Università degli Studi di Pisa
Facoltà di Scienze M.F.N. – Corso di Laurea in Matematica

Sunto della Tesi:

Equazione del trasporto e problema di Cauchy per campi vettoriali debolmente differenziabili

Candidato: Gianluca Crippa (g.crippa@sns.it)
Relatore: prof. Luigi Ambrosio

12 luglio 2004

Lo scopo di questa tesi è lo studio della buona positura dell'equazione del trasporto e dell'equazione differenziale ordinaria per campi vettoriali $b(t,x)$ aventi poca regolarità rispetto alla variabile spaziale x.

Cominciamo con il descrivere in maniera più dettagliata i vari aspetti del problema. Sia $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un campo vettoriale boreliano. Il *problema euleriano* consiste nello studio della buona positura della seguente equazione lineare alle derivate parziali, detta **equazione del trasporto** o **equazione di continuità**:

$$\text{(PDE)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mu_t}{\partial t} + D_x \cdot (b\mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \bar{\mu}\,. \end{cases}$$

Tale equazione è da intendersi nel senso delle distribuzioni su $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ e una soluzione, indicata con μ_t, sarà una famiglia dipendente dal tempo di misure reali su $\mathbb{R}^d$ che al tempo $t = 0$ coincida con $\bar{\mu}$. Questo problema è classicamente collegato al *problema lagrangiano*, riguardante esistenza ed unicità per l'**equazione ordinaria**

$$\text{(ODE)} \qquad \begin{cases} \dot{\psi}(t) = b(t,\psi(t)) \\ \psi(0) = x\,. \end{cases}$$

Per questo problema si può sperare in un'unicità "generica", cioè per $\mathscr{L}^d$-quasi ogni dato iniziale $x \in \mathbb{R}^d$. Una richiesta più debole (alla quale si riuscirà a dare in certi casi una risposta positiva) è quella relativa alla ricerca di un *principio di selezione*, che ci permetta di identificare per quasi ogni x una traiettoria $\psi(\cdot,x)$ in modo che tale scelta sia stabile rispetto ad approssimazioni regolari del campo vettoriale b.

Il setting classico del problema consiste nel considerare il caso in cui $b(t,x)$ sia localmente lipschitziano in x, uniformemente rispetto a t. In questo caso, la buona positura (locale nel tempo) dell'(ODE) è garantita dal *teorema di Cauchy–Lipschitz*, mentre esistenza ed unicità per la (PDE) sono garantite dalla *teoria delle caratteristiche*.

Il primo approccio al problema nel caso in cui il campo sia solo debolmente differenziabile è dovuto a **R. J. DiPerna e P. L. Lions** ([8], 1989), che affrontano il caso in cui la dipendenza dalla variabile spaziale sia di tipo Sobolev. L'ingrediente chiave del lavoro di DiPerna e Lions è l'introduzione del concetto di *soluzione rinormalizzata*, cioè di una soluzione debole dell'equazione del trasporto (limitata, cioè rappresentabile come $\mu_t = w_t \mathscr{L}^d$ con $w_t \in L^\infty$) per cui valga

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b \cdot \nabla_x w = c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \beta(w)}{\partial t} + b \cdot \nabla_x \beta(w) = c\beta'(w)$$

per ogni funzione $\beta \in C^1(\mathbb{R})$. Questa implicazione segue immediatamente dalla formula di derivazione della funzione composta nel caso in cui la soluzione w sia differenziabile in senso classico, ma necessita di una prova diretta nel caso in cui w non sia regolare. Lo *schema di regolarizzazione di DiPerna e Lions* è particolarmente naturale: consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b \cdot \nabla_x w = c$$

e convolviamo entrambi i membri con un nucleo di regolarizzazione ρ_ϵ. Definendo $w_\epsilon = w * \rho_\epsilon$ e moltiplicando l'equazione ottenuta per $\beta'(w_\epsilon)$, con pochi passaggi si ottiene che

$$\frac{\partial \beta(w_\epsilon)}{\partial t} + b \cdot \nabla_x \beta(w_\epsilon) = (c * \rho_\epsilon)\beta'(w_\epsilon) + \beta'(w_\epsilon)\big(b \cdot \nabla_x w_\epsilon - (b \cdot \nabla_x w) * \rho_\epsilon\big).$$

