Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea
10 giugno 2004

Viaggio attraverso i piccoli divisori: Normalizzazione di oggetti locali

Candidato
Enrico Le Donne
ledonne@sns.it

Relatore
Prof. Marco Abate
Università di Pisa

Controrelatore
Prof. Stefano Marmi
Scuola Normale Superiore

Anno Accademico 2003/2004

Alle persone che ho incontrato a Pisa.

Ringrazio i Professori Marco Abate e Stefano Marmi per tante di quelle cose che elencarne solo alcune sarebbe troppo riduttivo.

Ringrazio i miei due postdoc preferiti: Teo Carletti e Cinzia Bisi.

Ringrazio gli amici della Summer School in Holomorphic Dynamics fatta a Cortona.

Ringrazio Pisa, l'Università e la Scuola Normale.

Ringrazio il Timpano per avermi ospitato e tutta la gente dentro per avermi sopportato.

Non ringrazio la mensa perchè sarebbe troppo. . .

Ringrazio Giulio e Maurizio per avermi aiutato nei problemi di "Algebra".

Ringrazio Dario e Andrea per avermi aiutato nei problemi di "conto".

Ringrazio Valentino per avermi aiutato nei problemi di Geometria Differenziale.

Ringrazio la mia adorata Roberta.

Indice

1 Introduzione **1**

1.1 Motivazione . . . 1

1.1.1 Zeri di applicazioni . . . 1

1.1.2 Punti di equilibrio . . . 4

1.1.3 Sistemi dinamici . . . 5

1.2 Metodi . . . 6

1.2.1 Discussione sul setting . . . 7

1.2.2 Oggetti locali . . . 8

1.2.3 Intento . . . 8

1.2.4 Linearizzabilità e studio della parte lineare . . . 8

1.3 Il problema dei Piccoli Divisori . . . 10

1.4 Notazioni e nomenclature . . . 12

1.5 Risultati noti . . . 15

1.5.1 Stabilità . . . 15

1.5.2 Teoremi di Brjuno . . . 18

1.6 Metodo di Newton . . . 19

1.6.1 Linearizzazione . . . 19

1.6.2 Normalizzazione . . . 20

2 Forme normali di campi vettoriali olomorfi **21**

2.1 Decomposizione di Jordan di un campo formale . . . 24

2.1.1 Normalizzazione di un campo formale . . . 25

2.1.2 Problemi . . . 26

2.1.3 Decomposizione spettrale . . . 27

2.2 Normalizzazione (formale) col metodo di Newton . . . 32

2.3 Normalizzazione di campi olomorfi semi-semplici . . . 33

2.3.1 La condizione aritmetica ω introdotta da A. D. Brjuno 33

2.3.2 Dimostrazione del teorema di Brjuno nel caso semi-semplice . . . 33

2.3.3 Necessità di una condizione aritmetica . . . 38

3 Forme normali di mappe olomorfe 39
3.1 Decomposizione di Jordan di un campo formale 39
3.1.1 Problemi 40
3.1.2 Decomposizione spettrale 41
3.2 Normalizzazione (formale) col metodo di Newton 43
3.3 Normalizzazione di mappe olomorfe semi-semplici 44
3.3.1 La condizione aritmetica ω per mappe olomorfe 44
3.3.2 Dimostrazione del teorema di Brjuno nel caso semi-semplice 44

4 Condizione A & normalizzazione olomorfa di campi vettoriali 49
4.0.3 Introduzione 49
4.1 Forme normali 50
4.2 Condizioni di Brjuno 52
4.3 Risultati 56
4.4 Riduzione diretta in forma normale 57
4.4.1 Esistenza 58
4.4.2 Trasformazioni speciali 61
4.5 Classificazione di base 63
4.6 Condizione A 69
4.6.1 Formulazione 69
4.6.2 Invarianza 77
4.7 Dimostrazione della convergenza col metodo di Newton . . . 78
4.7.1 Introduzione all'iterazione 79
4.7.2 Stime di base 83
4.7.3 Conclusione della dimostrazione del teorema di convergenza 89

5 Ancora sulla normalizzazione di mappe 95
5.1 Normalizzazione diretta di mappe olomorfe 95
5.1.1 Esistenza 96
5.1.2 Trasformazioni speciali 98
5.2 Classificazione di base 99
5.2.1 Torsione e determinazioni coerenti del logaritmo . . . 103
5.3 Condizione A & normalizzazione olomorfa di mappe 111
5.3.1 Formulazione 111
5.4 Teorema generale di Brjuno per mappe 112
5.5 L'equazione omologica ricavata in coordinate 112

6 Divergenza del cambio di variabile normalizzante per campi vettoriali 115
6.1 Principi per la costruzione di esempi di divergenza 115
6.2 Necessità della condizione $\bar{\omega}$ 119

6.3 Necessità della condizione A 122
6.3.1 Necessità della condizioni A_1' e A_2 122
6.3.2 Necessità della condizione A_1'' 123

7 Divergenza del cambio di variabile normalizzante per mappe 125
7.1 Criteri di non linearizzabilità 125
7.1.1 Criterio di Il'yashenko 125
7.1.2 Dicotomia di Perez-Marco 129

Bibliografia 130

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Motivazione

L'oggetto di questa tesi è lo studio dei sistemi dinamici da due punti di vista: quello dell'iterazione di funzioni e quello dell'integrazione di campi vettoriali. Si vorrebbe ora motivare l'interesse mostrando come il primo problema è conseguenza dello studio di zeri di applicazioni e il secondo è strettamente collegato alla fisica.

