabla_x f + \mathrm{div}_\xi[E(t,x)f] = 0 \tag{4.9}$$

descrive l'evoluzione nello spazio delle fasi (x,ξ) della densità f di particelle sottoposte alla legge fondamentale della meccanica $\dot x = \xi$, $\dot\xi = E(t,x)$. La questione della regolarità ottimale del campo di forze $E(t,x)$ che assicuri la buona positura del problema di Cauchy per (4.9) è di interesse nelle applicazioni.

Teorema 4.11 (Bouchut). *Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^m_\xi$ un aperto e siano*

$$v\in L^1(0,T;(W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega))^n)$$

e $E\in L^1(0,T;(L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega))^m)$ tale che, per quasi ogni $t\in[0,T]$, $E(t,\cdot)\in(BV_{\mathrm{loc}}(\Omega))^m$,

$$\int_0^T |DE(t,\cdot)|(\Omega')dt<\infty \qquad \textit{per ogni aperto } \Omega'\subset\subset\Omega$$

e

$$\nabla_\xi E \in L^1(0,T;(L^1_{\text{loc}}(\Omega))^{m\times m}).$$

Sia $f \in L^\infty(0,T;L^\infty_{\text{loc}}(\Omega))$ *tale che*

$$F = \partial_t f + \operatorname{div}_x[v(t,x,\xi)f] + \operatorname{div}_\xi[E(t,x,\xi)f] \in L^1(0,T;L^1_{\text{loc}}(\Omega)).$$

Allora

(i) *per ogni insieme boreliano* $Z \subset \mathbb{R}$ *con* $\mathscr{L}^1(Z) = 0$ *si ha* $F = 0$ $\mathscr{L}^{n+m+1}$*-quasi ovunque in* $f^{-1}(Z)$*;*

(ii) *per ogni* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *lipschitziana vale*

$$\begin{aligned} & \partial_t[g(f)] + \operatorname{div}_x[vg(f)] + \operatorname{div}_\xi[Eg(f)] - g(f)(\operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_\xi E) \\ = \; & g'(f)[\partial_t f + \operatorname{div}_x(vf) + \operatorname{div}_\xi(Ef) - f(\operatorname{div}_x v + \operatorname{div}_\xi E)]. \end{aligned}$$

Osserviamo che le ipotesi del Teorema 4.11 significano che, localmente, la derivata spaziale del campo (v,E) soddisfa

$$\nabla_{x,\xi}(v(t,x,\xi),E(t,x,\xi)) \in \begin{pmatrix} L^1 & L^1 \\ \mathcal{M} & L^1 \end{pmatrix}.$$

Quindi il Teorema 4.11, visto nello scenario della teoria di DiPerna e Lions che tratta il caso di regolarità di tipo Sobolev del campo, suggerisce che la rinormalizzazione vale anche “spezzando” il campo e indebolendo in modo appropriato la regolarità rispetto a certi gruppi di variabili spaziali. A questo proposito, si veda la congettura formulata da Ambrosio in [7], richiamata nell’Osservazione 5.8 del prossimo capitolo.

Daremo la dimostrazione del Teorema 4.11 solo nel caso di non dipendenza dal tempo, essendo il caso generale una semplice variante. Come nel caso di DiPerna e Lions, sarà sufficiente mostrare il lemma seguente.

Lemma 4.12. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_\xi$ *un aperto e siano* $v \in (W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega))^n$, $E \in (BV_{\text{loc}}(\Omega))^m$ *con* $\nabla_\xi E \in (L^1_{\text{loc}}(\Omega))^{m\times m}$ *e* $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$*. Allora esistono due successioni strettamente positive* $\epsilon_n \to 0$ *e* $\mu_n \to 0$ *tali che*

$$(\rho_{\epsilon_n}\otimes\rho_{\mu_n})*[\operatorname{div}_x(vf)+\operatorname{div}_\xi(Ef)]-\operatorname{div}_x[v((\rho_{\epsilon_n}\otimes\rho_{\mu_n})*f)]-\operatorname{div}_\xi[E((\rho_{\epsilon_n}\otimes\rho_{\mu_n})*f)] \to 0 \tag{4.10}$$

in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *per* $n \to \infty$*, dove* ρ_ϵ *e* ρ_μ *sono nuclei di convoluzione in* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *rispettivamente e* $*$ *denota la convoluzione rispetto a tutte le variabili spaziali.*

DIM. Riscriviamo il commutatore $I(x,\xi)$ definito da (4.10) come $I = I^v + I^E$, con

$$I^v(x,\xi) = \iint [f(x-y,\xi-\eta) - f(x,\xi)][v(x-y,\xi-\eta) - v(x,\xi)]\cdot\nabla\rho_\epsilon(y)\rho_\mu(\eta)dyd\eta$$

e

$$I^E(x,\xi) = \iint [f(x-y,\xi-\eta) - f(x,\xi)][E(x-y,\xi-\eta) - E(x,\xi)] \cdot \rho_\epsilon(y)\nabla\rho_\mu(\eta)dyd\eta.$$

Decomponiamo ulteriormente $I^E = I^{E,x} + I^{E,\xi}$, dove $I^{E,x}$ coinvolge $E(x-y,\xi) - E(x,\xi)$ e $I^{E,\xi}$ coinvolge $E(x-y,\xi-\eta) - E(x-y,\xi)$. Consideriamo un aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ tale che $\overline{\Omega'} + \mathrm{spt}(\rho_\epsilon \otimes \rho_\mu) \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. Allora, dato che

$$\|E(x-y,\xi) - E(x,\xi)\|_{L^1_{x,\xi}(\Omega')} \le \|\nabla_x E\|_{\mathcal{M}(\Omega_1)}|y| \qquad \text{se } |y| < \epsilon,$$

otteniamo la stima

$$\begin{aligned} &\|I^{E,x}\|_{L^1_{x,\xi}(\Omega')} \\ \le\ & \frac{\epsilon}{\mu}\Big(\int |\mu\nabla\rho_\mu|\Big)\|\nabla_x E\|_{\mathcal{M}(\Omega_1)} \sup_{|y|<\epsilon,|\eta|<\mu} \|f(x-y,\xi-\eta) - f(x,\xi)\|_{L^\infty_{x,\xi}(\Omega')}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Analogamente possiamo ottenere

$$\begin{aligned} &\|I^{E,\xi}\|_{L^1_{x,\xi}(\Omega')} \\ \le\ & \Big(\int |\mu\nabla\rho_\mu|\Big)\|\nabla_\xi E\|_{L^1(\Omega_1)} \sup_{|y|<\epsilon,|\eta|<\mu} \|f(x-y,\xi-\eta) - f(x,\xi)\|_{L^\infty_{x,\xi}(\Omega')} \end{aligned} \tag{4.12}$$

e

$$\begin{aligned} &\|I^{v}\|_{L^1_{x,\xi}(\Omega')} \\ \le\ & \Big(1+\frac{\mu}{\epsilon}\Big)\Big(\int |\epsilon\nabla\rho_\epsilon|\Big)\|\nabla_{x,\xi} v\|_{L^1(\Omega_1)} \sup_{|y|<\epsilon,|\eta|<\mu} \|f(x-y,\xi-\eta) - f(x,\xi)\|_{L^\infty_{x,\xi}(\Omega')}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ora scegliamo $\epsilon_n/\mu_n = 1/n$. Dato che $f \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, la (4.11) dà immediatamente che $\|I^{E,x}\| \to 0$ per $n \to \infty$. Date le ipotesi di regolarità (di tipo Sobolev) su E e v, esistono delle approssimanti regolari E_n e v_n tali che

$$\|\nabla_{x,\xi}(v - v_n)\|_{L^1(\Omega_1)} \le 1/n^2, \qquad \|\nabla_\xi(E - E_n)\|_{L^1(\Omega_1)} \le 1/n.$$

Quindi possiamo scrivere

$$\|I^{E,\xi}\|_{L^1(\Omega')} \le \|I^{E-E_n,\xi}\|_{L^1(\Omega')} + \|I^{E_n,\xi}\|_{L^1(\Omega')}$$

e

$$\|I^{v}\|_{L^1(\Omega')} \le \|I^{v-v_n}\|_{L^1(\Omega')} + \|I^{v_n}\|_{L^1(\Omega')}.$$

Per le stime (4.12) e (4.13) applicate a $E-E_n$ e $v-v_n$ otteniamo $\|I^{E-E_n,\xi}\|_{L^1(\Omega')} \to 0$ e $\|I^{v-v_n}\|_{L^1(\Omega')} \to 0$. Rimangono quindi da stimare solo $\|I^{E_n,\xi}\|_{L^1(\Omega')}$ e $\|I^{v_n}\|_{L^1(\Omega')}$.

Introduciamo un esponente $1 \leq p < \infty$, e con stime simili a quelle del Lemma 4.4 otteniamo

$$\begin{aligned} &\|I^{E_n,\xi}\|_{L^1_{x,\xi}(\Omega')} \\ \leq\ &\Big(\int |\mu\nabla\rho_\mu|\Big)\|\nabla_\xi E_n\|_{L^{p'}(\Omega_1)} \sup_{|y|<\epsilon,|\eta|<\mu} \|f(x-y,\xi-\eta)-f(x,\xi)\|_{L^p_{x,\xi}(\Omega')} \end{aligned} \tag{4.14}$$

e

$$\begin{aligned} &\|I^{v_n}\|_{L^1_{x,\xi}(\Omega')} \\ \leq\ &\Big(1+\frac{\mu}{\epsilon}\Big)\Big(\int |\epsilon\nabla\rho_\epsilon|\Big)\|\nabla_{x,\xi} v_n\|_{L^{p'}(\Omega_1)} \sup_{|y|<\epsilon,|\eta|<\mu} \|f(x-y,\xi-\eta)-f(x,\xi)\|_{L^p_{x,\xi}(\Omega')}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ma dato che, essendo $p < \infty$, si ha

$$\sup_{|y|<\epsilon,|\eta|<\mu} \|f(x-y,\xi-\eta)-f(x,\xi)\|_{L^p_{x,\xi}(\Omega')} \to 0 \qquad \text{per } \epsilon,\mu \to 0,$$

possiamo scegliere ϵ_n e μ_n sufficientemente piccoli, sempre rispettando il vincolo $\epsilon_n/\mu_n = 1/n$, in modo che i membri destri di (4.14) e (4.15) siano minori di $1/n$, e ciò conclude la dimostrazione. □

4.6 Campi vettoriali conormali BV

Nel 2003, F. Colombini e N. Lerner hanno esteso i risultati sulla rinormalizzazione per l'equazione del trasporto a campi vettoriali che siano "BV in una sola direzione", in un senso che sarà chiaro tra poco. In [25] viene dimostrata l'unicità per le soluzioni continue, mentre in [26] viene sfruttata la tecnica di regolarizzazione anisotropa di Bouchut per mostrare la rinormalizzazione per campi vettoriali conormali BV. La presentazione di questi risultati seguirà l'approccio di [31], in cui viene riassunta la tecnica della dimostrazione di Colombini e Lerner.

Sia X un campo vettoriale in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, identificato con l'operatore differenziale associato, e sia $S \subset \Omega$ una ipersuperficie lipschitziana orientata da un vettore unitario ν. Nel seguito supporremo sempre valide le seguenti condizioni:

$$X \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)\,, \qquad \text{div}X \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)\,, \qquad X \text{ positivamente trasversa a } S\,, \tag{4.16}$$

dove con l'ultima condizione intendiamo che, per ogni $x_0 \in S$, esiste un intorno V_0 di x_0 in S tale che $\inf \text{ess}_{x\in V_0} X(x)\cdot\nu(x) > 0$. In questo modo sono ben definiti gli intorni superiore e inferiore S^+ e S^-.

Il primo teorema ([25]) riguarda l'unicità per soluzioni continue nel caso di campo BV.

Teorema 4.13 (Unicità per soluzioni continue). *Siano X e S come in (4.16) e supponiamo che $X \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $c \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sia $u \in C(\Omega)$ tale che*

$$Xu = cu \qquad \mathrm{spt} u \subset S^+.$$

Allora, se $c^+ \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, u si annulla in un intorno di S.

Passiamo ora alla definizione di campo vettoriale conormale BV.

Definizione 4.14 (Funzioni e campi conormali BV). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto.*

(i) *Una funzione $a \in BV(\Omega)$ appartiene a $CBV(\Omega)$ (lo spazio delle* funzioni conormali BV *in Ω) se ogni $x \in \Omega$ possiede un intorno aperto $V \subset \Omega$ tale che esistano coordinate locali di classe $C^{1,1}$ in V tali che*

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} \in \mathcal{M}(V)\,, \qquad\qquad \frac{\partial a}{\partial x_k} \in L^1(V) \qquad k \geq 2.$$

(ii) *Un campo vettoriale $X \in BV(\Omega)$ appartiene a $CBV(\Omega)$ (lo spazio dei* campi vettoriali conormali BV *in Ω) se ogni $x \in \Omega$ possiede un intorno aperto $V \subset \Omega$ tale che esistano coordinate locali di classe $C^{1,1}$ in V tali che, se $X = \sum_j a_j \partial_j$,*

$$\text{per ogni } j = 1, \dots d \qquad\qquad \frac{\partial a_j}{\partial x_1} \in \mathcal{M}(V)\,, \qquad \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \in L^1(V) \qquad k \geq 2.$$

Il teorema principale dimostrato in [26] è il seguente:

Teorema 4.15 (Colombini–Lerner). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e siano X e S come in (4.16). Supponiamo che esista un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$ tale che $\mathscr{H}^{d-1}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ e $X \in CBV_{\mathrm{loc}}(\Omega_0)$ e sia $c \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sia $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che*

$$Xu = cu \qquad \mathrm{spt} u \subset S^+.$$

Allora, se $c^+ \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, u si annulla in un intorno di S.

Riassumiamo la tecnica della dimostrazione, suddividendola in tre passi. Siano X e S come sopra, soddisfacenti le ipotesi (4.16).

Passo 1. *Sia $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che, per qualche $c \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, valga*

$$Xu \leq cu \qquad\qquad \mathrm{spt} u \subset S^+ \qquad\qquad u \geq 0.$$

Allora, se $(c + \mathrm{div} X)^+ \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, u si annulla in un intorno di S.

Passo 2. *Sia* $\Omega_0 \subset \Omega$ *un aperto tale che* $\mathscr{H}^{d-1}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ *e siano* $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *e* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *tali che*

$$Xu = f \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega_0).$$

Allora

$$Xu = f \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Osserviamo che in questi primi due passi non serve la regolarità CBV del campo, inoltre basterebbe supporre che la divergenza sia in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Passo 3. *Sia* $c \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *e supponiamo che* $X \in CBV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*. Se* $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *risolve*

$$Xu = cu \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)\,,$$

allora risolve anche

$$X(u^2) = 2cu^2 \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Quindi, il Passo 3 permette di ridurci alle soluzioni positive, per le quali si utilizza il risultato del Passo 1. Il Passo 2 permette di estendere il risultato da locale a globale e si basa su argomenti classici di teoria della misura (si confronti questo risultato con la prima parte della Proposizione 7.4).

La dimostrazione del Passo 3 si basa su una tecnica di regolarizzazione anisotropa, analoga a quella descritta nella sezione precedente. Il risultato di Colombini e Lerner include il caso "$W^{1,1}$ a tratti" trattato da P. L. Lions in [44] ed ha ispirato il lavoro di L. Ambrosio relativo al caso BV: grazie al teorema del rango uno di Alberti il comportamento locale di una qualunque funzione BV è "asintoticamente conormale", e ciò permetterà con un opportuno procedimento di localizzazione di applicare regolarizzazioni anisotrope a un qualunque campo BV.

Capitolo 5

Rinormalizzazione in BV

Questo capitolo e il successivo saranno dedicati al lavoro di L. Ambrosio [7]. Nella prima sezione di questo capitolo riportiamo la dimostrazione della proprietà di rinormalizzazione per le soluzioni L^∞ dell'equazione del trasporto con campo vettoriale BV. La prova si basa essenzialmente su una tecnica di regolarizzazione anisotropa e sul teorema del rango uno di Alberti. Nella seconda sezione presentiamo un argomento inedito di G. Alberti che permette di evitare l'utilizzo del teorema del rango uno, dando una costruzione diretta dei nuclei quasi–ottimali con cui effettuare la regolarizzazione. Nell'ultima sezione infine vengono illustrate le conseguenze della proprietà di rinormalizzazione, che portano a risultati di unicità e confronto per l'equazione del trasporto.

5.1 Rinormalizzazione dell'equazione del trasporto con campo BV

Nel caso di campi vettoriali di Sobolev (e anche nel caso richiamato nella Sezione 4.4) viene sfruttato il fatto che i rapporti incrementali convergono fortemente in L^1_{loc} alla derivata. Questo fatto permette di controllare i rapporti incrementali con la derivata, che è localmente limitata in L^1, e quindi di ottenere le stime cercate. Nel caso BV non si ha convergenza forte, ma si può dare una scrittura canonica del rapporto incrementale come somma di due addendi, uno convergente fortemente come nel caso Sobolev e uno che si stima con la parte singolare della derivata. Questa costruzione è contenuta nel seguente lemma e sarà alla base anche della prova della rinormalizzazione in SBD (sia veda la Proposizione 8.2).

Ricordiamo che, se $u \in BV(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$, per ogni $z \in \mathbb{R}^d$ e per ogni compatto $K \subset \Omega$

vale

$$\int_K |u(x+z)-u(x)|dx \leq \Big|\sum_{i=1}^{d} z_i D_i u\Big|(K_{|z|}), \tag{5.1}$$

dove $K_{|z|}$ è l'intorno aperto di K di raggio $|z|$, nell'ipotesi che $|z| < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$.

Lemma 5.1 (Rapporti incrementali di funzioni BV). *Sia $u \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ e sia $z \in \mathbb{R}^d$. Allora i rapporti incrementali*

$$\frac{u(x+\delta z)-u(x)}{\delta}$$

possono essere scritti canonicamente come $u^1_\delta(z)+u^2_\delta(z)$, dove $u^1_\delta(z)$ converge fortemente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ per $\delta \downarrow 0$ alla parte assolutamente continua della derivata direzionale, cioè a

$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) z_i\,,$$

e

$$\limsup_{\delta\downarrow 0} \int_K |u^2_\delta(z)|dx \leq |z||D^s u|(K) \tag{5.2}$$

per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^d$. Inoltre, abbiamo la stima uniforme

$$\sup_{z\in K'}\ \sup_{\delta\in(0,\epsilon)} \int_K |u^1_\delta(z)|+|u^2_\delta(z)|dx \leq \sup_{z\in K'} |z||Du|(\{x : \mathrm{dist}(x,K)\leq\epsilon\}), \tag{5.3}$$

dove K e K' sono sottoinsiemi compatti qualunque di $\mathbb{R}^d$ e $\epsilon > 0$.

Dim. A meno di una rotazione e di una dilatazione possiamo supporre $z = e_d$ e scriveremo $x = (x', x_d)$ con $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$ e $x_d \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che, se μ è una misura su $\mathbb{R}$ localmente finita a valori in $\mathbb{R}^m$, allora grazie al teorema di Fubini la funzione

$$\hat{\mu}_\delta(t) = \frac{\mu([t,t+\delta])}{\delta}$$

soddisfa

$$\int_K |\hat{\mu}_\delta|dt \leq |\mu|(K_\delta) \tag{5.4}$$

per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}$. Grazie a un argomento di densità, segue facilmente che se $\mu \ll \mathscr{L}^1$ allora $\hat{\mu}_\delta$ converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ alla densità di μ rispetto a $\mathscr{L}^1$.

Definiamo quindi

$$u^1_\delta(x', x_d) = \widehat{\frac{\partial u}{\partial x_d}(x',\cdot)\mathscr{L}^1}(x_d) = \frac{1}{\delta}\int_{x_d}^{x_d+\delta} \frac{\partial u}{\partial x_d}(x',s)ds.$$

Per quanto osservato e grazie al Teorema di Fubini, segue che u^1_δ converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ a $\partial u/\partial x_d$.

Rimane da mostrare la (5.2) (la (5.3) seguirà dalla (5.2) e dalla (5.1)). Ricordando quanto richiamato nella Sezione 2.6 sulle sezioni unidimensionali di funzioni BV, posto $u_{x'}(s) = u(x', s)$, per $\mathscr{L}^{d-1}$-quasi ogni x' valgono le tre proprietà seguenti:

(a) $u_{x'} \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)$;

(b) $u'_{x'}(s) = \partial u/\partial x_d(x', s)$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $s \in \mathbb{R}$;

(c) per ogni $\delta > 0$ vale $u_{x'}(s+\delta) - u_{x'}(s) = Du_{x'}([s, s+\delta])$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $s \in \mathbb{R}$.

Inoltre abbiamo anche che $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |D^s u_{x'}| dx' \leq |D^s u|$. Quindi, fissato $\delta > 0$, per $\mathscr{L}^{d-1}$-quasi ogni x' abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{u(x', x_d+\delta) - u(x', x_d)}{\delta} &= \frac{u_{x'}(x_d+\delta) - u_{x'}(x_d)}{\delta} = \frac{Du_{x'}([x_d, x_d+\delta])}{\delta} \\
&= \widehat{u'_{x'}\mathscr{L}^1}(x_d) + \widehat{D^s u_{x'}}(x_d) \\
&= u^1_\delta(x', x_d) + \widehat{D^s u_{x'}}(x_d) \qquad \text{per } \mathscr{L}^1\text{-quasi ogni } x_d.
\end{aligned}
$$

Grazie a (5.4) otteniamo quindi che

$$
\begin{aligned}
\int_K |u^2_\delta| dx_d dx' &\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\{x_d : (x', x_d) \in K\}} |\widehat{D^s u_{x'}}|(x_d) dx_d dx' \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} |D^s u_{x'}|(\{x_d : (x', x_d) \in K_\delta\}) dx' \leq |D^s u|(K_\delta).
\end{aligned}
$$

□

Introduciamo ora le principali ipotesi sul problema che verranno utilizzate nel resto del capitolo. Fissiamo $T \in (0, +\infty)$ e un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ e consideriamo una funzione $b(t, x) : (0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ tale che

$$
b_t(x) = b(t, x) \in BV_{\mathrm{loc},x}(\Omega) \qquad \text{per } \mathscr{L}^1\text{-quasi ogni } t \in (0, T) \tag{5.5}
$$

e

$$
\int_{I \times B_R} |b_t| dx dt + \int_I |Db_t|(B_R) dt < \infty \qquad \text{per ogni } R > 0 \text{ e } \bar{I} \subset (0, T). \tag{5.6}
$$

Supponiamo anche che per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in (0, T)$ la divergenza spaziale di b_t (indicata con $D_x \cdot b_t$ o semplicemente con $D \cdot b_t$) sia assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^d$, cioè che la distribuzione $D \cdot b_t$ si possa rappresentare con $\mathrm{div} b_t \mathscr{L}^d$.

Per discutere l'equazione del trasporto, dobbiamo dare una definizione del prodotto $b \cdot \nabla w$ quando w è solamente una funzione in $L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega)$. Definiamo la distribuzione $b \cdot \nabla w$ per mezzo dell'identità

$$\begin{aligned}\langle b\cdot\nabla w,\varphi\rangle &= \langle D_x\cdot(wb),\varphi\rangle - \langle wD_x\cdot b,\varphi\rangle\\ &= -\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d} w\nabla\varphi\cdot b\,dtdx - \int_{(0,T)\times\mathbb{R}^d} w\varphi\,\mathrm{div}b_t\,dtdx,\end{aligned}$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty((0,T)\times\Omega)$. Osserviamo che per dare senso a questa definizione è necessario supporre l'assoluta continuità della divergenza del campo rispetto alla misura di Lebesgue.