Allora definiamo il *commutatore* (tra l'operatore di convoluzione e quello di moltiplicazione per b)

$$r_\epsilon = b \cdot \nabla_x (w * \rho_\epsilon) - (b \cdot \nabla_x w) * \rho_\epsilon.$$

Data la non–linearità della funzione β, per ottenere l'implicazione desiderata è necessario che il commutatore converga fortemente a zero. Nel caso trattato da DiPerna e Lions, questo si può dedurre dalla scrittura esplicita del commutatore come

$$-r_\epsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(t, x - \epsilon z) \left[\frac{b(t, x - \epsilon z) - b(t,x)}{\epsilon} \cdot \nabla \rho_\epsilon(z) \right] dz - (w \mathrm{div}_x b) * \rho_\epsilon(t,x)$$

e dal fatto che i rapporti incrementali di una funzione di Sobolev convergono fortemente alla derivata.

La proprietà di rinormalizzazione è molto importante, dato che da essa segue in modo molto naturale un *principio di confronto* per le soluzioni della (PDE). Questo principio garantisce che, se consideriamo due dati iniziali w_0 e $\widetilde{w}_0$ per l'equazione del trasporto con $w_0 \leq \widetilde{w}_0$, le relative soluzioni soddisfano la disuguaglianza $w_t \leq \widetilde{w}_t$ per ogni $t \in [0,T]$. Dal principio del confronto seguono l'*unicità* per le soluzioni dell'equazione del trasporto e teoremi di *stabilità* rispetto ad approssimazioni regolari del campo vettoriale e del dato iniziale. Inoltre, già nel lavoro di DiPerna e Lions è ben illustrato il passaggio dalla (PDE) alla (ODE): per regolarizzazione del campo vettoriale, ricordando la teoria delle caratteristiche nel caso classico ed applicando il teorema di stabilità, si ottiene l'esistenza di una soluzione distribuzionale dell'(ODE). Inoltre, grazie al risultato di unicità per la (PDE), viene dedotta l'unicità del flusso dell'equazione ordinaria.

Successivamente, **I. Capuzzo Dolcetta e B. Perthame** ([6], 1996) hanno esteso il risultato di DiPerna e Lions, mostrando che la proprietà di rinormalizzazione vale anche se solo la parte simmetrica della derivata distribuzionale del campo, i.e.

$$Eb = \frac{1}{2}\big(Db + {}^t Db\big) \in [\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)]^{d\times d},$$

è una funzione localmente sommabile. La prima estensione significativa dei risultati a campi vettoriali con derivata misura è realizzata in un importante lavoro di **F. Bouchut** ([5], 2001), in cui viene introdotta la tecnica di *regolarizzazione anisotropa*: viene scelto un nucleo di convoluzione ρ non più radiale, ma con un profilo che dipende dalla direzione spaziale, in modo che nelle direzioni in cui il campo vettoriale ha meno regolarità si possa effettuare una regolarizzazione più veloce. Questa tecnica è stata raffinata in seguito da **F. Colombini e N. Lerner** ([7], 2003), permettendo di ottenere il lemma di rinormalizzazione nel caso di un campo vettoriale *conormale* BV, cioè nel caso in cui, a meno di un cambiamento di coordinate di classe $C^{1,1}$, la derivata del campo lungo tutte le direzioni tranne una sia una funzione sommabile e lungo la restante direzione sia una misura.

Infine, partendo dall'intuizione che, grazie al teorema del rango uno di Alberti, ogni campo vettoriale BV ha un comportamento asintoticamente conormale, **L. Ambrosio** ([1], 2003) ha mostrato la proprietà di rinormalizzazione nel caso di un campo vettoriale a variazione limitata. Nel caso BV non si ha convergenza forte dei rapporti incrementali, ma se ne può dare uno spezzamento canonico in cui un addendo converge fortemente alla parte assolutamente continua della derivata e l'altro viene stimato per mezzo della parte singolare della derivata. La proprietà di rinormalizzazione segue allora tramite un processo di localizzazione e di regolarizzazione anisotropa basato sul teorema di Alberti.