Scrivendo la decomposizione polare

$$D^s b_t = M_t|D^s b_t| \quad \text{in } \Omega \text{ per } \mathscr{L}^1\text{-quasi ogni } t\in(0,T) \tag{5.7}$$

ed applicando il teorema del rango uno di Alberti (Teorema 2.26), otteniamo dei vettori $\eta_t(x)$ e $\xi_t(x)$ appartenenti a $\mathbb{S}^{d-1}$ tali che $M_t = \eta_t\otimes\xi_t$ $|D^s b_t|$-quasi ovunque in Ω. Osservando che possiamo scrivere

$$D\cdot b_t = \mathrm{traccia}(\nabla_x b_t)\mathscr{L}^d + \langle\xi_t,\eta_t\rangle|D^s b_t|,$$

dall'ipotesi $D\cdot b_t \ll \mathscr{L}^d$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni t otteniamo che

$$\xi_t \perp \eta_t \qquad |D^s b_t|\text{-quasi ovunque in } \Omega$$

per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t\in(0,T)$. Integrando rispetto al tempo, definiamo $|Db| = \int_0^T |Db_t|dt$, in modo cioè che valga

$$\int_{(0,T)\times\Omega}\varphi(t,x)d|Db|(t,x) = \int_0^T\int_\Omega \varphi(t,x)d|Db_t|(x)dt$$

per ogni $\varphi\in C_c((0,T)\times\Omega)$. Con una costruzione analoga definiamo $|D^a b|$, assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^{d+1}$, e $|D^s b|$, singolare rispetto a $\mathscr{L}^{d+1}$.

Definizione 5.2 (Energia anisotropa ed isotropa di un nucleo). *Se M è una matrice $d\times d$ e ρ è un nucleo di convoluzione con supporto compatto definiamo l'*energia anisotropa di ρ

$$\Lambda(M,\rho) = \int_{\mathbb{R}^d}|\langle Mz,\nabla\rho(z)\rangle|dz$$

*e l'*energia isotropa di ρ

$$I(\rho) = \int_{\mathbb{R}^d}|z||\nabla\rho(z)|dz.$$

Il seguente teorema dà due stime quantitative per i commutatori introdotti da DiPerna e Lions (si veda il Lemma 4.4), nel caso in cui il campo vettoriale abbia variazione limitata rispetto alle variabili spaziali. Osserviamo che le mollificazioni vengono applicate solo alle variabili spaziali.

Teorema 5.3 (Stime dei commutatori per campi BV). *Supponiamo che valgano (5.5) e (5.6) e che $D \cdot b_t \ll \mathscr{L}^d$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in (0,T)$. Per ogni $w \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\Omega)$ ed ogni nucleo di convoluzione $\rho : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ con supporto contenuto nella palla unitaria definiamo*

$$r_\delta = (b \cdot \nabla w) * \rho_\delta - b \cdot \nabla (w * \rho_\delta).$$

Siano $Q \subset A \subset\subset (0,T)\times\Omega$, con Q compatto e A aperto, e sia $L = \|w\|_{L^\infty(A)}$. Allora

$$\limsup_{\delta\to 0} \int_Q |r_\delta| dtdx \le L \int_Q \Lambda(M_t(x),\rho) d|D^s b|(t,x) + L(d + I(\rho))|D^a b|(Q) \tag{5.8}$$

(dove M_t è definito dalla (5.7)) e

$$\limsup_{\delta\to 0} \int_Q |r_\delta| dtdx \le L I(\rho) |D^s b|(Q). \tag{5.9}$$

Dim. Poniamo $\tau = \mathrm{dist}(Q, \partial A)$ e supponiamo senza perdita di generalità che $\|w\|_{L^\infty(A)} = 1$. Sfruttando la parità del nucleo ρ, come fatto nella dimostrazione del Lemma 4.4, ricaviamo che

$$r_\delta(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(t,y)[(b_t(y) - b_t(x)) \cdot \nabla\rho_\delta(x-y)]dy - (w \mathrm{div} b_t) * \rho_\delta(x)$$

per $(t,x) \in Q$ e $\delta < \tau$. Con un cambiamento di variabili si ottiene

$$r_\delta(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(t, x-\delta z) \left[\frac{b_t(x-\delta z) - b_t(x)}{\delta} \cdot \nabla\rho_\delta(z) \right] dz - (w \mathrm{div} b_t) * \rho_\delta(t,x).$$

Cominciamo con il provare la (5.9). Spezzando il rapporto incrementale come indicato nel Lemma 5.1 otteniamo

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\delta\to 0} \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^d} w(t,x-\delta z) \left[\frac{b_t(x-\delta z) - b_t(x)}{\delta} \cdot \nabla\rho_\delta(z) \right] dz - (w \mathrm{div} b_t) * \rho_\delta \right| dtdx \\
\le\ &\limsup_{\delta\to 0} \int_Q \left| \int_{\mathbb{R}^d} w(t,x-\delta z)(b_t)^1_\delta(-z) \cdot \nabla\rho_\delta(z) dz - w(t,x)\mathrm{div} b(t,x) \right| dtdx \\
+\ &\limsup_{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\rho(z)| \int_Q |(b_t)^2_\delta(-z)| dxdtdz.
\end{aligned}$$

Mostriamo che

$$w(t, x - \delta z)(b_t)^1_\delta(-z)(x) \to w(t, x)\nabla b_t(x)(-z) \quad \text{fortemente in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^d) \tag{5.10}$$

per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in (0, T)$. Grazie al Lemma 5.1 abbiamo convergenza forte in $L^1_{\mathrm{loc},x}(\Omega)$ di $(b_t)^1_\delta(-z)$ e quindi convergenza forte in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times \mathbb{R}^d)$ sfruttando la stima (5.3). Inoltre, $w(t, x - \delta z) \to w(t, x)$ in misura in Ω, per ogni fissato $z \in \mathbb{R}^d$; grazie alla limitatezza di w, per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e ogni $R > 0$ si trova una costante $C > 0$ tale che $|w(t, x - \delta z)| \leq C$ per ogni $x \in \Omega'$ e ogni $z \in B_R$, se $\delta < 1$. Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega' \times B_R} |w(t, x - \delta z)(b_t)^1_\delta(-z)(x) - w(t, x)\nabla b_t(x)(-z)| dx dz \\
\leq \; & C \int_{\Omega' \times B_R} |(b_t)^1_\delta(-z)(x) - \nabla b_t(x)(-z)| dx dz \\
+ \; & \int_{B_R} \left(\int_{\Omega'} |\nabla b_t(x)(-z)||w(t, x - \delta z) - w(t, x)| dx \right) dz
\end{aligned}$$

e i due addendi convergono a zero per $\delta \downarrow 0$, il primo grazie alla convergenza forte di $(b_t)^1_\delta(-z)$, il secondo osservando che l'integrale interno converge a zero per ogni $z \in \mathbb{R}^d$ fissato e applicando quindi il teorema della convergenza dominata, grazie alla dominazione espressa da (5.3). Ne segue che il primo $\limsup$ è uguale a zero, dato che $\int z_i \partial\rho/\partial z_j dz = -\delta_{ij}$. Il secondo $\limsup$ invece può essere stimato con $I(\rho)|D^s b|(Q)$, grazie alle (5.2) e (5.3).

Ora mostriamo la (5.8). Senza avvantaggiarci delle cancellazioni nella variabile z stimiamo

$$\|r_\delta\|_{L^1(Q)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_Q \left| \frac{b_t(x - \delta z) - b_t(x)}{\delta} \cdot \nabla\rho(z) \right| dt dx dz + \|\mathrm{div} b_t\|_{L^1(Q_\delta)}, \tag{5.11}$$

dove Q_δ è il δ-intorno aperto di Q. Per $z \in \mathbb{R}^d$ fissato, consideriamo la funzione $v_{t,z}(x) = b_t(x) \cdot \nabla\rho(z)$, la cui derivata distribuzionale è data da

$$D_i v_{t,z} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial b_t^j}{\partial x_i} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z) \mathscr{L}^d + (M_t)_{ji} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(z) |D^s b_t|$$

per ogni $i = 1, \ldots, d$. Applicando la (5.1) a $v_{t,z}$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{\delta \to 0} \int_Q \left| \frac{b_t(x - \delta z) - b_t(x)}{\delta} \cdot \nabla \rho(z) \right| dt dx \\
\leq\ & \int_0^T \Big| \sum_{i=1}^d z_i D_i v_{t,z} \Big| (\{x : (t,x) \in Q\}) dt \\
\leq\ & \int_Q |\nabla b_t| |z| |\nabla \rho(z)| dt dx + \int_Q |\langle M_t(x)(z), \nabla \rho(z) \rangle| d|D^s b|(t,x).
\end{aligned}
$$

Quindi, usando il lemma di Fatou, la (5.11) e la disuguaglianza $|\mathrm{div} b_t| \mathscr{L}^d \leq d |D^a b_t|$, otteniamo immediatamente la (5.8). $\square$

Analogamente a quanto viene fatto in [17] e in [26], cerchiamo di ottenere dei commutatori con norma piccola ottimizzando la scelta del nucleo di convoluzione. Un passo chiave sarà il seguente problema di minimo:

$$
\inf \Big\{ \Lambda(M, \rho) \quad \text{con } \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \text{ pari}, \rho \geq 0, \int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1 \Big\}. \tag{5.12}
$$

Il prossimo lemma mostrerà che questo problema ha una semplice soluzione quando $M = \eta \otimes \xi$ con $\eta \perp \xi$.

Lemma 5.4 (Nuclei di convoluzione anisotropi). *Dati ξ, $\eta \in \mathbb{S}^{d-1}$ con $\xi \perp \eta$ e dato $\epsilon > 0$, possiamo trovare un nucleo di convoluzione pari ρ con supporto compatto tale che*

$$
\int_{\mathbb{R}^d} |\langle z, \xi \rangle| |\langle \nabla \rho(z), \eta \rangle| dz < \epsilon.
$$

In particolare $\Lambda(\eta \otimes \xi, \rho) < \epsilon$.

Dim. Se $d = 2$ possiamo supporre, a meno di una rotazione, che (ξ, η) sia la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Consideriamo il rettangolo $R_\epsilon = [-\epsilon/2, \epsilon/2] \times [-1/2, 1/2]$ e il nucleo (non regolare) $\tau_\epsilon = \chi_{R_\epsilon}/\epsilon$. Sia h un qualunque nucleo di convoluzione regolare e pari. Osservando che vale

$$
\left| \frac{\partial(\tau_\epsilon * h_\delta)}{\partial z_i} \right| \to \frac{|\nu_i|}{\epsilon} \mathscr{H}^1 \llcorner \partial R_\epsilon \qquad \text{per } \delta \downarrow 0, \quad i = 1, 2
$$

nel senso delle distribuzioni (avendo indicato con $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale entrante a R_ϵ), si ottiene immediatamente che

$$
\lim_{\delta \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} |z_1| \left| \frac{\partial(\tau_\epsilon * h_\delta)}{\partial z_2} \right| dz = \frac{2}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} |z_1| dz_1 = \frac{\epsilon}{2}.
$$

Allora è sufficiente scegliere come ρ la funzione $\tau_\epsilon * h_\delta$ per $\delta = \delta(\epsilon)$ sufficientemente grande.

Se $d > 2$ è sufficiente moltiplicare il nucleo 2-dimensionale appena costruito per un fissato nucleo dipendente dalle $(d-2)$ variabili ortogonali a ξ e η e a supporto compatto. $\square$

Osservazione 5.5. La proprietà di rango uno di M_t viene in effetti utilizzata solo nel Lemma 5.4, in cui viene esplicitamente costruito il nucleo quasi–ottimale per il problema di minimo (5.12), e nel seguito non sarà più sfruttata. In realtà l'ipotesi essenziale è sulla *traccia* della matrice M_t: G. Alberti ha recentemente mostrato che l'estremo inferiore del problema (5.12) coincide con $|\mathrm{traccia}(M)|$, senza ulteriori ipotesi sulla matrice M. La costruzione di Alberti, che permette quindi di evitare l'utilizzo del teorema del rango uno, verrà descritta nella Sezione 5.2.

Ricordiamo che, nelle ipotesi in cui ci siamo messi, un funzione $w \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^m)$ che soddisfi

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + b \cdot \nabla w_i = c_i \mathscr{L}^{d+1} \qquad \text{in } \mathcal{D}'((0,T) \times \Omega) \tag{5.13}$$

per ogni $i = 1, \dots, m$, per qualche $c = (c_1, \dots, c_m) \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^m)$, viene detta *soluzione rinormalizzata* se vale

$$\frac{\partial \beta(w)}{\partial t} + b \cdot \nabla \beta(w) = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(w) \mathscr{L}^{d+1} \qquad \text{in } \mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$$

per ogni funzione $\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Nel teorema seguente verrà mostrato che, se il campo vettoriale è a variazione limitata rispetto alle variabili spaziali ed ha divergenza assolutamente continua, allora ogni soluzione distribuzionale L^∞_{loc} è una soluzione rinormalizzata.

Teorema 5.6 (Rinormalizzazione in BV). *Supponiamo che valgano (5.5) e (5.6) e che $D \cdot b_t \ll \mathscr{L}^d$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in (0,T)$. Sia $w \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^m)$ che soddisfi (5.13) per una certa $c \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^m)$. Allora w è una soluzione rinormalizzata.*

Dim. Dato che la tesi ha natura locale, fissiamo un aperto $A \subset\subset (0,T) \times \Omega$ e poniamo $\delta_0 = \mathrm{dist}(A, \partial((0,T) \times \Omega))$. Poniamo inoltre $L = \|w\|_{L^\infty(A_{\delta_0/2})}$.

Passo 1. Mostriamo innanzitutto che $\partial\beta(w)/\partial t + b \cdot \nabla\beta(w)$ è una misura con segno con variazione totale finita in A. Fissiamo un nucleo di convoluzione ρ pari, regolare e con supporto contenuto nella palla unitaria e definiamo i commutatori $r_{\delta,i}$ come nel Teorema 5.3, per ogni componente di w. Se $\delta < \delta_0$, la funzione

$r_\delta = (r_{\delta,1}, \ldots, r_{\delta,m}) : A \to \mathbb{R}^m$ è ben definita. Osservando che $w * \rho_\delta(t,x)$ è regolare in A rispetto alle variabili spaziali, per $\delta < \delta_0$, e che, grazie al fatto che w risolve l'equazione del trasporto, vale

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (w_i * \rho_\delta)}{\partial t} &= \frac{\partial w_i}{\partial t} * \rho_\delta = -(b \cdot \nabla w_i) * \rho_\delta + c_i * \rho_\delta \mathscr{L}^{d+1} \\
&= -r_{\delta,i}\mathscr{L}^{d+1} - b \cdot \nabla (w_i * \rho_\delta) + c_i * \rho_\delta \mathscr{L}^{d+1} \ll \mathscr{L}^{d+1} \quad \text{in } \mathcal{D}'(A)
\end{aligned}$$

per ogni $i = 1, \ldots, m$, otteniamo che $w * \rho_\delta \in W^{1,1}(A;\mathbb{R}^m)$. Quindi possiamo applicare la chain–rule standard, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \beta(w * \rho_\delta)}{\partial t} + b \cdot \nabla \beta (w * \rho_\delta) \\
= &\sum_{i=1}^m \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(w * \rho_\delta)\left[\frac{\partial (w_i * \rho_\delta)}{\partial t} + b \cdot \nabla (w_i * \rho_\delta)\right] \\
= &\sum_{i=1}^m \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(w * \rho_\delta)\left[\frac{\partial w_i}{\partial t} * \rho_\delta + (b \cdot \nabla w_i) * \rho_\delta - r_{\delta,i}\mathscr{L}^{d+1}\right] \\
= &\sum_{i=1}^m \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(w * \rho_\delta)\big[c_i * \rho_\delta \mathscr{L}^{d+1} - r_{\delta,i}\mathscr{L}^{d+1}\big].
\end{aligned}$$

Dato che $\nabla \beta(w * \rho_\delta)$ è uniformemente limitato in $L^\infty(A)$ e $|r_\delta|$ è uniformemente limitato in $L^1(A)$ per $\delta \downarrow 0$ (grazie alle stime mostrate nel Teorema 5.3), passando al limite per $\delta \downarrow 0$ otteniamo che $\partial \beta(w)/\partial t + b \cdot \nabla \beta(w)$ è una misura con segno con variazione totale finita in A.

Passo 2. Mostriamo ora che, in A, la misura

$$\sigma = \frac{\partial \beta(w)}{\partial t} + b \cdot \nabla \beta(w) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(w) c_i \mathscr{L}^{d+1}$$

è singolare rispetto a $\mathscr{L}^{d+1}$. Osserviamo innanzitutto che le funzioni $\partial \beta / \partial y_i (w * \rho_\delta)(c_i * \rho_\delta)$ convergono in $L^1(A)$ a $\partial \beta / \partial y_i (w) c_i$. Quindi, fissati un aperto $A' \subset A$ e una funzione $\varphi \in C_c^\infty(A')$ con $|\varphi| \leq 1$, applicando la (5.9) con $Q = \mathrm{spt}\varphi$ otteniamo

$$\begin{aligned}
|\langle \sigma, \varphi \rangle| &= \left| \lim_{\delta \downarrow 0} \langle \frac{\partial \beta(w * \rho_\delta)}{\partial t} + b \cdot \nabla \beta(w * \rho_\delta) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(w * \rho_\delta) c_i * \rho_\delta \mathscr{L}^{d+1}, \varphi \rangle \right| \\
&\leq L \sup_{B_L} |\nabla \beta| \limsup_{\delta \downarrow 0} \int_Q |r_\delta| dt dx \leq L \sup_{B_L} |\nabla \beta| I(\rho) |D^s b|(A').
\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di φ otteniamo che $|\sigma|(A') \leq L \sup_{B_L} |\nabla \beta| I(\rho) |D^s b|(A')$ per ogni aperto $A' \subset A$, e quindi

$$|\sigma| \leq L \sup_{B_L} |\nabla \beta| I(\rho) |D^s b|$$

come misure in A. Questo mostra che σ è singolare rispetto a $\mathscr{L}^{d+1}$.
PASSO 3. Ora mostriamo che la misura σ definita nel passo precedente si annulla su A. Come prima, fissiamo un aperto $A' \subset A$ e una funzione $\varphi \in C_c^\infty(A')$ con $|\varphi| \leq 1$. Ora applichiamo la (5.8) con $Q = \mathrm{spt}\varphi$ e, analogamente al passo precedente, otteniamo

$$|\langle \sigma, \varphi \rangle| \leq L \sup_{B_L} |\nabla \beta| \int_A \Lambda(M_t, \rho) d|D^s b| + L \sup_{B_L} |\nabla \beta| (d + I(\rho)) |D^a b|(A).$$

Per l'arbitrarietà di φ, abbiamo la disuguaglianza tra misure in A

$$|\sigma| \leq L \sup_{B_L} |\nabla \beta| \Lambda(M_t, \rho) |D^s b| + L \sup_{B_L} |\nabla \beta| (d + I(\rho)) |D^a b|(A)$$

e dato che sappiamo già che $\sigma \perp \mathscr{L}^{d+1}$ e $|D^a b| \ll \mathscr{L}^{d+1}$ otteniamo

$$|\sigma| \leq L' \Lambda(M_t, \rho) |D^s b|$$

in A, avendo posto $L' = L \sup_{B_L} |\nabla \beta|$. Osservando che σ non dipende dal nucleo ρ scelto, possiamo minimizzare il secondo membro al variare di ρ. Sia g la derivata di Radon–Nikodým di $|\sigma|$ rispetto a $|D^s b|$. La disuguaglianza tra misure appena mostrata dà $g \leq L' \Lambda(M_t, \rho)$ per $|D^s b|$-quasi ogni $(t, x) \in A$, per ogni nucleo di convoluzione ρ. Sia ora $D \subset C_c^\infty(B_1)$ numerabile e denso, rispetto alla norma di $W^{1,1}(B_1)$, in

$$R = \left\{ \rho \in W^{1,1}(B_1) \ \ : \ \ \rho \geq 0\,, \int_{B_1} \rho = 1 \right\}.$$

Dato che D è numerabile, segue che $g \leq L' \inf_{\rho \in D} \Lambda(M_t(x), \rho)$ per $|D^s b|$-quasi ogni $(t, x) \in A$, e dalla densità otteniamo che $g \leq L' \inf_{\rho \in R} \Lambda(M_t(x), \rho)$ $|D^s b|$-quasi ovunque in A. Quindi, ricordando che $M_t(x)$ ha rango uno $|D^s b|$-quasi ovunque in A, grazie al Lemma 5.4 otteniamo che $g = 0$ $|D^s b|$-quasi ovunque in A. Quindi $\sigma = 0$ in A. □

Se non consideriamo la variabile temporale, il risultato è il seguente:

Corollario 5.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e siano $B \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ e $w \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Supponiamo che*

$$B \cdot \nabla w_i = c_i \mathscr{L}^d \ \ \textit{per } i = 1, \ldots, m \qquad e \qquad D \cdot B \ll \mathscr{L}^d.$$

Allora $B \cdot \nabla \beta(w) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(w) c_i \mathscr{L}^d$ per ogni funzione $\beta : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Osservazione 5.8. Il Teorema 5.6 dà un risultato di rinormalizzazione per un campo della forma

$$B(t,x) = (1, b(t,x)) : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$$

dove la dipendenza nelle variabili (t,x) è localmente del tipo

$$\begin{pmatrix} \text{costante} & \text{costante} \\ \text{misurabile} & BV \end{pmatrix}.$$

Come nel caso della Sezione 4.5, si è indebolita l'ipotesi sulla dipendenza regolare del campo da certe variabili "spezzando" il campo stesso in diverse componenti. Si può quindi congetturare che proprietà di rinormalizzazione valgano anche per campi vettoriali della forma

$$B(x,y) = (b_1(x,y), b_2(x,y)) \,, \ \text{con} \ \ b_1 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^m \ \ \text{e} \ \ b_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^d,$$

se $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$, dove la dipendenza dai diversi gruppi di variabili è del tipo

$$\begin{pmatrix} W^{1,1} & \text{misurabile} \\ \text{misurabile} & BV \end{pmatrix}.$$

A questo proposito si vedano la Sezione 9.3 e i recenti lavori [42] e [43].

5.2 L'argomento di Alberti

In questa sezione, come anticipato nell'Osservazione 5.5, descriviamo (apportando qualche leggera modifica) la costruzione di Alberti* dei nuclei quasi–ottimali per il problema di minimo (5.12). Questa argomentazione permette di evitare l'utilizzo del teorema del rango uno (che è un risultato altamente non banale di teoria della misura) ed estende il risultato dimostrato nel Lemma 5.4, dando l'esatto valore dell'estremo inferiore in (5.12), per ogni matrice M.

Sia M una matrice $d \times d$. Poniamo

$$\Lambda(M) = \inf_\rho \Lambda(M,\rho) = \inf_\rho \int_{\mathbb{R}^d} |Mz \cdot \nabla\rho(z)| dz,$$

dove l'estremo inferiore è fatto sulle funzioni $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, pari, positive e tali che $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$. Allora vale il

*Desidero ringraziare Giovanni Alberti per avermi permesso di inserire la sua dimostrazione, attualmente non pubblicata, in questa tesi.

Teorema 5.9. *Per ogni matrice M vale*

$$\Lambda(M) = |\mathrm{traccia}(M)|.$$

DIM. Innanzitutto, la disuguaglianza $\Lambda(M) \geq |\mathrm{traccia}(M)|$ è chiara. Infatti, per ogni ρ ammissibile si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |Mz \cdot \nabla\rho(z)| dz &\geq \Big| \int_{\mathbb{R}^d} Mz \cdot \nabla\rho(z) dz \Big| \\ &= \Big| - \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(Mz)\rho(z) dz \Big| \\ &= \Big| - \mathrm{traccia}(M) \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) dz \Big| = |\mathrm{traccia}(M)|.\end{aligned}$$

Passiamo alla disuguaglianza opposta. Dato che

$$Mz \cdot \nabla\rho(z) = \mathrm{div}(Mz\,\rho(z)) - \mathrm{traccia}(M)\,\rho(z)$$

e $\rho \geq 0$, otteniamo subito

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |Mz \cdot \nabla\rho(z)| dz &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{div}(Mz\,\rho(z))| + |\mathrm{traccia}(M)|\,\rho(z)\,dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{div}(Mz\,\rho(z))| dz + |\mathrm{traccia}(M)|.\end{aligned}$$

È allora sufficiente dimostrare che

$$\inf_\rho \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{div}(Mz\,\rho(z))| dz = 0, \tag{5.14}$$

dove l'estremo inferiore è fatto sulle stesse ρ ammissibili di prima. Per prima cosa, facciamo vedere che

$$\inf_\mu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{div}(Mz\,\mu)| = 0, \tag{5.15}$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le μ misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$. L'integrale indica in realtà la variazione totale della distribuzione $\mathrm{div}(Mz\,\mu)$, intesa come

$$\sup \Big\{ \langle \mathrm{div}(Mz\,\mu), \varphi \rangle \quad : \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad , \quad |\varphi| \leq 1 \Big\}.$$

In particolare, la variazione totale risulta finita se e solo se $\mathrm{div}(Mz\,\mu)$ è una misura finita, e in tal caso coincide proprio con $\|\mathrm{div}(Mz\,\mu)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$.

Chiaramente possiamo supporre che M non sia la matrice nulla. Consideriamo allora $\mu = \sigma \mathscr{H}^1 \llcorner \Gamma$, dove Γ è il supporto di una curva integrale non costante

$\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ del campo Mz, cioè γ è tale che $\dot\gamma(t) = M\gamma(t)$ per ogni $t \in [0,T]$. La densità σ è della forma

$$\sigma(z) = \#\{\gamma^{-1}(z)\}\frac{\alpha}{|Mz|},$$

dove α è la costante di normalizzazione, che si calcola esplicitamente:

$$\alpha^{-1} = \int_\Gamma \frac{\#\{\gamma^{-1}(z)\}}{|Mz|} d\mathscr{H}^1(z) = \int_0^T \frac{1}{|M\gamma(t)|}|\dot\gamma(t)|dt = T.$$

Dato che

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{div}(Mz\,\mu), \varphi\rangle &= -\langle Mz\,\mu, \nabla\varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^d} Mz\cdot\nabla\varphi(z)d\mu(z) \\
&= -\int_\Gamma Mz\cdot\nabla\varphi(z)\frac{\#\{\gamma^{-1}(z)\}}{T|Mz|}d\mathscr{H}^1(z) \\
&= -\frac{1}{T}\int_0^T \dot\gamma(t)\cdot\nabla\varphi(\gamma(t))dt \\
&= -\frac{1}{T}\big[\varphi(\gamma(T)) - \varphi(\gamma(0))\big]
\end{aligned}$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, otteniamo che

$$\operatorname{div}(Mz\,\mu) = -\frac{1}{T}\big[\delta_{\gamma(T)} - \delta_{\gamma(0)}\big] \qquad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Quindi abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\operatorname{div}(Mz\,\mu)| \le \frac{2}{T}$$

per una qualunque misura μ di questa forma. Ne segue subito (5.15). Infatti, presa una qualunque curva integrale massimale $\gamma : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^d$, è sufficiente considerare la sua restrizione a $[0,T]$ con T arbitrariamente grande.

Mostriamo ora che vale anche (5.14). Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ consideriamo la soluzione massimale $\gamma_x : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^d$ del problema

$$\begin{cases} \dot\gamma_x(t) = M\gamma_x(t) \\ \gamma_x(0) = x. \end{cases}$$

Essa esiste per ogni dato iniziale $x \in \mathbb{R}^d$ e se ne può dare una scrittura esplicita tramite un'esponenziale di una matrice: $\gamma_x(t) = e^{tM}x$. Osserviamo che l'insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ degli $x \in \mathbb{R}^d$ per cui γ_x non è costante è un aperto, simmetrico rispetto all'origine. Fissiamo allora una funzione $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ pari, positiva, con $\int_{\mathbb{R}^d} \theta = 1$ e con spt $\theta \subset \mathcal{A}$. Quindi definiamo

$$\nu^T = \int_{\mathbb{R}^d} \mu_x^T \theta(x) dx,$$

dove μ_x^T è definita come prima, a partire dalla restrizione di γ_x all'intervallo $[0, T]$.

Innanzitutto, verifichiamo che ν^T è in realtà una funzione regolare. Se $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, dalla definizione di μ_x^T segue facilmente che

$$\langle \mu_x^T, \varphi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\gamma_x(t)) dt.$$

Quindi possiamo ricavare un'espressione esplicita per ν^T:

$$\begin{aligned}
\langle \nu^T, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mu_x^T, \varphi \rangle \theta(x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(e^{tM}x) \theta(x) dx dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \theta(e^{-tM}y) \det(e^{-tM}) dy dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^T \theta(e^{-tM}y) \det(e^{-tM}) dt \right) \varphi(y) dy.
\end{aligned}$$

A questo punto, è chiaro che ν^T è una funzione regolare, che soddisfa tutti i vincoli del problema (5.14). Inoltre si ha

$$\mathrm{div}_z(Mz\, \nu^T(z)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{div}(Mz\, \mu_x^T) \theta(x) dx,$$

dove la divergenza nell'integrando è nel senso delle distribuzioni, a x fissato. Otteniamo dunque che

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{div}_z(Mz\, \nu^T(z))| dz \leq \frac{2}{T}.$$

Data l'arbitrarietà di T segue (5.14). $\square$

5.3 Unicità e confronto per l'equazione del trasporto

In questa sezione torniamo al lavoro di Ambrosio [7], mostrando come la proprietà di rinormalizzazione implichi unicità e risultati di confronto per le soluzioni dell'equazione del trasporto. Supponiamo che il campo vettoriale $b(t, x) : (0, T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

soddisfi la condizione (5.5) con $\Omega = \mathbb{R}^d$ e che valga

$$\int_{(0,T)\times B_R} |b_t| dt dx + \int_I |Db_t|(B_R) dt < +\infty \qquad \text{per ogni } R > 0 \text{ e } \bar{I} \subset (0,T). \tag{5.16}$$

Supponiamo inoltre che per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in (0,T)$ la distribuzione $D \cdot b_t$ sia rappresentabile come $\mathrm{div} b_t \mathscr{L}^d$, con

$$\int_0^T \|\mathrm{div} b_t\|_{L^\infty(B_R)} dt < +\infty \qquad \text{per ogni } R > 0. \tag{5.17}$$

Consideriamo $w : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tale che $w \in L^\infty((0,T) \times B_R)$ per ogni $R > 0$ e poniamo $w_t(x) = w(t,x)$. Scegliendo $c = w_t e_t$, con $e_t(x) = e(t,x)$, l'equazione studiata nella Sezione 5.1 diventa

$$\frac{\partial w_t}{\partial t} + b_t \cdot \nabla w_t = e_t w_t \qquad \text{in } (0,T) \times \mathbb{R}^d. \tag{5.18}$$

Questa equazione è equivalente a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} w_t \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} (e_t + \mathrm{div} b_t) w_t \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_t b_t \cdot \nabla \varphi dx \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

intesa nel senso delle distribuzioni in $(0,T)$. Quindi, se

$$\int_0^T \|e_t + \mathrm{div} b_t\|_{L^1(B_R)} \|w_t\|_{L^\infty(B_R)} dt < +\infty \qquad \text{per ogni } R > 0,$$

le mappe $t \mapsto \int w_t \varphi dx$ sono in $W^{1,1}(0,T)$. Eventualmente modificando w_t in un insieme $\mathscr{L}^1$-trascurabile di tempi, possiamo ottenere che $t \mapsto w_t$ è continuo rispetto alla topologia $L^\infty(B_R)$-debole* per ogni $R > 0$. Inoltre, esistono e sono uniche due funzioni w_0 e $w_T \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ tali che

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} w_t \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} w_0 \varphi dx \quad \text{ e } \quad \lim_{t \uparrow T} \int_{\mathbb{R}^d} w_t \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} w_T \varphi dx$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Infine, osserviamo che è possibile estendere l'equazione anche per tempi negativi. Poniamo

$$b_t(x) = 0, \quad e_t(x) = 0, \quad w_t(x) = w_0(x) \qquad \text{per } t < 0,$$

in modo che $D \cdot b_t \ll \mathscr{L}^d$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in (-\infty, T)$ e

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} w_t \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} (e_t + \mathrm{div} b_t) w_t \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^d} w_t b_t \cdot \nabla \varphi dx \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

nel senso delle distribuzioni in $(-\infty, T)$. Questo significa che vale

$$\frac{\partial w_t}{\partial t} + b_t \cdot \nabla w_t = e_t w_t \qquad \text{in } \mathcal{D}'((-\infty,T) \times \mathbb{R}^d). \tag{5.19}$$

Teorema 5.10 (Unicità e confronto). *Siano w_t^1 e w_t^2 soluzioni dell'equazione del trasporto (5.18) in $(0,T)\times\mathbb{R}^d$, con $\int_0^T \|e_t\|_{L^\infty(B_R)}dt < +\infty$ per ogni $R>0$. Supponiamo che b soddisfi (5.5) con $\Omega=\mathbb{R}^d$, (5.16) e (5.17), e che esistano delle costanti $C\geq 0$ e $R>0$ tali che*

$$\|w_t^i\|_\infty \leq C, \qquad w_t^i = 0 \quad \mathscr{L}^d\text{-quasi ovunque in } \mathbb{R}^d\setminus B_R \tag{5.20}$$

per ogni $t\in(0,T)$. Allora $w_0^1\leq w_0^2$ implica $w_t^1\leq w_t^2$ per ogni $t\in[0,T]$.

DIM. Estendiamo b_t, e_t, w_t^1 e w_t^2 per tempi negativi, come fatto prima, in modo da ottenere (5.19) con $w_t=w_t^i$. Consideriamo $\beta(t)=\sqrt{1+(t^+)^2}-1\in C^1(\mathbb{R})$. Applicando il Teorema 5.6 con $w_t=w_t^1-w_t^2$ otteniamo

$$\frac{\partial\beta(w_t)}{\partial t}+b_t\cdot\nabla\beta(w_t)=e_t\beta'(w_t)w_t\mathscr{L}^{d+1} \qquad \text{in } (-\infty,T)\times\mathbb{R}^d.$$

Osservando che $0\leq s\beta'(s)\leq 2\beta(s)$ e utilizzando l'ipotesi (5.20), otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\beta(w_t)dx &= \int_{\mathbb{R}^d}e_t\beta'(w_t)w_tdx+\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}b_t\beta(w_t)dx\\ &\leq \left(2\|e_t\|_{L^\infty(B_R)}+\|\mathrm{div}b_t\|_{L^\infty(B_R)}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\beta(w_t)dx\end{aligned}$$

nel senso delle distribuzioni in $(-\infty,T)$. Sfruttando l'estensione dell'equazione a tempi negativi abbiamo $\beta(w_t)=0$ per $t<0$. Grazie al lemma di Gronwall otteniamo quindi $\beta(w_t)=0$ per ogni $t\in(-\infty,T]$, da cui la tesi. $\square$

Osserviamo che, se $e_t=-\mathrm{div}b_t$, come accadrà nei casi studiati nel prossimo capitolo, potremo usare l'identità

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\beta(w_t)dx=\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}b_t(\beta(w_t)-\beta'(w_t)w_t)dx$$

e il fatto che $-\beta(t)\leq\beta(t)-t\beta'(t)\leq 0$ (grazie alla convessità della funzione β usata nella dimostrazione del Teorema 5.10) per sostituire le ipotesi su e_t e $\mathrm{div}b_t$ con

$$\int_0^T \|(\mathrm{div}b_t)^-\|_{L^\infty(B_R)}dt<+\infty \qquad \text{per ogni } R>0. \tag{5.21}$$

Capitolo 6

Flussi di campi vettoriali

In questo capitolo continuiamo l'analisi di [7], mostrando il passaggio dal versante euleriano del problema a quello lagrangiano. Il principale strumento utilizzato è la teoria delle misura di Young, che permette di interpretare le soluzioni dell'equazione ordinaria come una famiglia di misure γ_x su $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ parametrizzata dalla condizione iniziale $x \in \mathbb{R}^d$. L'unicità della soluzione dell'equazione ordinaria con dato iniziale $\bar{x}$ sarà allora riletta associando a $\bar{x}$ una delta di Dirac sullo spazio delle traiettorie in $\mathbb{R}^d$. Nell'ultima sezione infine confrontiamo questo approccio con quello di DiPerna e Lions.

6.1 Misure di probabilità su $C([0,T];\mathbb{R}^m)$

Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme $\mathscr{L}^d$-misurabile e sia X uno spazio metrico completo e separabile. Indichiamo con $\mathcal{M}_1(X)$ lo spazio delle misure μ di Borel positive su X tali che $\mu(X) \leq 1$ e con $\mathcal{P}(X)$ il sottoinsieme costituito dalle misure di probabilità. Come ricordato nella Sezione 1.6, una mappa a valori misure $\eta_x : A \to \mathcal{M}_1(X)$ è detta $\mathscr{L}^d$-misurabile se l'applicazione $x \mapsto \eta_x(C)$ è $\mathscr{L}^d$-misurabile per ogni insieme boreliano $C \subset X$. Se X è localmente compatto questa definizione coincide con quella standard, nel caso in cui su $\mathcal{M}_1(X)$ si consideri la σ-algebra dei boreliani indotta dalla topologia debole* su $\mathcal{M}_1(X)$, visto come la palla unitaria di $(C_c(X))^*$.

Il prossimo teorema ci fornisce una semplice condizione necessaria e sufficiente affinché una famiglia di misure di probabilità γ_x su $C([0,T];\mathbb{R}^m)$ sia composta di delta di Dirac. Osserviamo preliminarmente che $\gamma \in \mathcal{P}(C([0,T];\mathbb{R}^m))$ è una delta di Dirac se e solo se η_t è una delta di Dirac per ogni $t \in [0,T]$, dove η_t è l'immagine di γ secondo la mappa $\psi \mapsto \psi(t)$. Inoltre, data la continuità delle mappe ψ considerate, è sufficiente controllare questa condizione per un sottoinsieme denso di tempi t.

Teorema 6.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme $\mathscr{L}^d$-misurabile, sia $\gamma_x : A \to \mathcal{P}(C([0,T];\mathbb{R}^m))$ una famiglia $\mathscr{L}^d$-misurabile e, per ogni $t \in [0,T]$, definiamo $\eta_{t,x}$ come il push–forward di γ_x tramite la mappa $\psi \mapsto \psi(t)$. Supponiamo che*

$$\bigcup_{x \in A} \mathrm{spt}\eta_{t,x} \subset\subset \mathbb{R}^m$$

e che

$$\gamma_x(\{\psi : \psi(t) \in K\})\gamma_x(\{\psi : \psi(t) \in K'\}) = 0 \quad \text{per } \mathscr{L}^d\text{-quasi ogni } x \in A \tag{6.1}$$

per ogni coppia di boreliani disgiunti K e K' e per ogni $t \in [0,T]$. Allora γ_x è una delta di Dirac per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$.

DIM. Come osservato prima dell'enunciato del teorema, è sufficiente verificare che per ogni $t \in [0,T]$ la misura $\eta_{t,x}$ è una delta di Dirac per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$. Fissiamo $t \in [0,T]$ e supponiamo, senza perdita di generalità, che i supporti di tutte le misure $\eta_{t,x}$ siano contenuti nel cubo unitario chiuso Q. Consideriamo la decomposizione diadica canonica di Q in 2^{mh} cubi Q_i^h di lato 2^{-h}.

Dividiamo Q in due parti, Q' e Q''. Applicando la (6.1) possiamo trovare dei boreliani disgiunti A' e A'', la cui unione copre $\mathscr{L}^d$-quasi tutto A, tali che $\psi(t) \in Q'$ per γ_x-quasi ogni ψ per ogni $x \in A'$ e $\psi(t) \in Q''$ per γ_x-quasi ogni ψ per ogni $x \in A''$. Ora fissiamo $h \in \mathbb{N}$ e ripetiamo questo argomento un numero finito di volte, ottenendo degli insiemi boreliani A_i^h, a due a due disgiunti, la cui unione copre $\mathscr{L}^d$-quasi tutto A e tali che $\psi(t) \in Q_i^h$ per γ_x-quasi ogni ψ per ogni $x \in A_i^h$.

Ora fissiamo i e un punto $\bar{x}$ di densità 1 per A_i^h che sia anche un punto di Lebesgue per $y \mapsto \eta_{t,y}(\mathbb{R}^m \setminus Q_i^h)$. Dato che questa mappa si annulla su A_i^h, otteniamo che $\eta_{t,\bar{x}}(\mathbb{R}^m \setminus Q_i^h) = 0$, cioè $\mathrm{spt}\eta_{t,\bar{x}} \subset Q_i^h$. Osservando che le condizioni richieste su $\bar{x}$ sono generiche, deduciamo che, per ogni h, il diametro del supporto di $\eta_{t,x}$ è minore di $\sqrt{m}2^{-h}$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$. La tesi segue allora mandando h all'infinito.

$\square$

Ora fissiamo un campo vettoriale limitato $b : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ e definiamo lo spazio $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ delle mappe continue su $[0,T]$ a valori in $\mathbb{R}^d$ e il sottospazio $\mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d)$ costituito dalla soluzioni dell'equazione ordinaria $\dot{\psi}(t) = b(t, \psi(t))$ uscenti da x.

Definizione 6.2 (Spazi di mappe continue). *Poniamo $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = C([0,T];\mathbb{R}^d)$, con la norma del sup. Dato $x \in \mathbb{R}^d$, denotiamo con $\mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d)$ il sottospazio*

$$\mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d) = \left\{ \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \ : \ \psi(t) = x + \int_0^t b(\tau, \psi(\tau)) d\tau \ \ \text{per ogni } t \in [0,T] \right\}.$$

Osserviamo che $\mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d)$ è sensibile a modifiche del campo b in insiemi trascurabili: quindi, a questo livello, dobbiamo supporre che b sia una funzione definita ovunque in $(0,T)\times\mathbb{R}^d$.

Ora mostriamo che una famiglia γ_x di misure di probabilità su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ concentrata su $\mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d)$ induce una soluzione dell'equazione del trasporto. Sia $A\subset\mathbb{R}^d$ un insieme $\mathscr{L}^d$-misurabile e sia $\gamma_x : A\to\mathcal{M}_1(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ una mappa $\mathscr{L}^d$-misurabile. Le misure

$$\mu_t^{\gamma_x}(\varphi)=\int_A\int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}\varphi(\psi(t))d\gamma_x(\psi)dx \qquad \text{per } \varphi\in C_c(\mathbb{R}^d) \text{ e per ogni } t\in[0,T] \tag{6.2}$$

sono ben definite su $\mathbb{R}^d$, nell'ipotesi che $\int_A\gamma_x(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))dx<+\infty$. Osserviamo che questa costruzione ricorda quella effettuata nell'Osservazione 3.4 tramite la teoria delle caratteristiche.

Teorema 6.3. *Supponiamo che b sia localmente limitato in $(0,T)\times\mathbb{R}^d$ e che $\gamma_x(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)\setminus\mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d))=0$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x\in A$. Allora le misure $\mu_t=\mu_t^{\gamma_x}$ definite sopra risolvono l'equazione di continuità*

$$\frac{\partial\mu_t}{\partial t}+D_x\cdot(b\mu_t)=0 \qquad \text{in } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d)$$

e $\mu_0=\gamma_x(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))\mathscr{L}^d\llcorner A$. In particolare, se $D\cdot b_t\ll\mathscr{L}^d$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t\in[0,T]$ e $\mu_t=w_t\mathscr{L}^d$ con $w_t(x)\in L^\infty_{\rm loc}((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, abbiamo

$$\frac{\partial w_t}{\partial t}+b_t\cdot\nabla w_t=-w_t\mathrm{div}b_t \qquad \text{in } \mathcal{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d). \tag{6.3}$$

DIM. Sia λ la misura finita su $A\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ la cui disintegrazione rispetto alla variabile x (si veda la Sezione 1.6) sia γ_x, cioè supponiamo che valga

$$\int_{A\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}g(x,\psi)d\lambda(x,\psi)=\int_A\int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}g(x,\psi)d\gamma_x(\psi)dx$$

per ogni funzione g boreliana e limitata. Allora sappiamo che per λ-quasi ogni (x,ψ) l'identità $\dot\psi(t)=b(t,\psi(t))$ vale per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t\in(0,T)$. Per il teorema di Fubini abbiamo allora

$$\dot\psi(t)=b(t,\psi(t)) \qquad \text{per } \lambda\text{-quasi ogni } (x,\psi)\in A\times\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t\in(0,T)$. Quindi per ogni $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mu_t(\varphi) &= \frac{d}{dt}\int_A\int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}\varphi(\psi(t))d\lambda(x,\psi)=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)}\nabla\varphi(\psi(t))\cdot b_t(\psi(t))d\lambda(x,\psi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}b_t\cdot\nabla\varphi d\mu_t \qquad \text{in } \mathcal{D}'((0,T)),\end{aligned}$$

cioè vale l'equazione di continuità. □

Osservazione 6.4 (Principio di sovrapposizione). In opportune ipotesi si può invertire il teorema precedente, cioè si possono caratterizzare le soluzioni dell'equazione di continuità come sovrapposizione di soluzioni caratteristiche. Infatti vale il fatto seguente (si veda il Capitolo 9 di [13]):
Sia μ_t una famiglia di misure positive che risolve l'equazione di continuità e supponiamo che $\int_0^T \|b_t\|_{L^1(\mathbb{R}^d,\mu_t)} dt < +\infty$. Allora μ_t è una soluzione di sovrapposizione, cioè esiste una mappa $\gamma_x : A \to \mathcal{M}_1(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ $\mathscr{L}^d$-misurabile tale che $\mu_t = \mu_t^{\gamma_x}$ per ogni $t \in [0,T]$.

Il prossimo teorema dà una condizione sufficiente affinché le misure γ_x, concentrate su $\mathscr{S}^b_x(\mathbb{R}^d) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, siano in realtà delle delta di Dirac. Nella dimostrazione verrà utilizzato il principio di confronto del Teorema 5.10 e il fatto che l'ortogonalità di misure (o di funzioni) viene preservata dal flusso.

Teorema 6.5. *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme $\mathscr{L}^d$-misurabile e sia $\gamma_x : A \to \mathcal{P}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ una famiglia $\mathscr{L}^d$-misurabile di misure di probabilità tale che*

(i) *$\gamma_x(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathscr{S}^b_x(\mathbb{R}^d)) = 0$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$;*

(ii) *le misure $\mu_t^{\gamma_x}$ definite in (6.2) sono assolutamente continue rispetto a $\mathscr{L}^d$ e le loro densità $w_t(y)$ sono limitate da una costante indipendente da $y \in \mathbb{R}^d$ e da $t \in (0,T)$;*

(iii) *il campo vettoriale b soddisfa (5.5) con $\Omega = \mathbb{R}^d$, (5.16) e (5.21).*

Allora γ_x è una delta di Dirac per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$.