Nel suo lavoro, Ambrosio introduce anche una nuova tecnica che permette un naturale collegamento tra (PDE) e (ODE) senza alcuna ipotesi di regolarità sul campo. Essa si basa sostanzialmente sul *principio di sovrapposizione*, secondo il quale tutte le soluzioni positive della (PDE) si possono esprimere come sovrapposizioni di soluzioni caratteristiche. Se $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times C([0,T];\mathbb{R}^d))$ è una misura concentrata sull'insieme delle coppie (x,ψ) tali che ψ è una soluzione dell'equazione ordinaria con $\psi(0) = x$, allora è facile verificare che la misura μ_t^γ definita da

$$\mu_t^\gamma(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d\times C([0,T];\mathbb{R}^d)} \varphi(\psi(t))d\gamma(x,\psi) \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$$

è una soluzione della (PDE). Il principio di sovrapposizione ci garantisce che ogni soluzione positiva μ_t della (PDE) è di tale forma, cioè data μ_t esiste una misura $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times C([0,T];\mathbb{R}^d))$ tale che $\mu_t = \mu_t^\gamma$.

Il risultato di Ambrosio e il precedente lavoro di Capuzzo Dolcetta e Perthame ci hanno portato a congetturare che la proprietà di rinormalizzazione continui a valere anche nel caso in cui il campo vettoriale sia a *deformazione limitata*, cioè tale che la derivata simmetrica sia una misura localmente finita. Ciò è stato dimostrato (**L. Ambrosio, G. Crippa e S. Maniglia**, [3], 2004) nell'ipotesi più forte che il campo vettoriale sia speciale a deformazione limitata, cioè tale che la parte singolare della derivata sia concentrata su un insieme rettificabile di codimensione uno. La dimostrazione di questo fatto si basa su uno studio approfondito delle *tracce normali di campi con divergenza misura*. Se C è un campo vettoriale su $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ limitato e con divergenza misura, $D\cdot C \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, possiamo definire la traccia normale di C sul bordo di un aperto regolare $\Omega' \subset\subset \Omega$ come una distribuzione su Ω:

$$\langle \mathrm{Tr}(C, \partial\Omega'), \varphi \rangle := \int_{\Omega'} \nabla\varphi \cdot C\, dx + \int_{\Omega'} \varphi\, dD \cdot C \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Il principale teorema di [3] è la seguente formula di *cambiamento di variabile per le tracce*. Siano

$$w : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,, \qquad B : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

localmente limitati, con $B \in BD_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $D \cdot (wB) \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Allora per ogni funzione h di classe C^1 su $\mathbb{R}$ abbiamo

$$\mathrm{Tr}(h(w)B, \partial\Omega') = h\left(\frac{\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')}{\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')}\right) \mathrm{Tr}(B, \partial\Omega') \quad \mathscr{H}^{d-1}\text{-quasi ovunque su } \partial\Omega',$$

intendendo che il rapporto $\mathrm{Tr}(wB, \partial\Omega')/\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')$ è arbitrariamente definito nei punti in cui la traccia $\mathrm{Tr}(B, \partial\Omega')$ si annulla. Questa formula permette di controllare la concentrazione su ipersuperfici della divergenza dei campi rinormalizzati, il che ci consente poi di dedurre la proprietà di rinormalizzazione in SBD.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Ambrosio: *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields.* Preprint, 2003, di prossima pubblicazione su Inventiones Mathematicae (disponibile su http://cvgmt.sns.it).

[2] L. Ambrosio, A. Coscia & G. Dal Maso: *Fine properties of functions in BD.* Arch. Rat. Mech. Anal., **139** (1997), 201–238.

[3] L. Ambrosio, G. Crippa & S. Maniglia: *Traces and fine properties of a BD class of vector fields and applications.* Preprint, 2004 (disponibile su http://cvgmt.sns.it).

[4] L. Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara: *Functions of bounded variation and free discontinuity problems.* Oxford Mathematical Monographs, 2000.

[5] F. Bouchut: *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation.* Arch. Rational Mech. Anal., **157** (2001), 75–90.

[6] I. Capuzzo Dolcetta & B. Perthame: *On some analogy between different approaches to first order PDE's with nonsmooth coefficients.* Adv. Math. Sci. Appl., **6** (1996), 689–703.

[7] F. Colombini & N. Lerner: *Uniqueness of L^∞ solutions for a class of conormal BV vector fields.* Preprint, 2003.

[8] R. J. DiPerna & P. L. Lions: *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math., **98** (1989), 511–547.