DIM. Fissiamo $t \in [0,T]$ e denotiamo con $\eta_{t,x}$ il push–forward di γ_x tramite la mappa $\psi \mapsto \psi(t)$. Verifichiamo che sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 6.1. Se ciò fosse falso, potremmo trovare $t \in (0,T]$, dei boreliani disgiunti K e $K' \subset \mathbb{R}^d$ e un boreliamo $C \subset A$ con $\mathscr{L}^d(C) > 0$ tali che

$$\gamma_x(\{\psi : \psi(t) \in K\})\gamma_x(\{\psi : \psi(t) \in K'\}) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in C.$$

Eventualmente passando ad un sottoinsieme con misura di Lebesgue ancora strettamente positiva possiamo supporre che

$$0 < \gamma_x(\{\psi : \psi(t) \in K\}) \leq M\gamma_x(\{\psi : \psi(t) \in K'\})$$

per qualche costante M. Definiamo allora

$$\gamma_x^1 = \chi_C(x)\gamma_x \llcorner \{\psi : \psi(t) \in K\} \quad \text{ e } \quad \gamma_x^2 = M\chi_C(x)\gamma_x \llcorner \{\psi : \psi(t) \in K'\}$$

e denotiamo con μ_t^i le misure associate a γ_x^i come in 6.2. Allora, grazie al Teorema 6.3, le (densità delle) misure μ_t^i risolvono l'equazione del trasporto (6.3) e

$$\mu_0^1 = \eta_{t,x}(K)\mathscr{L}^d \llcorner C \qquad \text{e} \qquad \mu_0^2 = M\eta_{t,x}(K')\mathscr{L}^d \llcorner C,$$

quindi $\mu_0^1 \leq \mu_0^2$. Ma d'altronde

$$\mu_t^1 = \int_C \eta_{t,x} \llcorner K dx \perp M \int_C \eta_{t,x} \llcorner K' dx = \mu_t^2.$$

Osserviamo inoltre che i supporti di μ_t^i sono equilimitati e che l'ipotesi (ii) garantisce che le densità di μ_t^i sono uniformemente limitate nello spazio e nel tempo. Questo contraddice il Teorema 5.10 e quanto osservato immediatamente dopo di esso, quindi otteniamo la tesi. □

Questo teorema mostra che stime L^∞ su $[\text{div} b_t]^-$ implicano che le soluzioni generalizzate definite in (6.2) sono in realtà soluzioni classiche. Tra poco mostreremo che stime L^∞ su $[\text{div} b_t]^+$ implicano l'iniettività, in senso debole, del flusso $x \mapsto \gamma_x$. Preliminarmente, mostriamo un teorema di decomposizione. Indichiamo con $\mathscr{K}(\mathbb{R}^m)$ lo spazio metrico localmente compatto dei sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^m$, dotato della metrica di Hausdorff

$$\text{dist}_{\mathscr{H}}(K, L) = \inf \{ r > 0 : K \subset L_r \text{ e } L \subset K_r \} \quad \text{per ogni } K, L \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^m).$$

La misurabilità di una mappa $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto K(x) \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^m)$ viene definita in base alla struttura metrica dello spazio di arrivo.

Teorema 6.6. *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato e $\mathscr{L}^d$-misurabile e sia $\eta_x : A \to \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^m)$ una famiglia $\mathscr{L}^d$-misurabile che soddisfi*

$$\int_C \eta_x dx \perp \int_{C'} \eta_x dx$$

per ogni coppia di boreliani disgiunti C e $C' \subset A$. Allora, per ogni $\delta > 0$, esistono un boreliano $C \subset A$ e una famiglia $\mathscr{L}^d$-misurabile $C \ni x \mapsto K(x) \in \mathscr{K}(\mathbb{R}^m)$ di compatti a due a due disgiunti tali che si abbia

$$\mathscr{L}^d(A \setminus C) < \delta \quad \text{e} \quad \eta_x(\mathbb{R}^m \setminus K(x)) < \delta \text{ per ogni } x \in C.$$

DIM. Eventualmente includendo A in un cubo più grande Q, possiamo supporre che $A = Q$ sia un cubo. Applicando il teorema di derivazione di Lebesgue alle funzioni $x \mapsto \int \varphi d\eta_x$, con $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^m)$ che varia in un insieme numerabile e denso, otteniamo che per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in Q$

$$\frac{1}{\mathscr{L}^d(Q_i)} \int_{Q_i} \eta_y dy \rightharpoonup \eta_x \qquad \text{come misure su } \mathbb{R}^m \tag{6.4}$$

per ogni famiglia di cubi (Q_i), con $x \in Q_i$ per ogni i e con $\operatorname{diam}(Q_i) \to 0$.

Assumendo senza perdita di generalità che Q sia il cubo unitario centrato nell'origine, consideriamo la decomposizione diadica canonica di Q in cubi chiusi Q_i^h, con $h \in \mathbb{N}$ e $1 \le i \le 2^{hd}$, e le corrispondenti famiglie di misure $\eta_i^h = \int_{Q_i^h} \eta_x dx$. Fissiamo una successione (δ_h) di valori strettamente positivi tale che $\sum_h \delta_h < \delta$ e, per induzione su h, definiamo una famiglia di insiemi compatti $K_i^h \subset \mathbb{R}^m$, $1 \le i \le 2^{hd}$, e delle famiglie numerabili $\mathcal{F}_h$ di cubi diadici appartenenti alle suddivisioni di Q e con lato di lunghezza al più 2^{-h} in modo che valgano le seguenti proprietà:

(a) se $Q_i^h \subset Q_j^k$ allora $K_i^h \subset K_j^k$;

(b) per ogni $h \ge 1$ gli insiemi K_i^h, $1 \le i \le 2^{hd}$, sono a due a due disgiunti;

(c) la misura di Lebesgue dell'unione dei cubi in $\mathcal{F}_h$ è minore di δ_h;

(d) per $h > k \ge -1$ abbiamo $\eta_j^h(K_l^{k-1} \setminus K_i^k) \le \delta_{k+1} 2^{-hd}$, ogni volta che $Q_j^h \subset Q_i^k \subset Q_l^{k-1}$ e $Q_j^h \notin \mathcal{F}_{k+1}$ (con la convenzione $K_l^{-1} = \mathbb{R}^m$ e $Q_l^{-1} = \mathbb{R}^d$).

Per cominciare, poniamo $\mathcal{F}_0 = \emptyset$ e scegliamo K_1^0 in modo che $\eta_1^0(\mathbb{R}^m \setminus K_1^0) \le \delta_1^2$. Quindi, per $h \ge 1$, diciamo che un cubo Q_i^h appartiene a $\mathcal{F}_1$ se $\eta_i^h(\mathbb{R}^m \setminus K_1^0) \ge \delta_1 2^{-hd}$. Se scegliamo una sottofamiglia disgiunta $Q_{i(l)}^{h(l)}$ di $\mathcal{F}_1$ la cui unione coincide con l'unione di tutti i cubi di $\mathcal{F}_1$ abbiamo che

$$\mathscr{L}^d\left(\bigcup_{Q_i^h \in \mathcal{F}_1} Q_i^h\right) \le \sum_l \mathscr{L}^d\left(Q_{i(l)}^{h(l)}\right) \le \frac{\eta_1^0(\mathbb{R}^m \setminus K_1^0)}{\delta_1} \le \delta_1.$$

Ora consideriamo tutti i cubi Q_j^1 e ripetiamo la costruzione in ognuno di essi, trovando dei compatti a due a due disgiunti $K_j^1 \subset K_1^0$ tali che $\sum_j \eta_j^1(K_1^0 \setminus K_j^1) \le \delta_2^2$ (questo è possibile dato che le misure η_j^1 sono a due a due ortogonali) e definendo $\mathcal{F}_2$ come la collezione di tutti i cubi $Q_i^h \subset Q_j^1$ tali che $h \ge 2$ e $\eta_i^h(K_1^0 \setminus K_j^1) \ge \delta_2 2^{-hd}$. Come prima, se scegliamo una sottofamiglia disgiunta $Q_{i(l)}^{h(l)}$ di $\mathcal{F}_2$ la cui unione coincide con l'unione di tutti i cubi in $\mathcal{F}_2$ abbiamo

$$\mathscr{L}^d\left(\bigcup_{Q_i^h \in \mathcal{F}_2} Q_i^h\right) \le \sum_l \mathscr{L}^d\left(Q_{i(l)}^{h(l)}\right) \le \sum_{j=1}^{2^d} \frac{\eta_j^1(K_1^0 \setminus K_j^1)}{\delta_2} \le \delta_2.$$

A questo punto è facile vedere che, iterando questa procedura, le condizioni (a)–(d) risultano soddisfatte.

Definiamo C come il complementare dell'unione dei cubi in tutte le famiglie $\mathcal{F}_h$. Grazie alla condizione (c) ed alla scelta dei δ_h abbiamo $\mathscr{L}^d(Q \setminus C) < \delta$. Ora fissiamo

$x \in C$ in cui vale la convergenza in (6.4) e tale che le coordinate x_i non siano numeri diadici (queste condizioni sono chiaramente soddisfatte per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in C$). Allora x appartiene all'intersezione di un'unica famiglia di cubi inscatolati $Q^h_{i(h)}$ con $Q^h_{i(h)} \notin \mathcal{F}_k$ per ogni $k < h$. Per la condizione (d) abbiamo

$$\eta^h_{i(h)}(\mathbb{R}^m \setminus K^{h_0}_{i(h_0)}) \le \sum_{l=-1}^{h_0-1} \eta^h_{i(h)}(K^l_{i(l)} \setminus K^{l+1}_{i(l+1)}) \le \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l 2^{-hd}$$

per ogni $h > h_0 \ge 0$. Ora definiamo $K(x) = \bigcap_h K^h_{i(h)}$ e, ricordando che per la condizione (c) $h \mapsto K^h_{i(h)}$ è decrescente, grazie alla convergenza debole di $2^{hd}\eta^h_{i(h)}$ a η_x otteniamo

$$\eta_x(\mathbb{R}^m \setminus K^{h_0}_{i(h_0)}) \le \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l < \delta.$$

Mandando h_0 all'infinito otteniamo $\eta_x(\mathbb{R}^m \setminus K(x)) < \delta$ e, grazie alla condizione (b), gli insiemi $K(x)$ sono a due a due disgiunti. Inoltre, $x \mapsto K(x)$ è $\mathscr{L}^d$-misurabile, essendo limite di mappe costanti a tratti. $\square$

Osservazione 6.7. Grazie a un processo standard di esaustione, possiamo ottenere un insieme $\mathscr{L}^d$-trascurabile $C \subset \mathbb{R}^d$ e, per $x \in \mathbb{R}^d \setminus C$, degli insiemi σ-compatti e disgiunti $A(x)$ in modo che $\eta_x(A(x)) = 1$.

Teorema 6.8 (Iniettività debole del flusso). *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme $\mathscr{L}^d$-misurabile e sia $\gamma_x : A \to \mathcal{P}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ una famiglia $\mathscr{L}^d$-misurabile di misure di probabilità che soddisfi:*

(i) $\gamma_x(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathscr{S}^b_x(\mathbb{R}^d)) = 0$ *per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$;*

(ii) *le misure $\mu^{\gamma_x}_t$ definite in (6.2) sono assolutamente continue rispetto a $\mathscr{L}^d$ e le loro densità $w_t(y)$ sono limitate da una costante indipendente da $y \in \mathbb{R}^d$ e da $t \in (0,T)$;*

(iii) *il campo vettoriale B soddisfa (5.5) con $\Omega = \mathbb{R}^d$, (5.16) e*

$$\int_0^T \|[\mathrm{div} b_t]^+\|_{L^\infty(B_R)} dt < +\infty \qquad \textit{per ogni } R > 0. \tag{6.5}$$

Allora, per ogni $t \in [0,T]$ possiamo trovare un insieme $\mathscr{L}^d$-trascurabile $N \subset A$ e, per $x \in A \setminus N$, degli insiemi σ-compatti $A(x)$ a due a due disgiunti, tali che $\eta_{t,x}(A(x)) = 1$ per ogni $x \in A \setminus N$.

DIM. Controlliamo che sia soddisfatta la condizione di ortogonalità del Teorema 6.6. Siano C_1 e $C_2 \subset A$ dei boreliani disgiunti. Se $\int_{C_1} \eta_{t,x} dx$ non fosse ortogonale a $\int_{C_2} \eta_{t,x} dx$, potremmo trovare una costante M e un boreliano $E \subset \mathbb{R}^d$ in modo che

$$\int_{C_1} \eta_{t,x} \llcorner E dx \leq M \int_{C_2} \eta_{t,x} \llcorner E dx$$

e $\int_{C_i} \eta_{t,x}(E) dx > 0$ per $i = 1, 2$. Definiamo

$$\gamma_x^1 = \chi_{C_1}(x) \gamma_x \llcorner \{\psi : \psi(t) \in E\} \quad \text{e} \quad \gamma_x^2 = M \chi_{C_2}(x) \gamma_x \llcorner \{\psi : \psi(t) \in E\}$$

e indichiamo con μ_t^i le misure associate a γ_x^i come in (6.2). Allora, grazie al Teorema 6.3, le misure μ_t^i risolvono l'equazione (6.3), $\mu_0^1 = \eta_{t,x}(E) \mathscr{L}^d \llcorner C_1$ e $\mu_0^2 = M \eta_{t,x}(E) \mathscr{L}^d \llcorner C_2$ sono ortogonali e

$$\mu_t^1 = \int_{C_1} \eta_{t,x} \llcorner E dx \leq M \int_{C_2} \eta_{t,x} \llcorner E dx = \mu_t^2. \tag{6.6}$$

Osserviamo anche che i supporti delle μ_t^i sono equilimitati (dato che b è limitato) e che l'ipotesi (ii) implica che le densità delle misure μ_t^i sono uniformemente limitate nello spazio e nel tempo. Allora la disuguaglianza (6.6) contraddice il Teorema 5.10 e quanto osservato immediatamente dopo esso, invertendo la variabile temporale. La tesi segue allora grazie all'Osservazione 6.7. □

6.2 Flussi lagrangiani

In questa sezione definiamo il concetto di *flusso lagrangiano (regolare)* per campi vettoriali $b(t, x)$ limitati e con variazione totale rispetto a x localmente limitata, mostrando in seguito risultati di esistenza, unicità, stabilità ed iniettività. I principali strumenti che verranno utilizzati saranno il Teorema 6.5 e la teoria delle misure di Young, richiamata nella Sezione 1.6.

Definizione 6.9 (Flussi lagrangiani). *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme $\mathscr{L}^d$-misurabile e sia $\psi : A \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ una mappa $\mathscr{L}^d$-misurabile. Diciamo che ψ è un* flusso lagrangiano *uscente da A, relativo a b, se $\psi(x) \in \mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d)$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$. Diciamo che un flusso lagrangiano ψ è* regolare *se esistono un'unione crescente di insiemi $\mathscr{L}^d$-misurabili A_h, con unione A, e delle costanti C_h tali che*

$$\left| \int_{A_h} \varphi(\psi(x)(t)) dx \right| \leq C_h \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| dy \tag{6.7}$$

per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ *e ogni* $t \in (0,T)$.
Infine, diciamo che un flusso lagrangiano regolare è (essenzialmente) iniettivo *se*

$$\int_{C_1} \delta_{\psi(x)(t)} dx \perp \int_{C_2} \delta_{\psi(x)(t)} dx \qquad \textit{per ogni } t \in [0,T]$$

per ogni coppia di insiemi $\mathscr{L}^d$*-misurabili disgiunti* C_1, $C_2 \subset A$.

Abbiamo osservato che $\mathscr{S}^b_x(\mathbb{R}^d)$ può cambiare se sostituiamo b con un altro campo $\hat{b}$ nella stessa classe di equivalenza di b (cioè uguale a b $\mathscr{L}^{d+1}$-quasi ovunque in $(0,T) \times \mathbb{R}^d$). Il concetto di flusso lagrangiano regolare, invece, è invariante per una trasformazione di questo tipo. Infatti, sia $N \subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$ un insieme boreliano $\mathscr{L}^{d+1}$-trascurabile. Ponendo $N_t = \{x : (t,x) \in N\}$, grazie a (6.7) otteniamo

$$\int_A \chi_{N_t} \circ \psi(x)(t) dt = 0 \qquad \text{per ogni } t \text{ tale che } \mathscr{L}^d(N_t) = 0,$$

e quindi, per integrazione rispetto a t, il teorema di Fubini dà

$$\int_0^T \chi_{N_t} \circ \psi(x)(t) dt = 0 \qquad \text{per } \mathscr{L}^d\text{-quasi ogni } x \in A. \tag{6.8}$$

Scegliendo $N = \{b \neq \hat{b}\}$, otteniamo che $\psi(x) \in \mathscr{S}^b_x(\mathbb{R}^d)$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$ se e solo se $\psi(x) \in \mathscr{S}^{\hat{b}}_x(\mathbb{R}^d)$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$, cioè la regolarità è invariante.

Teorema 6.10 (Esistenza). *Supponiamo che*

(i) $b \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$;

(ii) $b_t \in BV_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ *per* $\mathscr{L}^1$*-quasi ogni* $t \in (0,T)$, $|Db_t|(B_R) \in L^1_{\rm loc}((0,T))$ *per ogni* $R > 0$ *e*

$$\int_0^T \|[\mathrm{div} b_t]^-\|_{L^\infty(B_R)} dt < +\infty \textit{ per ogni } R > 0.$$

Allora, per ogni insieme $\mathscr{L}^d$*-misurabile* $A \subset \mathbb{R}^d$ *esiste un flusso lagrangiano regolare uscente da* A *relativo a* b*. Se* b *soddisfa anche (6.5) allora il flusso è iniettivo.*

La dimostrazione di questo teorema sarà ottenuta come conseguenza della dimostrazione del successivo Teorema 6.13, scrivendo A come unione crescente di sottoinsiemi limitati A_h, approssimando b per convoluzione ed utilizzando l'osservazione seguente.

Osservazione 6.11 (Regolarità dei flussi lipschitziani). Sia $b(t,x)$ limitato, $\mathscr{L}^d$-misurabile rispetto a t e uniformemente (per t che varia in $(0,T)$) lipschitziano in x su ogni palla B_R. Allora b induce un flusso lagrangiano regolare. Infatti, le soluzioni dell'equazione ordinaria sono uniche e, ricordando (3.6), il determinante jacobiano (spaziale) del flusso soddisfa

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t,x) = \mathrm{div} b(t,\psi(x)(t))J(t,x) \qquad \text{per } \mathscr{L}^1\text{-quasi ogni } t \in (0,T)$$

per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. Dato che $J(0,x)=1$, per integrazione rispetto al tempo otteniamo

$$e^{-C_R(t)} \leq J(t,x) \leq e^{D_R(x)} \qquad \text{per ogni } t \in [0,T],\ \text{per } \mathscr{L}^d\text{-quasi ogni } x \in B_R$$

con

$$C_R(t) = \int_0^t \|[\mathrm{div} b_\tau]^-\|_{L^\infty(B_{M_R})} d\tau \quad \text{ e } \quad D_R(t) = \int_0^t \|[\mathrm{div} b_\tau]^+\|_{L^\infty(B_{M_R})} d\tau$$

e $M_R = R + T\|b\|_\infty$. In particolare, la formula dell'area dà

$$\left|\int_{B_R} \varphi(\psi(x)(t))dx\right| \leq e^{C_R(t)} \int_{B_R} |\varphi|(\psi(x)(t))J(t,x)dx \leq e^{C_R(t)} \int_{B_{M_R}} |\varphi(y)|dy$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, e quindi vale la (6.7). Osserviamo che questa stima richiede un controllo solo sulla parte negativa di $\mathrm{div} b_t$.

Teorema 6.12 (Unicità). *Supponiamo che valgano le condizioni* (i) *e* (ii) *del Teorema 6.10. Allora, se ψ_i sono flussi lagrangiani regolari uscenti da insiemi $\mathscr{L}^d$-misurabili $A_i \subset \mathbb{R}^d$, $i=1,2$, abbiamo*

$$\psi_1(x) = \psi_2(x) \qquad \textit{per } \mathscr{L}^d\textit{-quasi ogni } x \in A_1 \cap A_2.$$

DIM. Usando la (6.7) per ψ_i, possiamo supporre senza perdita di generalità che gli insiemi A_i siano limitati e che le misure

$$\mu_t^i(\varphi) = \int_{A_i} \varphi(\psi(x)(t))dx, \qquad \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d), \quad t \in [0,T]$$

siano rappresentabili come $w_t^i \mathscr{L}^d$, con $\|w_t^i\|_\infty \leq C$ indipendente da t e da i. Supponiamo per assurdo che

$$A = \big\{x \in A_1 \cap A_2 \ :\ \psi_1(x) \neq \psi_2(x)\big\}$$

abbia misura di Lebesgue strettamente positiva. Definiamo

$$\gamma_x = \frac{1}{2}\big(\delta_{\psi_1(x)} + \delta_{\psi_2(x)}\big).$$

Allora γ_x non è una delta di Dirac per ogni $x \in A$, ma è concentrata su $\mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d)$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in A$. Ma per ipotesi la condizione (ii) del Teorema 6.5 è soddisfatta, quindi otteniamo un assurdo. $\square$

Infine, mostriamo la stabilità dei flussi lagrangiani regolari rispetto all'approssimazione con campi localmente lipschitziani e uniformemente limitati. Osserviamo che l'ipotesi di limitatezza uniforme (6.12), grazie all'Osservazione 6.11, è soddisfatta se

$$\sup_h \int_0^T \|[\mathrm{div}(b_h)_t]^-\|_{L^\infty(B_R)} dt < +\infty \qquad \text{per ogni } R > 0.$$

Teorema 6.13 (Stabilità). *Supponiamo che valgano le condizioni* (i) *e* (ii) *del Teorema 6.10. Siano $b_h(t,x) : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ campi vettoriali tali che*

$$b_h(\cdot, x) \text{ è } \mathscr{L}^1\text{-misurabile in } (0,T) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^d, \tag{6.9}$$

$$\sup_h \|b_h\|\infty \leq C \quad e \quad b_h \to b \text{ in } L^1_{\mathrm{loc}}((0,T) \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \tag{6.10}$$

$$\nabla b_h(t, \cdot) \in L^\infty((0,T) \times B_R) \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N} \text{ e ogni } R > 0. \tag{6.11}$$

Siano $\psi_h(x)(t)$ le uniche soluzioni in $[0,T]$ delle equazioni ordinarie $\dot{\psi}(t) = b_h(t, \psi(t))$ con condizione iniziale $\psi(0) = x$ e supponiamo che per ogni $R > 0$ esista una costante C_R tale che

$$\left| \int_{B_R} \varphi(\psi_h(x)(t)) dx \right| \leq C_R \int_{B_{M_R}} |\varphi(y)| dy \quad \text{per ogni } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d) \text{ e ogni } t \in [0,T], \tag{6.12}$$

con $M_R = R + \sup_h \|b_h\|_\infty$. Allora, indicando con ψ il flusso lagrangiano regolare relativo a b uscente da $\mathbb{R}^d$, abbiamo che le funzioni ψ_h convergono in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathscr{S}(\mathbb{R}^d))$ a ψ, cioè

$$\lim_{h\to\infty} \int_{B_R} \sup_{[0,T]} |\psi(x) - \psi_h(x)| dx = 0 \quad \text{per ogni } R > 0.$$

DIM. Fissiamo $R > 0$ e osserviamo che, grazie alla stima uniforme su $\|b_h\|_\infty$, l'insieme $\cup_h \psi_h(B_R)$ è relativamente compatto in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Il teorema fondamentale delle misure di Young (Teorema 1.37) garantisce l'esistenza di una sottosuccessione (che nel seguito non reindicizzeremo) tale che ψ_h converge a una misura di Young γ_x in $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, cioè

$$\lim_{h\to\infty} \int_{B_R} \phi(x, \psi_h(x)) dx = \int_{B_R} \int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \phi(x, \psi) d\gamma_x(\psi) dx$$

per ogni funzione limitata $\phi(x,\psi) : B_R \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ continua rispetto a ψ e $\mathscr{L}^d$-misurabile rispetto a x. Utilizzando come funzione test $\phi(x,\psi) = \varphi(\psi(t))$, con $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ e $t \in [0,T]$, possiamo passare al limite per $h \to \infty$ nella (6.12) ottenendo

$$\left| \int_{B_R} \int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \varphi(\psi(t)) d\gamma_x(\psi) dx \right| \leq C_R \int_{B_{M_R}} |\varphi(y)| dy \tag{6.13}$$

per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ e ogni $t \in [0,T]$. Con argomenti analoghi a quelli usati per dimostrare la (6.8), da questa disuguaglianza otteniamo

$$\int_0^T \int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \chi_{N_t} \circ \psi(t) d\gamma_x(\psi) dt = 0 \qquad \text{per } \mathscr{L}^d\text{-quasi ogni } x \in B_R$$

per ogni boreliano $\mathscr{L}^{d+1}$-trascurabile $N \subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$, avendo definito $N_t = \{x : (t,x) \in N\}$.

Ora verifichiamo che $\gamma_x(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \setminus \mathscr{S}_x^b(\mathbb{R}^d)) = 0$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in B_R$. Grazie ad un argomento di continuità, è sufficiente verificare che per ogni $t \in [0,T] \cap \mathbb{Q}$ vale

$$\psi(t) = x + \int_0^t b(\tau, \psi(\tau)) d\tau \qquad \text{per } \gamma_x\text{-quasi ogni } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in B_R$. Per mostrarlo fissiamo $t \in [0,T]$ e consideriamo un campo vettoriale c limitato e regolare. Se definiamo

$$\phi(x,\psi) = \left| \psi(t) - x - \int_0^t c(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right|,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int_{B_R} \int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \left| \psi(t) - x - \int_0^t c(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right| d\gamma_x(\psi) dx \\
= \ & \lim_{h \to \infty} \int_{B_R} \left| \int_0^t (b_h - c)(\tau, \psi_h(x)(\tau)) d\tau \right| dx \\
\leq \ & \limsup_{h \to \infty} \int_0^t \int_{B_R} |b_h - c|(\tau, \psi_h(x)(\tau)) dx d\tau \\
\leq \ & C_R \limsup_{h \to \infty} \int_{(0,T) \times B_{M_R}} |b_h(\tau, y) - c(\tau, y)| d\tau dy = C_R \|b - c\|_{L^1((0,T) \times B_{M_R})}.
\end{aligned}$$

Scegliendo $c = c_\epsilon = b * \rho_\epsilon$ ed utilizzando il lemma di Fatou otteniamo

$$\int_{B_R} \liminf_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \left| \psi(t) - x - \int_0^t c_\epsilon(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right| d\gamma_x(\psi) dx = 0.$$

Scegliamo $N = S_b \cup \Big\{ (x,t) \notin S_b : b(t,x) \neq \tilde{b}(t,x) \Big\}$, poniamo $N_\tau = \{x : (\tau, x) \in N\}$, scegliamo $x \in B_R$ in cui il limite inferiore all'interno dell'integrale è nullo e tale che $\gamma_x \Big(\{\psi : \int_0^T \chi_{N_\tau} \circ \psi(\tau) d\tau > 0\} \Big) = 0$, e scegliamo una successione $\epsilon_k \downarrow 0$ tale che

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \left| \psi(t) - x - \int_0^t c_{\epsilon_k}(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right| d\gamma_x(\psi) = 0.$$

Sfruttando la convergenza puntuale di c_{ϵ_k} a $\tilde{b} = b$ fuori da N otteniamo

$$\int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \left| \psi(t) - x - \int_0^t b(\tau, \psi(\tau)) d\tau \right| d\gamma_x(\psi) = 0.$$

Questo verifica quindi l'affermazione fatta.

Sfruttando questo fatto e la (6.13), possiamo applicare il Teorema 6.5 ottenendo che $\gamma_x = \delta_{\psi(x)}$ per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x \in B_R$. Dalla (6.13) otteniamo anche che ψ è il flusso lagrangiano regolare uscente da B_R. Grazie all'Osservazione 6.11, questo prova anche il Teorema 6.10. Inoltre, se vale (6.5), allora l'iniettività del flusso vale nel senso del Teorema 6.8, nel contesto più generale dei flussi indotti da misure di probabilità γ_x su $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Per mostrare infine la convergenza in L^1 di ψ_h a ψ su B_R è sufficiente usare come funzione test

$$\phi(x, \psi) = \sup_{[0,T]} |\psi - \psi(x)|,$$

che permette di ottenere

$$\lim_{h \to \infty} \int_{B_R} \sup_{[0,T]} |\psi_h(x) - \psi(x)| dx = \int_{B_R} \int_{\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)} \phi(x, \psi) d\gamma_x(\psi) dx = 0.$$

□

Dato che successioni convergenti in L^1 hanno sottosuccessioni convergenti puntualmente quasi ovunque, il teorema di stabilità e un argomento diagonale permettono di costruire una sottosuccessione $(\psi_{h(k)})$ tale che

$$\lim_{k \to \infty} \psi_{h(k)}(x) = \psi(x) \qquad \text{uniformemente in } [0, T] \text{ per } \mathscr{L}^d\text{-quasi ogni } x \in \mathbb{R}^d.$$

6.3 Confronto con il metodo di DiPerna e Lions

È interessante confrontare la caratterizzazione dei flussi lagrangiani data in [7] con quella del lavoro di DiPerna e Lions. Restringiamoci per semplicità di notazione al caso autonomo ed indichiamo il flusso con $\psi(x, t)$.

L'approccio di DiPerna e Lions si basa sulle seguenti tre proprietà:

(a) $\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = b(t, \psi(x, t))$ e $\psi(x, 0) = x$ nel senso delle distribuzioni su $(0, T) \times \mathbb{R}^d$;

(b) la misura immagine λ_t di $\mathscr{L}^d$ tramite $\psi(\cdot, t)$ soddisfa

$$\frac{1}{C}\mathscr{L}^d \le \lambda_t \le C\mathscr{L}^d \qquad \text{per qualche costante } C > 0;$$

(c) vale la *proprietà di semigruppo*:

$$\psi(\psi(x,s),t) = \psi(x,s+t) \ \text{ per } \mathscr{L}^d\text{-quasi ogni } x \text{ e per ogni } s,t>0 \text{ con } s+t\le T.$$

La definizione di flusso lagrangiano regolare di Ambrosio (Definizione 6.9) non richiede la proprietà di semigruppo (c) e richiede solo una stima dall'alto per il flusso, diversamente da (b). La condizione (a) è invece equivalente (a meno di modificare il flusso in un insieme $\mathscr{L}^{d+1}$-trascurabile) alla richiesta che $\psi(x,\cdot)$ sia una soluzione integrale dell'equazione ordinaria per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni dato iniziale $x\in\mathbb{R}^d$.

Mostriamo che la proprietà di semigruppo (c) è in realtà una conseguenza della definizione di flusso lagrangiano regolare. Fissiamo $s\in\mathbb{Q}\cap[0,T]$ e un insieme $\mathscr{L}^d$-misurabile $A_h\subset\mathbb{R}^d$ in modo che valga (6.7) per qualche costante C_h e definiamo

$$\widetilde{\psi}(x,t) = \begin{cases} \psi(x,t) & \text{se } t\le s \\ \psi(\psi(x,s),t-s) & \text{se } s\le t\le T. \end{cases}$$

$\widetilde{\psi}(x,\cdot)$ è chiaramente una soluzione integrale dell'equazione ordinaria per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x\in A_h$ e inoltre abbiamo

$$\int_{A_h} \varphi\big(\widetilde{\psi}(x,t)\big)dx \le C_h^2\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(y)dy \qquad \text{per ogni } \varphi\in C_c(\mathbb{R}^d)$$

per ogni $t\ge s$. Il Teorema 6.12 dà allora $\widetilde{\psi}(x,\tau)=\psi(x,\tau)$ per ogni $\tau\in[0,T]$, per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni $x\in A_h$. Dall'arbitrarietà di s, grazie ad un argomento di densità, otteniamo

$$\psi(\psi(x,s),t)=\psi(x,s+t) \qquad \text{per } \mathscr{L}^d\text{-quasi ogni } x\in A_h,$$

per ogni $s,t>0$ con $s+t\le T$. La proprietà di semigruppo (c) segue allora dal fatto che, per ipotesi, possiamo ricoprire $\mathscr{L}^d$-quasi tutto A con una successione di insiemi A_h verificanti le proprietà che abbiamo utilizzato.

Capitolo 7

Tracce normali di campi vettoriali con divergenza misura

Cominciamo ora ad illustrare la parte originale di questa tesi, contenuta in un lavoro in collaborazione con L. Ambrosio e S. Maniglia ([10]). In questo capitolo definiamo il concetto di *traccia normale* di un campo vettoriale su una superficie (o più in generale su un insieme rettificabile), mostrando poi alcune proprietà naturali di località e di continuità debole. Ci allontaniamo provvisoriamente dall'argomento principale della tesi, ma questi strumenti saranno ripresi nel prossimo capitolo, in cui sarà provata la proprietà di rinormalizzazione per l'equazione del trasporto con campo SBD. Il materiale di questo capitolo, ripreso in [10], è già presente nei precedenti lavori [23], [14] e [15]. Per alcuni risultati in un contesto più generale, in cui vengono considerati anche campi vettoriali con componenti misure, si può vedere [24].

7.1 Tracce normali su insiemi rettificabili

In tutto questo capitolo supponiamo che $C : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sia un campo vettoriale localmente limitato la cui divergenza, nel senso delle distribuzioni, sia una misura di Radon localmente finita in Ω, indicata con $D \cdot C$. Indichiamo con $\mathcal{M}_\infty(\Omega)$ la classe di questi campi vettoriali.

Fissato un dominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ con frontiera di classe C^1 possiamo definire la traccia della componente normale di C su $\partial\Omega'$ come una distribuzione (su Ω) nel modo seguente:

$$\langle \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega'), \varphi \rangle := \int_{\Omega'} \nabla\varphi \cdot C \, dx + \int_{\Omega'} \varphi \, dD \cdot C \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{7.1}$$

Questa definizione è chiaramente consistente con la formula di Gauss–Green, nel caso in cui $C \in C^1(\overline{\Omega'}, \mathbb{R}^d)$, e in tal caso la distribuzione è indotta dall'integrazione su $\partial\Omega'$ di $C \cdot \nu_{\Omega'}$, dove $\nu_{\Omega'}$ è la normale esterna a Ω'. In generale, dimostriamo che questa distribuzione è indotta dall'integrazione di una funzione L^∞ su $\partial\Omega'$, che indicheremo ancora con $\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega')$, e inoltre che questa funzione dipende solo da $\partial\Omega'$ e dalla sua orientazione, piuttosto che da Ω', il che permetterà di definire la traccia su superfici orientate. Innanzitutto, mostriamo il seguente lemma di approssimazione.

Lemma 7.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ un aperto con bordo di classe C^1. Allora, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e ogni $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo, esiste $\tilde{\varphi}_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che*

(i) $\tilde{\varphi}_\epsilon - \varphi$ *si annulla in un intorno di* $\partial\Omega'$,

(ii) $\|\tilde{\varphi}_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega')}$,

(iii) $\tilde{\varphi}_\epsilon = 0$ *su* $\Omega'_\epsilon = \{x \in \Omega' : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega') > \epsilon\}$ *e*

(iv) $\int_{\Omega'} |\nabla\tilde{\varphi}_\epsilon| \leq \int_{\partial\Omega'} |\varphi| + \epsilon$.

Dim. Dato che $\partial\Omega' \in C^1$ è facile trovare (utilizzando ad esempio il fatto che $\partial\Omega'$ è localmente un grafico) una famiglia di insiemi aperti Ω_h tale che $\overline{\Omega}_h \subset \Omega'$, $\Omega_h \uparrow \Omega'$ per $h \to \infty$ e

$$\limsup_{h\to\infty} |D\chi_{\Omega_h}|(\mathbb{R}^d) \leq |D\chi_{\Omega'}|(\mathbb{R}^d).$$

Consideriamo h abbastanza grande, in modo che $\Omega_h \supset \overline{\Omega'_\epsilon}$, e $\eta_h = \chi_{\Omega_h} * \rho_\delta$, con $\delta = \delta(h) > 0$ abbastanza piccolo in modo che $\delta < \mathrm{dist}\,(\partial\Omega_h, \partial\Omega')$ e che l'interno di $\{\eta_h = 1\}$ contenga Ω'_ϵ. Ponendo $\tilde{\varphi}_h = (1 - \eta_h)\varphi$, è sufficiente verificare che l'ultima proprietà vale, per h sufficientemente grande. Infatti, grazie alla disuguaglianza di Jensen (formula (1.2)) abbiamo

$$\limsup_{h\to\infty} |D\eta_h|(\mathbb{R}^d) \leq |D\chi_{\Omega'}|(\mathbb{R}^d),$$

e dato che (grazie alla semicontinuità inferiore della variazione totale) vale

$$\liminf_{h\to\infty} |D\eta_h|(A) \geq |D\chi_{\Omega'}|(A) \qquad \text{per ogni aperto } A \subset \mathbb{R}^d,$$

otteniamo (applicando il Teorema 1.14) che $|D\eta_h|$ converge debolmente, nella dualità con $C_c(\mathbb{R}^d)$, a $|D\chi_{\Omega'}|$. Allora otteniamo

$$\int_{\Omega'} |\nabla\tilde{\varphi}_h|\,dx \leq \int_{\Omega'} (1 - \eta_h)|\nabla\varphi|\,dx + \int_{\Omega'} |\varphi||\nabla\eta_h|\,dx \to \int_{\partial\Omega'} |\varphi|\,d\mathscr{H}^{d-1}.$$

Quindi possiamo porre $\tilde{\varphi}_\epsilon = \tilde{\varphi}_h$ per h sufficientemente grande. $\square$

Proposizione 7.2. *La distribuzione definita in (7.1) è indotta da una funzione* L^∞ *su* $\partial\Omega'$*, nel seguito ancora indicata con* $\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega')$*, con* $\|\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega')\|_\infty \leq \|C\|_{L^\infty(\Omega')}$*. Inoltre, se* Σ *è un insieme boreliano contenuto in* $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ *e se* $\nu_{\Omega_1} = \nu_{\Omega_2}$ *su* Σ*, allora*

$$\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega_1) = \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega_2) \qquad \mathscr{H}^{d-1}\text{-}\textit{quasi ovunque su } \Sigma. \tag{7.2}$$

Dim. (i) Innanzitutto, è immediato verificare che il supporto della distribuzione $\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega')$ è contenuto in $\partial\Omega'$. Siano $\epsilon > 0$ e $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ e consideriamo $\tilde{\varphi}_\epsilon$ come nel lemma precedente. Allora possiamo stimare come segue:

$$\begin{aligned}
|\langle \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega'), \varphi\rangle| &= |\langle \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega'), \tilde{\varphi}_\epsilon\rangle| \leq \Big| \int_{\Omega'} \tilde{\varphi}_\epsilon d(D\cdot C)\Big| + \|C\|_{L^\infty(\Omega')} \int_{\Omega'} |\nabla\tilde{\varphi}_\epsilon| \\
&\leq \Big| \int_{\Omega'\setminus\Omega'_\epsilon} \tilde{\varphi}_\epsilon \, d(D\cdot C)\Big| + \|C\|_{L^\infty(\Omega')} \left(\int_{\partial\Omega'} |\varphi| + \epsilon \right) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega')} |D\cdot C|(\Omega'\setminus\Omega'_\epsilon) + \|C\|_{L^\infty(\Omega')} \left(\int_{\partial\Omega'} |\varphi| + \epsilon \right).
\end{aligned}$$

Per $\epsilon \to 0$ otteniamo $|\langle \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega'), \varphi\rangle| \leq \|C\|_{L^\infty(\Omega')} \|\varphi\|_{L^1(\partial\Omega')}$ e quindi segue che possiamo rappresentare $\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega')$ con una funzione L^∞ su $\partial\Omega'$.
(ii) Siano T_1 e T_2 le tracce di C su $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ rispettivamente. Consideriamo $\chi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ con $0 \leq \chi \leq 1$ e con supporto contenuto nella palla unitaria B_1. Consideriamo $x \in \Sigma$ che soddisfi le due condizioni seguenti:

(a) x è un punto di Lebesgue per T_1 e T_2;

(b) (1.1) vale in x, con $\mu = |D\cdot C| \llcorner (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, $E = \Sigma$ e $k = d-1$.

Osserviamo che queste proprietà sono soddisfatte $\mathscr{H}^{d-1}$-quasi ovunque in Σ, quindi sarà sufficiente mostrare che $T_1(x) = T_2(x)$ per un tale x.

Ora definiamo $\chi_\rho(y) = \chi(\frac{y-x}{\rho})$: il supporto di χ_ρ è contenuto in $B_\rho(x)$. Useremo un argomento di blow–up per mostrare la tesi. Se ρ è abbastanza piccolo, possiamo usare χ_ρ come funzione test nella definizione di traccia, ottenendo

$$\int_{\partial\Omega_i} T_i \chi_\rho = \int_{\Omega_i} \nabla\chi_\rho \cdot C \, dx + \int_{\Omega_i} \chi_\rho \, d(D\cdot C) \qquad \text{per } i = 1,\, 2.$$

Stimiamo ora le due differenze che appaiono calcolando $\int_{\partial\Omega_1} T_1\chi_\rho - \int_{\partial\Omega_2} T_2\chi_\rho$. Innanzitutto abbiamo

$$\Big| \int_{\Omega_1} \nabla\chi_\rho \cdot C - \int_{\Omega_2} \nabla\chi_\rho \cdot C \Big| \leq \frac{c}{\rho} \mathscr{L}^d \left((\Omega_1 \triangle \Omega_2) \cap B_\rho(x) \right) = o(\rho^{d-1}),$$

dato che la differenza simmetrica tra Ω_1 e Ω_2 è molto piccola per $\rho \to 0$. Inoltre abbiamo

$$\Big| \int_{\Omega_1} \chi_\rho d(D\cdot C) - \int_{\Omega_2} \chi_\rho d(D\cdot C) \Big| \le |D\cdot C|((\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap B_\rho(x)) = o(\rho^{d-1}),$$

grazie all'ipotesi (b) su x.

Grazie a queste stime otteniamo

$$\int_{\partial\Omega_1} T_1 \chi_\rho - \int_{\partial\Omega_2} T_2 \chi_\rho = o(\rho^{d-1}). \tag{7.3}$$

Osserviamo che, per $i = 1, 2$, abbiamo

$$\Big| \int_{\partial\Omega_i} (T_i - T_i(x))\chi_\rho \, d\mathscr{H}^{d-1} \Big| \le \int_{\partial\Omega_i \cap B_\rho(x)} |T_i(y) - T_i(x)| \, d\mathscr{H}^{d-1}(y) = o(\rho^{d-1})$$

dato che x è un punto di Lebesgue sia per T_1 che per T_2, per l'ipotesi (a). Inoltre

$$\frac{1}{\rho^{d-1}} T_i(x) \int_{\partial\Omega_i} \chi_\rho(y) d\mathscr{H}^{d-1}(y) \to T_i(x) \int_{\Pi_x} \chi(z) d\mathscr{H}^{d-1}(z),$$

dove Π_x è il piano tangente a Σ (cioè a $\partial\Omega_1$ e a $\partial\Omega_2$) in x. Questo si può facilmente verificare cambiando variabile, ponendo $z = \frac{y-x}{\rho}$, ed osservando che in un intorno di x gli insiemi riscalati $\partial\Omega_\rho = (\partial\Omega_i - x)/\rho$ convergono in C^1 a Π_x per $\rho \downarrow 0$.

Allora, usando la disuguaglianza triangolare, otteniamo

$$\frac{1}{\rho^{d-1}} \int_{\partial\Omega_i} T_i(y)\chi_\rho(y) d\mathscr{H}^{d-1}(y) \to T_i(x) \int_{\Pi_x} \chi(z) d\mathscr{H}^{d-1}(z).$$

Ricordando (7.3) ed osservando che possiamo trovare χ tale che $\int_{\Pi_x} \chi(z) d\mathscr{H}^{d-1}(z) \neq 0$, otteniamo che $T_1(x) = T_2(x)$. $\square$

Possiamo usare la proprietà (7.2) per definire le tracce $\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma)$ e $\mathrm{Tr}^-(C, \Sigma)$ su una ipersuperficie di classe C^1 *orientata* $\Sigma \subset\subset \Omega$. Infatti, scegliendo un dominio aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ di classe C^1 tale che $\Sigma \subset \partial\Omega'$ e $\nu_{\Omega'} = \nu_\Sigma$, possiamo definire

$$\mathrm{Tr}^-(C, \Sigma) := \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega') \qquad \text{su } \Sigma.$$

Analogamente, scegliendo un dominio aperto $\Omega'' \subset\subset \Omega$ di classe C^1 tale che $\Sigma \subset \partial\Omega''$ e $\nu_{\Omega''} = -\nu_\Sigma$, definiamo

$$\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma) := -\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega'') \qquad \text{su } \Sigma.$$

Con la convenzione che la frontiera di un insieme aperto sia orientata dalla normale uscente, risulta che $\mathrm{Tr}^-(C, \Sigma)$ coincide su Σ con la traccia $\mathrm{Tr}(C, \partial\Omega')$ definita in (7.1). Se $\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma) = \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma)$, indicheremo con $\mathrm{Tr}(C, \Sigma)$ il valore comune.

Definizione 7.3 (Traccia normale su insiemi numerabilmente $\mathscr{H}^{d-1}$-rettificabili). *Utilizzando il risultato di località appena dimostrato, possiamo dare un senso alla traccia normale di C su un insieme numerabilmente $\mathscr{H}^{d-1}$-rettificabile orientato Σ. Infatti possiamo trovare una famiglia numerabile di ipersuperfici C^1 orientate (Σ_i) e degli insiemi boreliani $E_i \subset \Sigma_i$ a due a due disgiunti in modo che $\mathscr{H}^d(\Sigma \setminus \cup_i E_i) = 0$ e che $\nu_\Sigma(x)$ sia la normale classica a Σ_i per ogni $x \in E_i$. Allora possiamo definire*

$$\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma) := \mathrm{Tr}^+(C, \Sigma_i)\,, \quad \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma) := \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma_i) \quad \mathscr{H}^{d-1}\text{-quasi ovunque su } E_i.$$

La proprietà di località assicura che questa definizione dipende dall'orientazione, come nel caso di ipersuperfici C^1 orientate, ma non dalla scelta delle ipersuperfici Σ_i e degli insiemi E_i, a meno di insiemi $\mathscr{H}^{d-1}$-trascurabili.

Proposizione 7.4. *Se $C \in \mathcal{M}_\infty(\Omega)$ allora $|D \cdot C|(B) = 0$ per ogni insieme $\mathscr{H}^{d-1}$-trascurabile $B \subset \Omega$. Per ogni ipersuperficie C^1 orientata $\Sigma \subset \Omega$ abbiamo*

$$D \cdot C \llcorner \Sigma = (\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma) - \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma))\mathscr{H}^{d-1} \llcorner \Sigma.$$

DIM. (i) Per regolarità interna, è sufficiente mostrare la tesi per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$ tale che $\mathscr{H}^{d-1}(K) = 0$. Mostreremo quindi che

$$\langle \chi_K D \cdot C, \varphi \rangle = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{7.4}$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e consideriamo una famiglia finita di palle (B_i) tale che $K \subset \cup_i B_i$ e $\sum_i \mathscr{H}^{d-1}(\partial B_i) < \epsilon$. Sia χ_ϵ la funzione caratteristica di $\cup_i B_i$ e poniamo $\chi_{\epsilon,\delta} = \chi_\epsilon * \rho_\delta$, dove ρ_δ è un nucleo di convoluzione standard. Se δ è abbastanza piccolo, possiamo supporre che i supporti di tutte le funzioni $\chi_{\epsilon,\delta}$ siano contenuti in un compatto $\tilde{K} \subset \Omega$. Allora abbiamo

$$\langle \chi_{\epsilon,\delta} D \cdot C, \varphi \rangle = -\int_\Omega C \cdot \nabla(\chi_{\epsilon,\delta}\varphi)\, dx = -\int_\Omega \varphi C \cdot \nabla \chi_{\epsilon,\delta}\, dx - \int_\Omega \chi_{\epsilon,\delta} C \cdot \nabla \varphi\, dx,$$

e una semplice stima dà

$$|\langle \chi_{\epsilon,\delta} D \cdot C, \varphi \rangle| \le \|C\|_{L^\infty(\tilde{K})} \left[\|\varphi\|_{L^\infty(\tilde{K})} \int_\Omega |\nabla \chi_{\epsilon,\delta}|\, dx + \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\tilde{K})} \mathscr{L}^d(\{\chi_{\epsilon,\delta} > 0\}) \right].$$

Dato che $\nabla \chi_{\epsilon,\delta} = D\chi_\epsilon * \rho_\delta$, grazie alla disuguaglianza di Jensen (1.2) si ha

$$\limsup_{\epsilon \downarrow 0} \limsup_{\delta \downarrow 0} \int_\Omega |\nabla \chi_{\epsilon,\delta}|\, dx \le \limsup_{\epsilon \downarrow 0} |D\chi_\epsilon|(\Omega) = 0.$$

Quindi possiamo applicare la stima precedente con un'opportuna successione $\delta(\epsilon) \to 0$, ottenendo la (7.4).

(ii) Dato che l'enunciato ha natura locale, possiamo testare l'identità contro $\varphi \in C_c^\infty(A)$, dove $A \subset\subset \Omega$ e Σ coincide in A con l'insieme di livello $\{F = 0\}$ di una funzione $F \in C^1(\overline{A})$, con $|\nabla F| > 0$ in A. Ponendo $A^+ = A \cap \{F > 0\}$ e $A^- = A \cap \{F < 0\}$ e usando la definizione di $\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma)$ e di $\mathrm{Tr}^-(C, \Sigma)$, otteniamo

$$-\int_\Sigma \mathrm{Tr}^+(C, \Sigma)\varphi \, d\mathscr{H}^{d-1} = \int_{A^+} \nabla\varphi \cdot C \, dx + \int_{A^+} \varphi \, d(D \cdot C)$$

e

$$\int_\Sigma \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma)\varphi \, d\mathscr{H}^{d-1} = \int_{A^-} \nabla\varphi \cdot C \, dx + \int_{A^-} \varphi \, d(D \cdot C).$$

Osservando che $\int_A \nabla\varphi \cdot C \, dx = -\int_A \varphi \, dD \cdot C$, in quanto $\varphi \in C_c^\infty(A)$, e sommando queste due uguaglianze otteniamo

$$\int_\Sigma \varphi \, d(D \cdot C) = \int_\Sigma [\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma) - \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma)]\varphi \, d\mathscr{H}^{d-1}.$$

□

7.2 Famiglie di grafici e continuità debole delle tracce

Definizione 7.5 (Famiglie di superfici di livello e di grafici). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia Σ_t, $t \in I$, una famiglia di ipersuperfici orientate. Diciamo che $\{\Sigma_t\}_{t\in I}$ è una* famiglia di superfici di livello *in $\Omega' \subset\subset \Omega$ se esiste una funzione $F \in C^1(\overline{\Omega'})$ tale che $F(\Omega') = I$, $\{F = t\} = \Sigma_t$ per ogni $t \in I$, $|\nabla F| > 0$ in Ω' e Σ_t è orientata da $\nabla F/|\nabla F|$.*
Diciamo che $\{\Sigma_t\}_{t\in I}$ è una famiglia di grafici *in $\Omega' \subset\subset \Omega$ se inoltre, in un opportuno sistema di coordinate, abbiamo*

$$\Omega' = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \ (x_1, \dots, x_{d-1}) \in D, \ \ f(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d \in I\right\}$$

per un certo insieme aperto $D \subset \mathbb{R}^{d-1}$ e una certa $f \in C^1(D)$, e

$$F(x_1, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d \qquad \text{per ogni } x \in \Omega'.$$

La proposizione seguente mostra che la traccia debole è genericamente consistente con il valore puntuale del campo vettoriale su famiglie di superfici di livello.

Proposizione 7.6. *Sia $C \in \mathcal{M}_\infty(\Omega)$ e sia Σ_t, $t \in I$, una famiglia di superfici di livello contenuta in $\Omega' \subset\subset \Omega$, nel senso della Definizione 7.5. Allora*

$$C \cdot \nu_{\Sigma_t} = \mathrm{Tr}^+(C, \Sigma_t) = \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma_t) \qquad \mathscr{H}^{d-1}\text{-quasi ovunque in } \Sigma_t,$$

per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in I$.

DIM. Dato che $D \cdot C$ è localmente finita, esiste $N_1 \subset I$ al più numerabile tale che $D \cdot C \llcorner \Sigma_t = 0$ per ogni $t \in I \setminus N_1$. Per questi valori di t, utilizzando la Proposizione 7.4, abbiamo $\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma_t) = \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma_t)$.

Approssimiamo per convoluzione C con campi vettoriali regolari $C_\epsilon = C * \rho_\epsilon$, in modo che C_ϵ sia localmente uniformemente limitata in L^∞ e converga a C in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per $\epsilon \to 0$. Dato che $D \cdot C_\epsilon = (D \cdot C) * \rho_\epsilon$, ricordando le proprietà delle convoluzioni di misure richiamate nella Sezione 1.3, otteniamo che $|D \cdot C_\epsilon| \rightharpoonup |D \cdot C|$ debolmente* nella dualità con $C_c(\Omega)$. Inoltre $D \cdot C_\epsilon \rightharpoonup D \cdot C$ debolmente* nella dualità con le funzioni continue e limitate su $\tilde{\Omega}$ per ogni insieme aperto $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$ tale che $|D \cdot C|(\partial\tilde{\Omega}) = 0$, grazie alla Proposizione 1.15. Per ogni tale $\tilde{\Omega}$, sfruttando la definizione di traccia, abbiamo

$$\mathrm{Tr}(C_\epsilon, \partial\tilde{\Omega}) \to \mathrm{Tr}(C, \partial\tilde{\Omega})$$

nel senso delle distribuzioni su Ω. Osservando che $\mathrm{Tr}(C_\epsilon, \partial\tilde{\Omega})$ è uniformemente limitata in $L^\infty(\partial\tilde{\Omega})$ per $\epsilon \downarrow 0$, deduciamo che abbiamo anche convergenza debole* in $L^\infty(\partial\tilde{\Omega})$. Osservando che, per ogni $t \in I \setminus N_1$, possiamo trovare un dominio aperto $\tilde{\Omega}$ con $\Sigma_t \subset \partial\tilde{\Omega}$ e $|D \cdot C|(\partial\tilde{\Omega}) = 0$, ricaviamo facilmente che

$$\mathrm{Tr}(C_\epsilon, \Sigma_t) \to \mathrm{Tr}(C, \Sigma_t) \qquad \text{debolmente* in } L^\infty(\Sigma_t) \text{ per ogni } t \in I \setminus N_1.$$

Ricordando che $\Omega' \subset\subset \Omega$, possiamo estrarre una sottosuccessione "velocemente convergente" C_{ϵ_h}, cioè tale che valga $\sum_h \|C_{\epsilon_h} - C\|_{L^1(\Omega')} < +\infty$. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned} \int_I \sum_h \|C_{\epsilon_h} - C\|_{L^1(\Sigma_t)}\, dt &= \sum_h \int_I \|C_{\epsilon_h} - C\|_{L^1(\Sigma_t)}\, dt \\ &= \sum_h \int_{\Omega'} |\nabla F||C_{\epsilon_h} - C|\, dx < +\infty \end{aligned}$$

e ne segue che $\sum_h \|C_{\epsilon_h} - C\|_{L^1(\Sigma_t)} < +\infty$ per ogni $t \in I \setminus N_2$, con $\mathscr{L}^1(N_2) = 0$. Chiaramente questo significa che

$$C_{\epsilon_h}|_{\Sigma_t} \to C|_{\Sigma_t} \qquad \text{in } L^1(\Sigma_t, \mathscr{H}^{d-1} \llcorner \Sigma_t)$$

per ogni $t \in I \setminus N_2$. Ricordando che per campi vettoriali regolari la traccia è quella classica, otteniamo il risultato desiderato per ogni $t \in I \setminus (N_1 \cup N_2)$. $\square$

Infine, nel quadro più particolare delle famiglie di grafici, con le notazioni introdotte nella Definizione 7.5, ci interessiamo alla continuità delle mappe $t \mapsto \mathrm{Tr}^+(C, \Sigma_t)$ e $t \mapsto \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma_t)$. Pensando in questo caso le tracce come funzioni definite su D, risulta che queste mappe sono debolmente* continue, ma non fortemente continue in generale.

Teorema 7.7 (Continuità debole* delle tracce). *Sia Σ_t, $t \in I$, una famiglia di grafici nel senso della Definizione 7.5 e sia $C \in \mathcal{M}_\infty(\Omega)$. Fissiamo $t_0 \in I$ e poniamo*

$$\bar{\alpha}(x') = \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma_{t_0})(x', f(x') - t_0),$$

$$\alpha_t(x') = \mathrm{Tr}^+(C, \Sigma_t)(x', f(x') - t) \qquad \textit{per } t > t_0.$$

Allora vale

$$\lim_{t \downarrow t_0} \alpha_t(x') = \bar{\alpha}(x') \qquad \textit{debolmente}^* \textit{ in } L^\infty(D, \mathscr{L}^{d-1} \llcorner D).$$

Dim. Sia $\varphi \in C_c^\infty(D)$. Poniamo $\Phi(x', x_d) = \varphi(x')$ e

$$\Omega_t = \{(x', x_d) : x' \in D, f(x') - t < x_d < f(x') - t_0\}.$$

Osservando che possiamo testare contro Φ nella definizione di traccia e stimando nella maniera ovvia, ricaviamo

$$\begin{aligned} & \Big| \int_{\partial\Omega_t} \big[\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma_t)(x)\Phi(x) - \mathrm{Tr}^-(C, \Sigma_{t_0})(x)\Phi(x)\big] \, d\mathscr{H}^{d-1}(x) \Big| \\ = \; & \Big| - \int_{\Omega_t} \nabla\Phi \cdot C \, dx - \int_{\Omega_t} \Phi \, d(D \cdot C) \Big| \\ \leq \; & \|\nabla\Phi\|_{L^\infty(\Omega_t)} \|C\|_{L^\infty(\Omega_t)} \mathscr{L}^d(\Omega_t) + \|\Phi\|_{L^\infty(\Omega_t)} |D \cdot C|(\Omega_t), \end{aligned}$$

che è chiaramente infinitesimo per $t \downarrow t_0$. Questo mostra che

$$\int_D \alpha_t(x')\sigma(x')\varphi(x') \, dx' \to \int_D \bar{\alpha}(x')\sigma(x)\varphi(x') \, dx' \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(D)$$

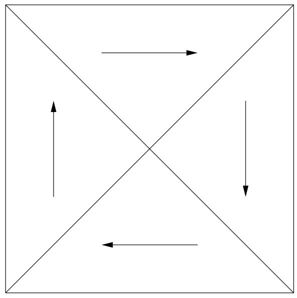
($\sigma(x') = \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}$ è l'elemento d'area). Grazie alla densità delle funzioni regolari e all'uniforme limitatezza di α_t segue che

$$\lim_{t \downarrow t_0} \alpha_t(x')\sigma(x') = \bar{\alpha}(x')\sigma(x') \qquad \text{debolmente}^* \text{ in } L^\infty(D, \mathscr{L}^{d-1} \llcorner D),$$

e osservando che $\sigma(x') \geq 1$ otteniamo la tesi. □

Chiaramente, un risultato simile vale nel caso della convergenza di $\mathrm{Tr}^-(C, \Sigma_t)$ a $\mathrm{Tr}^+(C, \Sigma_{t_0})$, per $t \uparrow t_0$. Mostriamo ora che la continuità debole* è quanto di meglio ci si possa aspettare. L'esempio seguente è tratto da [14].

Esempio 7.8. Poniamo $\Omega = \mathbb{R}^2$ e sia Ω' la palla unitaria. Consideriamo le strisce orizzontali $\Omega_j^+ = \left\{\frac{1}{2^{j+1}} < y < \frac{1}{2^j}\right\}$ e $\Omega_j^- = \left\{-\frac{1}{2^j} < y < -\frac{1}{2^{j+1}}\right\}$, per j intero positivo. Dividiamo ogni striscia in quadrati e consideriamo in ogni quadrato il campo vettoriale (di modulo unitario e costante in ogni triangolo) disegnato in figura. Osservando che le discontinuità del campo sono sempre parallele alle linee di discontinuità,



grazie alla Proposizione 7.4 deduciamo che il campo ha divergenza nulla, quindi chiaramente appartiene a $\mathcal{M}_\infty(\Omega)$. È anche immediato controllare che la traccia su $\{y = 0\}$ è nulla, ma in questo caso non ci possiamo aspettare convergenza forte a 0 in L^1 delle tracce sulle rette orizzontali, a causa delle oscillazioni del campo.

Capitolo 8

Chain–rule per le tracce e rinormalizzazione in SBD

In questo capitolo continuiamo a descrivere i risultati ottenuti in [10], mostrando un'importante formula di cambiamento di variabile per le tracce. La rinormalizzazione per l'equazione del trasporto con campo SBD, illustrata nella Sezione 8.3, sarà un'immediata conseguenza di questa formula e della Proposizione 7.4.

8.1 Concentrazione dei commutatori con campo BD

Innanzitutto, richiamiamo la seguente stima uniforme per gli incrementi simmetrici nel caso di funzioni BD. Questa stima è l'analoga della (5.1) nel caso BD e tiene conto del fatto che ora non possiamo più controllare un qualsiasi rapporto incrementale, ma solo i rapporti incrementali rispetto a una direzione della componente del campo vettoriale in quella direzione.

Lemma 8.1. *Se $B \in BD_{loc}(\Omega)$, allora per ogni vettore $z \in \mathbb{R}^d$ ed ogni insieme compatto $K \subset \Omega$ abbiamo*

$$\int_K |(B(x+z) - B(x)) \cdot z| \, dx \leq |\langle EBz, z\rangle|(K_{|z|}) \, , \tag{8.1}$$

dove $K_{|z|}$ è l'intorno aperto di raggio $|z|$ di K, nell'ipotesi che $|z| < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$.

Dim. Se $f \in C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$ e $z \in \mathbb{R}^d$, allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_K |(f(x+z)-f(x))\cdot z|\,dx &= \int_K \left|\int_0^1 \langle \nabla f(x+tz)z, z\rangle\,dt\right|\,dx \\
&\leq \int_0^1 \int_K |\langle \nabla f(x+tz)z, z\rangle|\,dxdt \\
&\leq \int_{K_{|z|}} |\langle \nabla f(y)z, z\rangle|\,dy.
\end{aligned}$$

Quindi la (8.1) è vera per funzioni f in $C^\infty(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Fissato un nucleo di convoluzione $\rho : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$, definiamo $B_\epsilon := B * \rho_\epsilon$ e applichiamo (8.1) a B_ϵ con $z' = (1-\delta)z$, ottenendo

$$\int_K |(B_\epsilon(x+z') - B_\epsilon(x))\cdot z'|\,dx \leq |\langle EB_\epsilon z', z'\rangle|\,(K_{|z'|}).$$

Grazie al lemma di Fatou ed alla disuguaglianza di Jensen abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\int_K |(B(x+z')-B(x))\cdot z'|\,dx &\leq \liminf_{\epsilon\downarrow 0} \int_K |(B_\epsilon(x+z')-B_\epsilon(x))\cdot z'|\,dx \\
&\leq \limsup_{\epsilon\downarrow 0} |\langle EB_\epsilon z', z'\rangle|\,(K_{|z'|}) \\
&= \limsup_{\epsilon\downarrow 0} |\langle EB\, z', z'\rangle * \rho_\epsilon|\,(K_{|z'|}) \\
&\leq \limsup_{\epsilon\downarrow 0} |\langle EB\, z', z'\rangle|\,(K_{|z'|+\epsilon}) \\
&\leq |\langle EB\, z', z'\rangle|\,(\overline{K_{|z'|}}).
\end{aligned}$$

Ricordando che $z' = (1-\delta)z$, passando al limite per $\delta \downarrow 0$ nella disuguaglianza

$$\int_K |(B(x+z')-B(x))\cdot z'|\,dx \leq |\langle EB\, z', z'\rangle|\,(K_{|z|})$$

e sfruttando la continuità forte in L^1_{loc} delle traslazioni otteniamo la tesi. □

Alcune delle proprietà delle funzioni BV possono essere opportunamente adattate alle funzioni BD, come abbiamo visto nella Sezione 2.7. La prossima proposizione dà maggiori informazioni sul comportamento dei rapporti incrementali simmetrici di funzioni BD, nello spirito del Lemma 5.1.

Proposizione 8.2 (Rapporti incrementali simmetrici di funzioni BD). *Sia $B \in BD_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e sia $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Allora i rapporti incrementali simmetrici*

$$\frac{B(x+\delta z)-B(x)}{\delta}\cdot\frac{z}{|z|}$$

possono essere scritti canonicamente come $B^1_\delta(z)(x) + B^2_\delta(z)(x)$, *dove*

$$B^1_\delta(z)(\cdot) \longrightarrow \langle \mathscr{E}B(\cdot)z, \frac{z}{|z|}\rangle \quad \textit{fortemente in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}) \textit{ per } \delta \downarrow 0 \tag{8.2}$$

e

$$\limsup_{\delta\downarrow 0} \int_K \left|B^2_\delta(z)\right| dx \le \frac{1}{|z|} \left|\langle E^s Bz, z\rangle\right|(K) \tag{8.3}$$

per ogni insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^d$. *Abbiamo inoltre la stima uniforme*

$$\sup_{z\in K'} \sup_{\delta\in(0,\epsilon)} \int_K \left|B^1_\delta(z)\right| + \left|B^2_\delta(z)\right| dx \le \sup_{z\in K'} |z| \left|EB\right|(\{x :\ \mathrm{dist}(x,K) \le \epsilon\}) \tag{8.4}$$

per ogni coppia di insiemi compatti K, K' *di* $\mathbb{R}^d$ *e ogni* $\epsilon > 0$.

DIM. Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^d$ e sia $B = (B^1, B^2, \ldots, B^d) \in BD_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Fissato $z \in \mathbb{R}^d$, senza perdita di generalità possiamo supporre che z sia l'ultimo vettore della base canonica e_d, e scriviamo allora $x = (x', x_d)$ con $x' \in \pi_d \sim \mathbb{R}^{d-1}$ (l'iperpiano ortogonale a e_d) e $x_d \in \mathbb{R}$. Indichiamo con K^d la proiezione ortogonale di K su π_d e poniamo $K^d_{x'} := \{t \in \mathbb{R} : (x', t) \in K\}$. Allora abbiamo

$$\frac{B(x', t+\delta) - B(x', t)}{\delta} \cdot e_d = \frac{B^d(x', t+\delta) - B^d(x', t)}{\delta}.$$

Grazie alla caratterizzazione delle funzioni BD (si vedano le Sezioni 2.7 e 2.8) sappiamo che $B^d(x', \cdot) \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ per $\mathscr{H}^{d-1}$-quasi ogni $x' \in K^d$, quindi, usando il risultato sui rapporti incrementali di funzioni BV di una variabile reale (Lemma 5.1), possiamo scrivere

$$\frac{B^d(x', t+\delta) - B^d(x', t)}{\delta} = (B^d)^1_\delta(x', t) + (B^d)^2_\delta(x', t)$$

dove

$$(B^d)^1_\delta(x', \cdot) \longrightarrow \frac{d}{dt} B^d(x', \cdot) \quad \text{fortemente in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \text{ per } \delta \downarrow 0 \tag{8.5}$$

e

$$\limsup_{\delta\downarrow 0} \int_{K^d_{x'}} \left|(B^d)^2_\delta(x', t)\right| dt \le \left|D^s B^d(x', \cdot)\right|(K^d_{x'}) \quad \text{per } \mathscr{H}^{d-1}\text{-quasi ogni } x' \in K^d. \tag{8.6}$$

Inoltre, abbiamo

$$\sup_{\delta\in(0,\epsilon)} \int_{K^d_{x'}} |(B^d)^1_\delta(x', t)| + |(B^d)^2_\delta(x', t)|\, dt \le |DB^d(x', \cdot)|(\{t : \mathrm{dist}(t, K^d_{x'}) < \epsilon\}). \tag{8.7}$$

Grazie al teorema di struttura per funzioni BD (Teorema 2.33), sappiamo che per $\mathscr{H}^{d-1}$-quasi ogni $x' \in K^d$

$$\frac{d}{dt}B^d(x',t) = \frac{\partial B^d}{\partial x_d}(x',t) = \langle \mathscr{E}B(x',t)e_d, e_d\rangle \quad \text{per } \mathscr{L}^1\text{-quasi ogni } t \in K^d_{x'}. \tag{8.8}$$

Quindi (8.5) e (8.8) danno (8.2), grazie a (8.7). Analogamente, dall'identità

$$\int_{K^d} \left|D^s B^d(x',\cdot)\right| \, d\mathscr{H}^{d-1}(x') = |\langle E^s B e_d, e_d\rangle| \tag{8.9}$$

e da (8.6) otteniamo (8.3), sfruttando ancora (8.7). □

Nel seguente teorema analizziamo il comportamento dei moduli dei commutatori (in forma di divergenza)

$$T_\epsilon := (D\cdot(Bw)) * \rho_\epsilon - D\cdot(B(w*\rho_\epsilon)), \tag{8.10}$$

dimostrando che ogni punto limite per $\epsilon \downarrow 0$ è una misura singolare rispetto a $\mathscr{L}^d$. Come fatto nel Capitolo 5 definiamo

$$I(\rho) := \int_{\mathbb{R}^d} |z||\nabla\rho(z)| \, dz. \tag{8.11}$$

Teorema 8.3 (Concentrazione dei commutatori). *Sia $B \in BD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e sia $w \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sia ρ_ϵ una famiglia di mollificatori indotta da un nucleo di convoluzione radiale ρ. Allora:*

(i) *le distribuzioni T_ϵ definite in* (8.10) *sono indotte da misure con variazione localmente uniformemente limitata in Ω per $\epsilon \downarrow 0$;*

(ii) *ogni punto limite, nel senso delle distribuzioni, di $|T_\epsilon|$ per $\epsilon \downarrow 0$ è una misura σ con variazione localmente finita in Ω che soddisfa*

$$\sigma(A) \le \|w\|_{L^\infty(A)}\big(I(\rho)|E^s B|(A) + |D^s\cdot B|(A)\big) \quad \textit{per ogni aperto } A \subset\subset \Omega.$$

Dim. (i) Sia $A \subset\subset \Omega$ e sia $\epsilon < \mathrm{dist}(A,\partial\Omega)$. Innanzitutto verifichiamo che

$$T_\epsilon = r_\epsilon \mathscr{L}^d - w*\rho_\epsilon D\cdot B \qquad \text{in } A,$$

dove

$$r_\epsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^d} w(y)[(B(x)-B(y))\cdot\nabla\rho_\epsilon(y-x)] \, dy. \tag{8.12}$$

Infatti, per ogni funzione test $\varphi \in C_c^\infty(A)$ abbiamo che $\langle T_\epsilon, \varphi\rangle$ è uguale a

$$\begin{aligned}
& -\int_{\mathbb{R}^d} wB\cdot\nabla\rho_\epsilon * \varphi\, dy - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi B\cdot\nabla\rho_\epsilon * w\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} w*\rho_\epsilon\varphi\, dD\cdot B\\
= & -\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} w(y)B(y)\cdot\nabla\rho_\epsilon(y-x)\varphi(x)\, dxdy\\
- & \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} B(x)\nabla\rho_\epsilon(x-y)w(y)\varphi(x)\, dydx - \int_{\mathbb{R}^d} w*\rho_\epsilon\varphi\, dD\cdot B\\
= & \int_{\mathbb{R}^d} r_\epsilon\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} w*\rho_\epsilon\varphi\, dD\cdot B
\end{aligned}$$

(nell'ultima uguaglianza sfruttiamo la disparità di $\nabla\rho_\epsilon$). Ora utilizzando il fatto che $\rho(z) = h(|z|)$ otteniamo

$$r_\epsilon(x) = \epsilon^{-1-d}\int_{\mathbb{R}^d} w(y)\frac{(B(x)-B(y))\cdot(y-x)}{|y-x|}h'\left(\frac{|y-x|}{\epsilon}\right)\, dy$$

e cambiando variabile abbiamo

$$r_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(x-\epsilon z)\frac{(B(x-\epsilon z)-B(x))\cdot z}{\epsilon|z|}h'(|z|)\, dz. \tag{8.13}$$

Infine, integrando su A, grazie alla (8.1) otteniamo la stima uniforme L^1 su A per $\epsilon\downarrow 0$.
(ii) Sia σ un punto limite delle distribuzioni $|T_\epsilon|$, lungo una qualche successione ϵ_i, e consideriamo un aperto $A\subset\subset\Omega$. Grazie al Teorema di Riesz e al punto (i) sappiamo che σ è una misura con variazione totale localmente finita in Ω. Data $\varphi\in C_c^\infty(A)$ con $0\le\varphi\le 1$ abbiamo che $\langle\sigma,\varphi\rangle$ è uguale a (con la notazione $w_i = w*\rho_{\epsilon_i}$)

$$\lim_{i\to\infty}\langle|r_{\epsilon_i} - w_i\mathrm{div}\, B|\mathscr{L}^d,\varphi\rangle + \langle|w_iD^s\cdot B|,\varphi\rangle.$$

Il secondo termine può essere stimato uniformemente con $\|w\|_{L^\infty(A)}|D^s\cdot B|(A)$ per i sufficientemente grande. Il primo termine può essere stimato, usando (8.12) e la Proposizione 8.2, come segue

$$\begin{aligned}
& \limsup_{i\to\infty}\int_A\varphi(x)\left|\int_{\mathbb{R}^d} w(x-\epsilon_i z)\frac{(B(x-\epsilon_i z)-B(x))\cdot z}{\epsilon_i\,|z|}\,h'(|z|) - w_i(x)\,\mathrm{div}\,\mathrm{B}(x)\right|\, dzdx\\
\le\ & \limsup_{i\to\infty}\int_A\varphi(x)\left|\int_{\mathbb{R}^d} B^1_{\epsilon_i}(-z)w(x-\epsilon_i z)h'(|z|) - w(x)\mathrm{div}\, B(x)\right|\, dz\, dx\\
+\ & \limsup_{i\to\infty}\int_A\varphi(x)\left|\int_{\mathbb{R}^d} B^2_{\epsilon_i}(-z)w(x-\epsilon_i z)h'(|z|)\, dz\right|\, dx.
\end{aligned}$$

Il primo limite superiore è uguale a 0 perché

$$w(x-\epsilon_i z)B^1_{\epsilon_i}(-z)(x) \longrightarrow w(x)\langle \mathscr{E}B(x)(-z), \frac{z}{|z|}\rangle \quad \text{fortemente in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

(grazie alla convergenza forte in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ di $B^1_{\epsilon_i}(-z)$ in (8.2) e alla continuità forte delle traslazioni in L^1_{loc}), quindi il limite è uguale a

$$\int_A \left|\varphi(x)w(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\langle \mathscr{E}B(x)(-z), \frac{z}{|z|}\rangle h'(|z|)dz - \operatorname{div} B(x)\right)\right| dx = 0,$$

usando il fatto che

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d}\langle \mathscr{E}B(x)z, \frac{z}{|z|}\rangle h'(|z|)dz = \int_{\mathbb{R}^d}\langle \mathscr{E}B(x)z, \nabla\rho(z)\rangle\, dz \\ = \; & -\int_{\mathbb{R}^d}\rho(z)\operatorname{div}(\mathscr{E}B(x)z)dz = -\text{traccia } \mathscr{E}B(x) = -\operatorname{div} B(x). \end{aligned}$$

Il secondo limite superiore può essere stimato con $I(\rho)\,\|w\|_{L^\infty(A)}\,|E^sB|\,(A)$ usando la (8.3). Dato che φ è arbitraria otteniamo che

$$\sigma(A) \le \|w\|_{L^\infty(A)}\big(I(\rho)\,|E^sB|\,(A) + |D^s\cdot B|(A)\big),$$

e quindi la stima della tesi. □

8.2 Chain–rule per tracce su ipersuperfici

In questa sezione supponiamo che $C \in \mathcal{M}_\infty(\Omega)$ abbia la forma wB, dove

$$w:\Omega\to\mathbb{R}\,, \qquad B:\Omega\to\mathbb{R}^d$$

sono localmente limitati, con $B \in BD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Innanzitutto mostriamo che questa classe di campi vettoriali è stabile per “rinormalizzazione” della componente scalare w.

Lemma 8.4 (Rinormalizzazione debole). *Nelle ipotesi appena descritte, abbiamo che $h(w)B \in \mathcal{M}_\infty(\Omega)$ per ogni $h \in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre, per ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ abbiamo*

$$\begin{aligned} |D\cdot(h(w)B)| \;\le\; & \sup_{t\in[-M,M]}|h'(t)|\,(MI(\rho)|E^sB| + M|D^s\cdot B| + |D\cdot(wB)|) \\ & + \sup_{t\in[-M,M]}|th'(t)-h(t)||D\cdot B| \qquad \text{in } \Omega', \end{aligned}$$

con $M = \|w\|_{L^\infty(\Omega')}$ e $I(\rho)$ definito nella (8.11).

DIM. Sia T_ϵ definito come in (8.10) con $w_\epsilon = w * \rho_\epsilon$, in modo che

$$T_\epsilon = (D \cdot (Bw)) * \rho_\epsilon - B \cdot \nabla w_\epsilon \mathscr{L}^d - w_\epsilon D \cdot B.$$

Moltiplicando per $h'(w_\epsilon)$ da entrambe le parti otteniamo

$$D \cdot (h(w_\epsilon)B) = h'(w_\epsilon)\,(D \cdot (Bw)) * \rho_\epsilon + (h(w_\epsilon) - h'(w_\epsilon)w_\epsilon)D \cdot B - h'(w_\epsilon)T_\epsilon. \quad (8.14)$$

Passando al limite per $\epsilon \downarrow 0$ otteniamo la tesi, grazie al Teorema 8.3(ii). □

Ricordiamo un caso particolare del teorema di Gagliargo (si veda il lavoro originale [39] per il caso generale) relativo all'operatore di traccia in spazi di Sobolev.

Teorema 8.5 (di Gagliardo nel caso $W^{1,1}$). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto con frontiera lipschitziana e sia $\psi \in L^1(\partial\Omega, \mathscr{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega)$. Allora esiste una funzione $\Psi \in W^{1,1}(\Omega, \mathscr{L}^d \llcorner \Omega)$ la cui traccia su $\partial\Omega$ coincide con ψ.*

Nel seguente teorema mostriamo una formula di cambiamento di variabile per le tracce normali. A causa delle non–linearità considerate, la dimostrazione non può essere ottenuta sfruttando solo la continuità debole* dell'operatore di traccia. La prova richiederà un opportuno argomento di estensione, basato sul teorema di Gagliardo, e la stima quantitativa del Lemma 8.4.

Teorema 8.6 (Cambiamento di variabile per le tracce). *Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ un dominio aperto con bordo di classe C^1 e sia $C \in \mathcal{M}_\infty(\Omega)$ della forma $C = wB$, con w e B localmente limitati in Ω e $B \in BD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Allora, se $h \in C^1(\mathbb{R})$, abbiamo*

$$\mathrm{Tr}(h(w)B, \partial\Omega') = h\left(\frac{\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')}{\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')}\right)\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega') \qquad \mathscr{H}^{d-1}\text{-}\textit{quasi ovunque su } \partial\Omega',$$

dove il rapporto $\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')/\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')$ è arbitrariamente definito nei punti in cui la traccia $\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')$ si annulla.

DIM. Non è restrittivo supporre che l'aperto più grande Ω sia limitato ed abbia frontiera di classe C^1.
PASSO 1. Poniamo $\Omega'' = \Omega \setminus \overline{\Omega'}$. In questo primo passo mostriamo che

$$\mathrm{Tr}(h(w)B, \partial\Omega'') = h\left(\frac{\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega'')}{\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega'')}\right)\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega'') \quad \mathscr{H}^{d-1}\text{-quasi ovunque su } \partial\Omega'',$$

nell'ipotesi che tutte le componenti di B e w siano limitate e appartengano allo spazio di Sobolev $W^{1,1}(\Omega'')$. L'identità è immediata se w e B sono continui fin sul bordo, e la dimostrazione nel caso generale si ottiene immediatamente con un argomento di densità basato sulla continuità forte dell'operatore di traccia da $W^{1,1}(\Omega'')$ in $L^1(\partial\Omega'', \mathscr{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega'')$ (si veda il Teorema 2.24).

PASSO 2. Mostriamo il caso generale. Applichiamo il teorema di Gagliardo sulla surgettività dell'operatore di traccia da $W^{1,1}$ in L^1 ottenendo un campo vettoriale limitato $B_1 \in [W^{1,1}(\Omega'')]^d$ la cui traccia (componente per componente) su $\partial\Omega' \subset \partial\Omega''$ coincide con la traccia di B, visto come funzione in $BD(\Omega')$. In particolare $\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega') = -\mathrm{Tr}(B_1, \partial\Omega'')$ su $\partial\Omega'$. Definendo

$$\tilde{B}(x) := \begin{cases} B(x) & \text{se } x \in \Omega' \\ B_1(x) & \text{se } x \in \Omega'', \end{cases}$$

otteniamo che $\tilde{B} \in BD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per quanto visto nella Sezione 2.7 e, ricordando che

$$EB \llcorner F = (B^+ - B^-) \odot \nu_B \mathscr{H}^{d-1} \llcorner F \cap J_B$$

per ogni insieme numerabilmente $\mathscr{H}^{d-1}$-rettificabile F (formula (2.1)), abbiamo

$$|E\tilde{B}|(\partial\Omega') = 0. \tag{8.15}$$

Ora consideriamo la funzione $\theta := \mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')/\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')$ (posta uguale a 0 nei punti in cui si annulla il denominatore) e mostriamo che $\|\theta\|_{L^\infty(\partial\Omega')}$ è minore di $\|w\|_{L^\infty(\Omega')}$. Infatti, scrivendo $\partial\Omega'$ come l'insieme di livello $\{F = 0\}$ di una funzione F di classe C^1 con $|\nabla F| > 0$ su $\partial\Omega'$ e $\{F = t\} \subset \Omega'$ per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t > 0$ sufficientemente piccolo, grazie alla Proposizione 7.6 abbiamo

$$-\|w\|_{L^\infty(\Omega')}\mathrm{Tr}(B, \partial\{F > t\}) \leq \mathrm{Tr}(wB, \partial\{F > t\}) \leq \|w\|_{L^\infty(\Omega')}\mathrm{Tr}(B, \partial\{F > t\})$$

$\mathscr{H}^{d-1}$-quasi ovunque su $\{F = t\}$. Passando al limite per $t \downarrow 0$ e usando il Teorema 7.7 otteniamo la stessa disuguaglianza su $\{F = 0\}$, il che prova la limitatezza di θ.

Ora, applicando nuovamente il teorema di Gagliardo, possiamo trovare una funzione limitata $w_1 \in W^{1,1}(\Omega'')$ la cui traccia su $\partial\Omega'$ è data da θ, e quindi la traccia normale di $w_1 B_1$ su $\partial\Omega''$ è uguale a $-\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')$ su tutto $\partial\Omega'$. Definendo

$$\tilde{w}(x) := \begin{cases} w(x) & \text{se } x \in \Omega' \\ w_1(x) & \text{se } x \in \Omega'', \end{cases}$$

grazie alla Proposizione 7.4 otteniamo

$$|D \cdot (\tilde{w}\tilde{B})|(\partial\Omega') = 0. \tag{8.16}$$

Applicando ora il Lemma 8.4 e le formule (8.15) e (8.16), otteniamo che la divergenza del campo vettoriale $h(\tilde{w})\widetilde{B}$ è una misura con variazione totale finita in Ω, la cui restrizione a $\partial\Omega'$ è nulla. Di conseguenza la Proposizione 7.4 dà

$$\mathrm{Tr}^+(h(\tilde{w})\tilde{B}, \partial\Omega') = \mathrm{Tr}^-(h(\tilde{w})\tilde{B}, \partial\Omega') \qquad \mathscr{H}^{d-1}\text{-quasi ovunque su } \partial\Omega'. \tag{8.17}$$

Applicando (8.17), il passo 1, e infine sfruttando la nostra scelta di B_1 e w_1, otteniamo la seguente catena di uguaglianze, $\mathscr{H}^{d-1}$-quasi ovunque su $\partial\Omega'$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(h(w)B,\partial\Omega') &= \mathrm{Tr}^-(h(\tilde{w})\tilde{B},\partial\Omega') = \mathrm{Tr}^+(h(\tilde{w})\tilde{B},\partial\Omega') \\ &= -\mathrm{Tr}(h(w_1)B_1,\partial\Omega'') = -h\left(\frac{\mathrm{Tr}(w_1B_1,\partial\Omega'')}{\mathrm{Tr}(B_1,\partial\Omega'')}\right)\mathrm{Tr}(B_1,\partial\Omega'') \\ &= h\left(\frac{\mathrm{Tr}(wB,\partial\Omega')}{\mathrm{Tr}(B,\partial\Omega')}\right)\mathrm{Tr}(B,\partial\Omega').\end{aligned}$$

□

8.3 Rinormalizzazione in SBD

In questa sezione mostriamo che ogni soluzione distribuzionale dell'equazione del trasporto $B\cdot\nabla w = c\mathscr{L}^d$ è una soluzione rinormalizzata, nel caso in cui il campo vettoriale B appartenga a $SBD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $D\cdot B \ll \mathscr{L}^d$.

Teorema 8.7 (Rinormalizzazione in SBD). *Sia $B\in SBD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ un campo vettoriale localmente limitato con $D\cdot B\ll\mathscr{L}^d$. Se w è una funzione localmente limitata che soddisfa $D\cdot(wB)\ll\mathscr{L}^d$, allora*

$$D\cdot(h(w)B) = (h(w)-wh'(w))D\cdot B + h'(w)D\cdot(wB)$$

per ogni $h\in C^1(\mathbb{R})$.

DIM. Passando al limite per $\epsilon\downarrow 0$ nella (8.14) del Lemma 8.4 e sfruttando il Teorema 8.3(ii) otteniamo

$$D\cdot(h(w)B) = (h(w)-wh'(w))D\cdot B + h'(w)D\cdot(wB) + \sigma$$

per una qualche misura σ assolutamente continua rispetto a $|E^sB|$. Grazie all'ipotesi SBD la misura $|E^sB|$ è concentrata su un insieme numerabilmente $\mathscr{H}^{d-1}$-rettificabile Σ. Quindi, è sufficiente mostrare che $D\cdot(h(w)B)\llcorner\Sigma = 0$.

Per la rettificabilità di Σ, possiamo coprire $\mathscr{H}^{d-1}$-quasi tutto Σ con insiemi compatti K_i, ognuno contenuto in un'ipersuperficie orientata di classe C^1 della forma $\partial\Omega_i$. Ricordando la prima parte della Proposizione 7.4, è sufficiente mostrare che $D\cdot(h(w)B)\llcorner\partial\Omega_i = 0$ per ogni i. Dato che le divergenze di B e di wB sono assolutamente continue rispetto a $\mathscr{L}^d$, la seconda parte della Proposizione 7.4 dà

$$\mathrm{Tr}^+(B,\partial\Omega_i) = \mathrm{Tr}^-(B,\partial\Omega_i) \quad \text{e} \quad \mathrm{Tr}^+(wB,\partial\Omega_i) = \mathrm{Tr}^-(wB,\partial\Omega_i)$$

$\mathscr{H}^{d-1}$-quasi ovunque in $\partial\Omega_i$, e quindi per la formula di cambiamento di variabile per le tracce si ha

$$\mathrm{Tr}^+(h(w)B, \partial\Omega_i) = \mathrm{Tr}^-(h(w)B, \partial\Omega_i).$$

Sempre grazie alla Proposizione 7.4 otteniamo infine che $D \cdot (h(w)B) \llcorner \partial\Omega_i = 0$. $\square$

Ricordando il contesto del Capitolo 5, grazie all'ipotesi di assoluta continuità della divergenza possiamo leggere la proprietà di rinormalizzazione nella forma più espressiva

$$B \cdot \nabla w = c\mathscr{L}^d \quad \Rightarrow \quad B \cdot \nabla(h(w)) = ch'(w)\mathscr{L}^d \qquad \text{per ogni } h \in C^1(\mathbb{R}).$$

Osserviamo che, nel caso generale $B \in BD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $D \cdot B \ll \mathscr{L}^d$, l'argomento precedente dà comunque che la parte assolutamente continua di $B \cdot \nabla(h(w))$ è $h'(w)B \cdot \nabla w$ e che $B \cdot \nabla(h(w)) \llcorner \Sigma = 0$ per ogni insieme Σ numerabilmente $\mathscr{H}^{d-1}$-rettificabile, ma queste informazioni non sono sufficienti per concludere, in quanto $B \cdot \nabla(h(w))$ potrebbe a priori avere una parte cantoriana, né assolutamente continua rispetto a $\mathscr{L}^d$, né concentrata su insiemi rettificabili.

Avendo dimostrato la proprietà di rinormalizzazione, seguono immediatamente tutti i teoremi relativi sia all'equazione del trasporto sia all'equazione ordinaria dimostrati in [7] nel caso BV, in particolare i Teoremi 5.10, 6.10, 6.12 e 6.13. Le relative dimostrazioni sono del tutto analoghe a quelle date nel caso BV, adattando le ipotesi al nuovo contesto. Per maggiori dettagli si può comunque vedere la Sezione 5 di [10].

Capitolo 9

Controesempi e problemi aperti

La questione dell'ottimalità delle ipotesi sotto cui valga il lemma di rinormalizzazione non è per nulla chiara. Data la non linearità rispetto al campo della condizione di rinormalizzazione, è possibile che le condizioni ottimali siano molto lontane da quelle attualmente raggiunte. Nelle prime due sezioni di questo capitolo presentiamo alcuni controesempi all'unicità del flusso e alla proprietà di rinormalizzazione, tratti dall'articolo di DiPerna e Lions e da un lavoro di N. Depauw ([31]). Altri controesempi possono essere trovati in [1], in [27] e (anche se nel contesto delle leggi di conservazione) in [21]. Si possono produrre tre "classi" di controesempi, indebolendo le ipotesi relative a:

- regolarità del campo vettoriale
- limitatezza della divergenza
- classi di soluzioni in cui cercare l'unicità.

Anche questo fatto indica come sia molto difficile affrontare la questione dell'ottimalità, data l'indipendenza delle tre condizioni.

Nelle ultime due sezioni descriviamo alcuni problemi aperti, il primo relativo alla rinormalizzazione per campi vettoriali con regolarità parziale, il secondo (noto come *congettura di Bressan*, si veda [21]) riguardante una proprietà di compattezza per i flussi.

Segnaliamo infine che l'estensione della teoria di DiPerna e Lions a campi vettoriali con minore regolarità ha avuto notevoli applicazioni, ad esempio nello studio delle leggi di conservazione ([11] e [8]) e del sistema semigeostrofico ([28]).

9.1 Due controesempi di DiPerna e Lions

Cominciamo con il descrivere due controesempi contenuti nel lavoro di DiPerna e Lions che mostrano la necessità di qualche regolarità del campo vettoriale e della limitatezza della divergenza, al fine di ottenere l'unicità del flusso nel senso della Sezione III di [32].

Campi vettoriali $W^{1,p}$ con divergenza illimitata

Fissato $p < \infty$, costruiamo un campo vettoriale autonomo b in $\mathbb{R}^2$, limitato, uniformemente continuo, appartenente a $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ e tale che l'equazione ordinaria ammetta infinite soluzioni, tutte continue e verificanti la proprietà di semigruppo (si veda la Sezione 6.3).

Sia $K \subset [0,1]$ un insieme compatto con parte interna vuota e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $0 \le g < 1$ su $\mathbb{R}$ e $g(x) = 0$ se e solo se $x \in K$. Poniamo inoltre $f(x) = \int_0^x g(t)dt$. Indichiamo con M l'insieme delle misure finite, positive e non atomiche su K e, per ogni misura $m \in M$, definiamo una funzione f_m su $\mathbb{R}$ in modo che

$$f_m(x + m([0,x])) = f(x) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Infine introduciamo

$$b(x^1,x^2) = (1, f'(f^{-1}(x^2)))\,, \qquad X_m(t,x^1,x^2) = (x^1 + t, f_m(t + f_m^{-1}(x^2))).$$

Osserviamo che, poiché f e f_m sono strettamente crescenti, b e X_m sono ben definiti e continui in tutte le loro variabili. Inoltre si verifica facilmente in base alla definizione di X_m che la proprietà di semigruppo del flusso è soddisfatta.

Vogliamo mostrare che X_m è differenziabile rispetto a t (o equivalentemente che f_m è differenziabile in $\mathbb{R}$) e che vale l'identità

$$f'_m(t + f_m^{-1}(x^2)) = f'_m(f_m^{-1}(X_m^2)) = f'(f^{-1}(X_m^2)). \tag{9.1}$$

Da ciò seguirà che, per ogni $m \in M$, la mappa X_m è un flusso per il campo b. Per ogni $z \in \mathbb{R}$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$x + m([0,x]) = z.$$

Mostriamo che per ogni $z \in \mathbb{R}$ vale

$$f'_m(z) = f'(x) = f'(f^{-1}(f_m(z))). \tag{9.2}$$

Ciò sarà sufficiente per ottenere (9.1), grazie all'arbitrarietà di z.

Se $x \notin K$ allora per s abbastanza vicino a z abbiamo

$$(x+s-z)+m([0,x+s-z])=s,$$

dato che il complementare di K è aperto. Ne segue che f_m è differenziabile in z e che $f'_m(z)=f'(x)$, quindi si ottiene (9.2).

Se invece $x \in K$ e s è abbastanza vicino a z, denotando con $x(s)$ l'unica soluzione di

$$x(s)+m([0,x(s)])=s,$$

osserviamo che

$$|x(s)-x| \leq |s-z|.$$

Quindi abbiamo che

$$|f_m(s)-f_m(z)|=|f(x(s))-f(x)| \leq C|x(s)-x|^2 \leq C|s-z|^2,$$

dato che $f'(x)=0$. Quindi $f'_m(z)=0=f'(x)$ e dunque otteniamo ancora (9.2).

Rimane solo da mostrare che g può essere scelta in modo che $b \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ per un arbitrario $p<\infty$. Chiaramente basta mostrare che $F(t)=f'(f^{-1}(t)) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Osserviamo che

$$F'(t)=g'(f^{-1}(t))[g(f^{-1}(t))]^{-1}$$

e quindi, supponendo ad esempio che $g(t)$ converga a 1 per $|t| \to \infty$ in modo che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sia bigettiva, otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}} |F'(t)|^p\,dt = \int_{\mathbb{R}} |g'(f^{-1}(t))|^p\,|g(f^{-1}(t))|^{-p}\,dt = \int_{\mathbb{R}} |g'(s)|^p\,|g(s)|^{-(p-1)}\,ds.$$

Quindi è sufficiente trovare una funzione g che renda l'ultimo integrale finito. Scegliamo g_0 che soddisfi tutte le proprietà precedentemente richieste per g e quindi poniamo $g=g_0^p$. Dato che con questa scelta si ha $|g|^{-(p-1)}|g'|^p = p^p|g'_0|^p$, per concludere è sufficiente scegliere g_0 tale che $g'_0 \in L^p(\mathbb{R})$.

Poiché $\mathrm{div}b=g'(f^{-1}(x^2))[g(f^{-1}(x^2))]^{-1}$, la divergenza (distribuzionale) del campo vettoriale b non è una funzione L^∞, neppure localmente, su $\mathbb{R}^2$. Osserviamo però che la misura immagine di $\mathscr{L}^2$ tramite il flusso può avere delle concentrazioni: infatti la non unicità del flusso deriva dal fatto che le traiettorie si possono "fermare" per un tempo arbitrario in alcuni punti, dando così luogo a misure non assolutamente continue.

Campi vettoriali con divergenza nulla senza derivate prime integrabili

In questa sezione diamo un esempio di un campo vettoriale autonomo b su $\mathbb{R}^2$ tale che

$$\mathrm{div}b=0 \ \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)\,, \qquad b \in W^{s,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) \ \text{ per ogni } s \in [0,1[\,,$$

$$b \in L^p(\mathbb{R}^2) + L^\infty(\mathbb{R}^2) \text{ per ogni } p \in [1,2[,$$

per il quale esistono due distinti flussi che risolvono l'equazione ordinaria e preservano la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ (per la definizione di $W^{s,1}$ si veda ad esempio [2]).

In $\mathbb{R}^2$ i campi vettoriali con divergenza nulla corrispondono a sistemi hamiltoniani. Consideriamo dunque

$$H(x) = \begin{cases} -x^1/|x^2| & \text{se } |x^1| < |x^2| \\ -(x^1 - |x^2| + 1) & \text{se } x^1 > |x^2| \\ -(x^1 + |x^2| - 1) & \text{se } x^1 < -|x^2|. \end{cases}$$

Il campo vettoriale b è allora dato da

$$\begin{cases} b_1(x^1,x^2) = -\dfrac{\partial H}{\partial x^2} = -\mathrm{sgn}(x^2)\left(\dfrac{x^1}{|x^2|^2}\chi_{|x^1|\le|x^2|} + \mathrm{sgn}(x^1)\chi_{|x^1|>|x^2|}\right) \\ b_2(x^1,x^2) = \dfrac{\partial H}{\partial x^1} = -\left(\dfrac{1}{|x^2|}\chi_{|x^1|\le|x^2|} + \chi_{|x^1|>|x^2|}\right). \end{cases}$$

Si può verificare che $b \in W^{s,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ osservando che b è localmente sommabile su $\mathbb{R}^2$, che $b \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e che la variazione totale della derivata di b su $\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta$ cresce logaritmicamente per $\delta \to 0$. Il fatto che b sia a divergenza nulla deriva direttamente dalla struttura hamiltoniana, mentre l'appartenenza a $L^p + L^\infty$ per ogni $p \in [1,2[$ è chiara dalla scrittura esplicita del campo.

Data una condizione iniziale $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ definiamo due differenti flussi $X(t,x_0)$ e $Y(t,x_0)$ dell'equazione ordinaria. Grazie a considerazioni di simmetria e al fatto che dobbiamo definire i flussi solo quasi ovunque, è sufficiente definire X e Y al variare del dato iniziale in

$$Q = \{x_0 \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_0^1 > 0\,, \quad x_0^2 > 0\,, \quad x_0^1 \neq x_0^2\}.$$

Se $x_0^1 > x_0^2$ poniamo

$$\begin{cases} X^1 = Y^1 = \begin{cases} x_0^1 - t & \text{se } t \le x_0^2 \\ x_0^1 - 2x_0^2 + t & \text{se } t \ge x_0^2 \end{cases} \\ X^2 = Y^2 = x_0^2 - t. \end{cases}$$

Se invece $x_0^1 < x_0^2$ poniamo

$$\begin{cases} X^1 = \dfrac{x_0^1}{x_0^2}|(x_0^2)^2 - 2t|^{1/2} \\ X^2 = \sigma|(x_0^2)^2 - 2t|^{1/2} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Y^1 = \sigma \dfrac{x_0^1}{x_0^2} |(x_0^2)^2 - 2t|^{1/2} \\ Y^2 = \sigma |(x_0^2)^2 - 2t|^{1/2}, \end{cases}$$

dove $\sigma = 1$ se $t \leq \dfrac{1}{2}(x_0^2)^2$, $\sigma = -1$ se $t \geq \dfrac{1}{2}(x_0^2)^2$.

Osserviamo che i flussi X e Y sono continui nella variabile temporale ed appartengono a $W^{1,p}(-T,T)$ per ogni $T < \infty$ e per ogni $p < 2$. Essi sono regolari, risolvono l'equazione ordinaria e sono tali che $b(X)$ e $b(Y)$ siano continui rispetto al tempo tranne che per un valore di t. Inoltre entrambi preservano la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^2$ e soddisfano la proprietà di semigruppo.

9.2 Un campo vettoriale quasi BV

In [31] N. Depauw costruisce un esempio che mostra l'"ottimalità" del teorema di Colombini e Lerner (Teorema 4.15). In particolare viene costruito un campo vettoriale "quasi BV" tale che l'equazione del trasporto associata ammette più di una soluzione. Questa costruzione dà anche un esempio esplicito di un campo per cui entrambi i membri dell'equazione rinormalizzata (3.14) abbiamo senso come distribuzioni, pur essendo diversi tra loro.

Consideriamo l'equazione del trasporto

$$\partial_t u + a(t,x) \cdot \partial_x u = 0 \qquad t \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R}^2. \tag{9.3}$$

Come campo vettoriale scegliamo

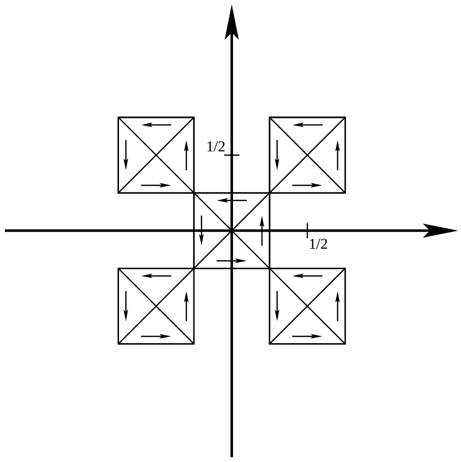
$$a(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ oppure } t > 1 \\ b(2^j x) & \text{se } t \in I_j = 2^{-j}(\frac{1}{2}, 1) \text{ per qualche } j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

dove $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale autonomo, limitato, a divergenza nulla e $\mathbb{Z}^2$-periodico. Quindi anche a sarà limitato e a divergenza nulla.

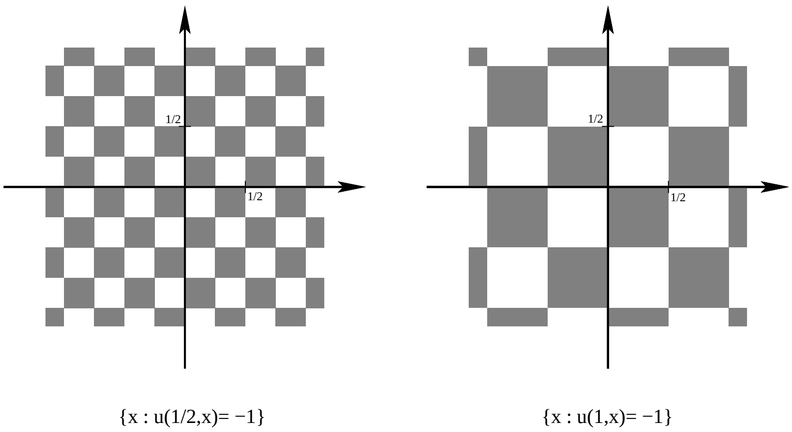
Descriviamo b per mezzo del suo flusso. Sia u_0 la funzione $\mathbb{Z}^2$-periodica definita da $u_0(x) = \operatorname{sgn}(x_1 x_2)$ su $Q = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$, posta uguale a zero sull'insieme di misura nulla dei punti (x_1, x_2) tali che x_1 o x_2 appartenga a $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j}\mathbb{Z}$. Poniamo inoltre $u_1(x) = -u_0(2x)$. Allora il flusso $X^{(b)}$ del campo b è tale che

$$u_1\Big(X^{(b)}\Big(\frac{1}{2}, 1, x\Big)\Big) = u_0(x).$$

Rimandiamo all'articolo di Depauw per i dettagli relativi alla definizione di b, limitandoci a descrivere il suo flusso per mezzo di qualche figura. Per $\frac{1}{2} < t < 1$ il campo vettoriale a (che per tali tempi coincide con b) è quello nella prima figura.



Considerando in ogni quadratino delle coordinate "polari" (ρ, θ) con $\rho(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ e $\theta(x)$ appartenente al bordo del quadrato $\{\rho < 1\}$, possiamo descrivere il flusso di b (in ogni quadratino) come una "rotazione": $(\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + 4t)$. L'effetto del campo sulla funzione u_0 è rappresentato nella seconda figura: l'azione del flusso riduce di un fattore due la scala di oscillazione della funzione.



Per ogni $t > 0$ la mappa $x \mapsto X^{(a)}(t, 1, x)$ è una bigezione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che conserva la misura di Lebesgue. Inoltre, se definiamo $u_j(x) = (-1)^j u_0(2^j x)$, abbiamo

$$u_j\big(X^{(a)}\big(t_j, 1, x\big)\big) = u_0(x),$$

dove $t_j = 2^{-j}$. La mappa $x \mapsto X^{(a)}(0, 1, x)$ non è bigettiva, ma conserva comunque la misura di Lebesgue.

Definiamo ora $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in modo che

$$u\big(t, X^{(a)}\big(t, 1, x\big)\big) = u_0(x)$$

per $t > 0$ e $u(t, y) = 0$ per $t < 0$. Proviamo che u è soluzione debole di (9.3): data $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$, dobbiamo mostrare che

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} -\big(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi\big) u \, dxdt = 0, \tag{9.4}$$

essendo a un campo a divergenza nulla. Poiché $u(t, y) = 0$ se $t < 0$ possiamo considerare solo l'integrale su $\{t > 0\}$; essendo a e u sono limitati e $\phi \in C_c^\infty$, l'integrale su $\{t > 0\}$ è il limite per $\tau \to 0^+$ dell'integrale su $\{t > \tau\}$. Per $t > 0$ fissato si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} -\big(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi\big)(t, x) u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} -\big(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi\big)\big(t, X^{(a)}(t, 1, x)\big) u_0(x) dx,$$

dato che $x \mapsto X^{(a)}(t, 1, x)$ è una bigezione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che conserva la misura di Lebesgue. Scambiando gli integrali in x e in t ed osservando che l'applicazione $t \mapsto \phi\big(t, X^{(a)}(t, 1, x)\big)$ è lipschitziana su $\{t > 0\}$ con derivata $\big(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi\big)\big(t, X^{(a)}(t, 1, x)\big)$, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi\big(\tau, X^{(a)}(\tau, 1, x)\big) u_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\tau, x) u(\tau, x) dx.$$

Sfruttando il teorema della convergenza dominata si verifica facilmente che questo integrale è continuo in τ. Inoltre, grazie all'espressione a secondo membro, si ricava che l'integrale converge a zero se $\tau \to 0^+$ e quindi si ottiene la (9.4). Pertanto si è costruita una funzione u limitata, non nulla, supportata in $\{t \geq 0\}$ che sia soluzione di (9.3). Visto che anche la funzione identicamente nulla è soluzione, per tale equazione non vale il risultato di unicità di Colombini e Lerner. Inoltre, poiché

$$|u| = u^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

si ha anche che

$$\partial_t \beta(u) + a \cdot \partial_x \beta(u) \neq \beta'(u)(\partial_t u + a \cdot \partial_x u) = 0$$

per $\beta(s) = s^2$ o $\beta(s) = |s|$, nonostante entrambi i membri abbiano un senso come distribuzioni. Osserviamo che il campo vettoriale a non soddisfa le ipotesi del teorema di Colombini e Lerner dato che è conormale BV solo fuori dal piano $\{t = 0\}$, che però non è di misura $\mathscr{H}^2$ nulla, anche se localmente finita.

9.3 Campi vettoriali con regolarità parziale

Come anticipato nell'Osservazione 5.8, una questione molto interessante è quella relativa alla rinormalizzazione dell'equazione del trasporto nel caso in cui il campo vettoriale abbia regolarità solo parziale. Recenti sviluppi relativi a questa tematica sono contenuti nei lavori di C. LeBris e P. L. Lions ([42]) e N. Lerner ([43]). Spezziamo il dominio come prodotto, $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1}_{x_1} \times \mathbb{R}^{d_2}_{x_2}$, e consideriamo campi vettoriali della forma

$$B(x_1, x_2) = (b_1(x_1, x_2), b_2(x_1, x_2)),$$

con $b_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ e $b_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$.

In [42] e [43] viene rispettivamente dimostrata la rinormalizzazione nel caso in cui la dipendenza sia (localmente) del tipo

$$\begin{pmatrix} W^{1,1} & \text{costante} \\ \text{misurabile} & W^{1,1} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} BV & \text{costante} \\ \text{misurabile} & BV \end{pmatrix},$$

supponendo di avere un controllo *separato* sulle divergenze $D_{x_1} \cdot b_1$ e $D_{x_2} \cdot b_2$. Il teorema di LeBris e Lions è motivato dalla ricerca di condizioni sotto le quali il flusso sia differenziabile (in senso approssimato) rispetto al dato iniziale. Il sistema di equazioni ordinarie che si ricava, e per il quale si cercano teoremi di stabilità, è proprio del tipo considerato nel loro teorema di rinormalizzazione.

Una congettura molto naturale è la seguente:

Congettura 9.1. *Vale la proprietà di rinormalizzazione anche se il campo b_1 dipende in modo misurabile dalla variabile x_2.*

Altri tentativi potrebbero essere fatti nella direzione della riduzione delle ipotesi sulla divergenza, ma ciò sembra decisamente più complicato (la condizione di controllo separato è essenziale anche solo per dare un senso all'equazione in forma non conservativa).

9.4 Congettura di Bressan

Dallo studio del sistema di leggi di conservazione di Keyfitz e Kranzer (si veda [8])

$$\begin{cases} u_t + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} (f_i(|u|)u)_{x_i} = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

nasce la seguente congettura, strettamente connessa alla teoria delle soluzioni rinormalizzate di DiPerna e Lions.

Congettura 9.2 ([8]). *Siano* $f \in L^\infty \cap BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ *e* $\rho \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ *tali che*

$$\rho \geq c > 0\,, \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + D_x \cdot (\rho f) = 0.$$

Allora ogni soluzione debole limitata w *di*

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + D_x \cdot (\rho f w) = 0$$

è una soluzione rinormalizzata, cioè vale

$$\frac{\partial(\rho \beta(w))}{\partial t} + D_x \cdot (\rho f \beta(w)) = 0$$

per ogni $\beta \in C^1(\mathbb{R})$.

Osservazione 9.3. La proprietà di rinormalizzazione considerata equivale a considerare, analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, un campo vettoriale della forma $B = (\rho, \rho f)$ con ρ poco regolare. Osserviamo anche che la congettura è stata dimostrata in [8] nell'ipotesi che $D_x \cdot f \ll \mathscr{L}^d$.

In [21] A. Bressan ha formulato la seguente congettura, riguardante una proprietà di compattezza per i flussi di campi vettoriali.

Congettura 9.4 (Bressan). *Siano* $b_j : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *campi vettoriali e siano* $\Phi_j : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *i relativi flussi, cioè mappe tali che*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi_j(t,x) = b_j(t, \Phi_j(t,x)) \\ \Phi(0,x) = x. \end{cases}$$

Indichiamo con $J_j(t,x)$ *il determinante jacobiano* $\det \nabla_x \Phi_j(t,x)$. *Supponiamo che*

$$\|b_j\|_\infty + \|\nabla_{t,x} b_j\|_{L^1} \leq C\,, \qquad\qquad \frac{1}{C} \leq J_j \leq C$$

per qualche costante C *indipendente da* j. *Allora* $(\Phi_j)_j$ *è fortemente precompatto in* L^1_{loc}.

Osservazione 9.5. A meno di passare a sottosuccessioni, si può supporre che b_j converga in L^1 a $b \in BV$. Grazie ai teoremi di stabilità di [7], la congettura è vera nell'ipotesi che $D_x \cdot b \ll \mathscr{L}^d$.

Osservazione 9.6. Le due congetture sono strettamente collegate tra di loro: viene infatti mostrato in [8] che la Congettura 9.2 implica la Congettura 9.4.

Bibliografia

[1] M. Aizenman: *On vector fields as generators of flows: a counterexample to Nelson's conjecture.* Ann. Math., **107** (1978), 287–296.

[2] R. A. Adams: *Sobolev spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 65, Academic Press, New York–London, 1975.

[3] G. Alberti: *Rank-one properties for derivatives of functions with bounded variation.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **123** (1993), 239–274.

[4] G. Alberti & L. Ambrosio: *A geometrical approach to monotone functions in* $\mathbb{R}^n$. Math. Z., **230** (1999), 259–316.

[5] G. Alberti & S. Müller: *A new approach to variational problems with multiple scales.* Comm. Pure Appl. Math., **54** (2001), 761–825.

[6] L. Ambrosio: *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superfici Minime.* Appunti dei corsi tenuti da docenti della Scuola Normale Superiore, 1997.

[7] L. Ambrosio: *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields.* Preprint, 2003, di prossima pubblicazione su Inventiones Mathematicae (disponibile su http://cvgmt.sns.it).

[8] L. Ambrosio, F. Bouchut & C. De Lellis: *Well–posedness for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions.* Preprint, 2003 (disponibile su http://cvgmt.sns.it).

[9] L. Ambrosio, A. Coscia & G. Dal Maso: *Fine properties of functions in BD.* Arch. Rat. Mech. Anal., **139** (1997), 201–238.

[10] L. Ambrosio, G. Crippa & S. Maniglia: *Traces and fine properties of a BD class of vector fields and applications.* Preprint, 2004 (disponibile su http://cvgmt.sns.it).

[11] L. AMBROSIO & C. DE LELLIS: *Existence of solutions for a class of hyperbolic systems of conservation laws in several space dimensions.* IMRN, **41** (2003), 2205–2220.

[12] L. AMBROSIO, N. FUSCO & D. PALLARA: *Functions of bounded variation and free discontinuity problems.* Oxford Mathematical Monographs, 2000.

[13] L. AMBROSIO, N. GIGLI & G. SAVARÉ: *Gradient flows in metric spaces and in the Wasserstein space of probability measures.* Di prossima pubblicazione da parte di Birkhäuser.

[14] G. ANZELLOTTI: *Traces of bounded vectorfields and the divergence theorem.* Preprint non pubblicato, 1983.

[15] G. ANZELLOTTI: *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness.* Ann. Mat. Pura App., **135** (1983), 293–318.

[16] G. ANZELLOTTI: *The Euler equation for functionals with linear growth.* Trans. Amer. Mat. Soc., **290** (1985), 483–501.

[17] F. BOUCHUT: *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation.* Arch. Rational Mech. Anal., **157** (2001), 75–90.

[18] F. BOUCHUT, F. GOLSE & M. PULVIRENTI: *Kinetic equations and asymptotic theory.* Series in Appl. Math., Gauthiers–Villars, 2000.

[19] F. BOUCHUT & F. JAMES: *One dimensional transport equation with discontinuous coefficients.* Nonlinear Analysis, **32** (1998), 891–933.

[20] F. BOUCHUT, F. JAMES & S. MANCINI: *Uniqueness and weak stablity for multi-dimensional transport equations with one-sided Lipschitz coefficients.* Preprint, 2004.

[21] A. BRESSAN: *An ill posed Cauchy problem for a hyperbolic system in two space dimensions.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **110** (2003), 103–117.

[22] I. CAPUZZO DOLCETTA & B. PERTHAME: *On some analogy between different approaches to first order PDE's with nonsmooth coefficients.* Adv. Math. Sci. Appl., **6** (1996), 689–703.

[23] G.-Q. CHEN & H. FRID: *Divergence–measure fields and hyperbolic conservation laws.* Arch. Rational Mech. Anal., **147** (1999), 89–118.

[24] G.-Q. CHEN & H. FRID: *Extended divergence-measure fields and the Euler equation of gas dynamics.* Comm. Math. Phys., **236** (2003), 251–280.

[25] F. COLOMBINI & N. LERNER: *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields.* Duke Math. J., **111** (2002), 357–384.

[26] F. COLOMBINI & N. LERNER: *Uniqueness of L^∞ solutions for a class of conormal BV vector fields.* Preprint, 2003.

[27] F. COLOMBINI, T. LUO & J. RAUCH: *Uniqueness and nonuniqueness for non-smooth divergence free transport.* Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, Exp. No. XXII, École Polytech., Palaiseau, 2003.

[28] M. CULLEN & M. FELDMAN: *Lagrangian solutions of semigeostrophic equations in physical space.* In preparazione.

[29] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio a r dimensioni.* Ric. Mat., **4** (1955), 95–113.

[30] E. DE GIORGI & L. AMBROSIO: *Un nuovo funzionale del calcolo delle variazioni.* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (8) Mat. Appl., **82** (1988), 199–210.

[31] N. DEPAUW: *Non–unicité du transport par un champ de vecteurs presque BV.* Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, Exp. No. XIX, École Polytech., Palaiseau, 2003.

[32] R. J. DIPERNA & P. L. LIONS: *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math., **98** (1989), 511–547.

[33] R. J. DIPERNA & P. L. LIONS: *Équations différentielles ordinaires et équations de transport avec des coefficients irréguliers.* Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1988–1989, École Polytech., Palaiseau, 1989

[34] F. EBOBISSE: *Fine properties of functions with bounded deformation and applications in variational problems.* Ph.D. Thesis, University of Pisa, 1999 (disponibile su http://cvgmt.sns.it).

[35] L. C. EVANS: *Partial differential equations.* Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1998.

[36] L. C. EVANS & R. F. GARIEPY: *Lecture notes on measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, 1992.

[37] K. J. FALCONER: *The geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, 1985.

[38] H. Federer: *Geometric measure theory.* Springer, 1969.

[39] E. Gagliardo: *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in più variabili.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **27** (1957), 284–305.

[40] E. Giusti: *Minimal surfaces and functions of bounded variation.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[41] P. Hartman: *Ordinary differential equations.* Birkhäuser, Boston, 1982.

[42] C. LeBris & P. L. Lions: *Renormalized solutions of some transport equations with partially $W^{1,1}$ velocities and applications.* Annali di Matematica, **183** (2004), 97–130.

[43] N. Lerner: *Transport equations with partially BV velocities.* Preprint, 2004.

[44] P. L. Lions: *Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **326** (1998), 833–838.

[45] H. Matthies, G. Strang & E. Christiansen: *The saddle point of a differential program.* Energy methods in finite element analysis, Wiley, Chichester, 1979.

[46] F. Popaud & M. Rascle: *Measure solutions to the liner multidimensional transport equation with non-smooth coefficients.* Comm. PDE, **22** (1997), 337–358.

[47] W. Rudin: *Real and complex analysis.* McGraw–Hill, 1987.

[48] W. Rudin: *Functional analysis.* McGraw–Hill, 1991.

[49] R. Temam: *Problémes mathématiques en plasticité.* Gauthier-Villars, Paris, 1983.

[50] A. I. Vol'pert & S. I. Hudjaev: *Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics.* Martinus Nijhoff Publishers, 1985.

[51] L. C. Young: *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory.* Saunders, 1969.

[52] W. P. Ziemer: *Weakly differentiable functions.* GTM 120, Springer–Verlag, New York, 1989.