1.1.1 Zeri di applicazioni

Uno dei più importanti problemi che non solo la matematica e la fisica ma tutte le materie scientifiche si pongono è il calcolo delle soluzioni di un'equazione. Vale a dire, data una qualsiasi espressione F si deve trovare un valore p tale che

$$F(p) = 0. \tag{1.1}$$

In generale non sono disponibili metodi espliciti per calcolare le soluzioni di (1.1), risolvendo così il problema. Nel caso in cui le possibili candidate soluzioni siano in numero finito, un metodo grossolano sarebbe quello di provarle tutte, ma in generale potrebbero essere infinite; per cui la matematica applicata è ricorsa allo studio di metodi iterativi che consentono di approssimare le soluzioni con una precisione prestabilita. In generale si tratta di *metodi di iterazione funzionale*.

Data una funzione $f : X \to X$ da uno spazio in sé possiamo considerare le sue iterate

$$f^0 = \mathrm{id}, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^3 = f \circ f \circ f, \quad \dots$$

Per cui partendo da un valore iniziale $x_0 \in X$ abbiamo la successione

$$x_{k+1} = f(x_k) = f^k(x_0), \tag{1.2}$$

detta iterazione di x_0 tramite f. Nel caso in cui f sia una funzione continua e $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ sia una successione convergente, allora il limite è proprio un punto fisso di f, i.e., una soluzione dell'equazione

$$x = f(x). \tag{1.3}$$

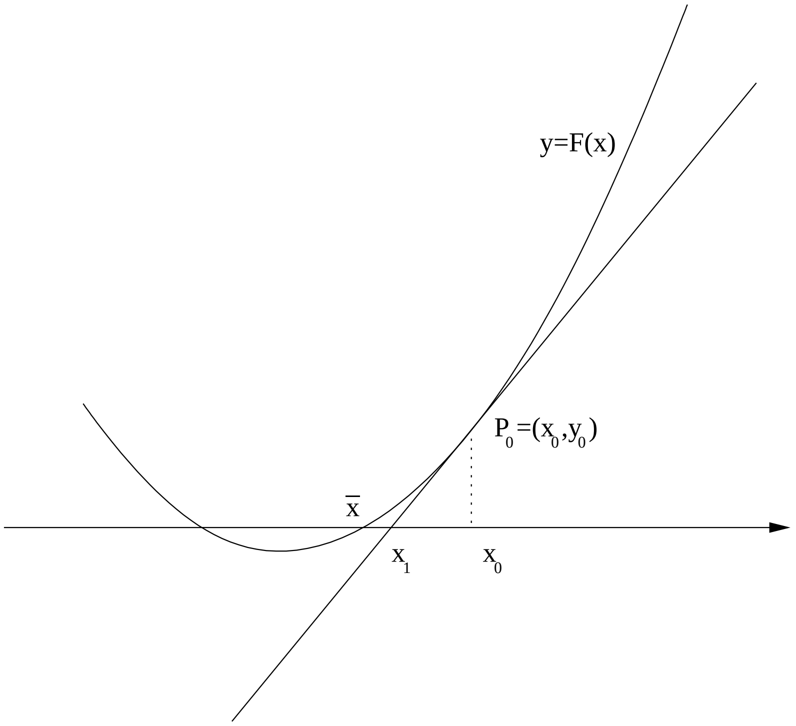
L'equazione (1.1) deve quindi essere trasformata in un'equazione equivalente della forma (1.3). Successivamente si devono trovare condizioni sufficienti per la convergenza di una successione delle iterate di f, che però noi non discuteremo qui.

Metodo delle tangenti di Newton

Mostreremo ora un metodo, ancora oggi utilizzato dai computer, che risale a Sir Isaac Newton (1642-1727), per trovare zeri di applicazioni. Nell'estate del 1669 Newton finì il suo *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*. All'interno si può trovare quello che oggigiorno è chiamato *metodo di Newton* o iterazione di Newton o ancora metodo delle tangenti.

Data una funzione F in n variabili, definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, il metodo permette di approssimare le soluzioni dell'equazione $F(x) = 0$ (o, che è lo stesso, di calcolare gli zeri della funzione $y = F(x)$) alla sola condizione di saper calcolare la funzione e il suo differenziale, vale a dire il gradiente.

Per semplicità consideriamo il caso di una funzione reale $y = F(x)$. Prima di tutto è necessario essere abbastanza vicini ad una soluzione, per esempio si può prendere un punto di partenza (anche detto di innesco) x_0 che sia abbastanza vicino a una soluzione; praticamente serve che la concavità della funzione non cambi in un intorno della soluzione.



Nel disegno sopra si vede che F attraversa l'asse delle x nel punto $\bar{x}$ vicino ad x_0. Del punto x_0 dobbiamo essere in grado di calcolare il valore della funzione $F(x_0)$ e della derivata $F'(x_0)$. L'idea è che se ci vogliamo avvicinare al valore zero dobbiamo andare nella direzione di massima crescita nel caso in cui il valore di F nel punto x_0 sia negativo, in direzione opposta altrimenti.

Nell'esempio, nel punto $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ si può ora tracciare la tangente alla curva; tale tangente incontrerà l'asse delle ascisse per un valore di x che è la prima approssimazione della soluzione cercata.

La tangente avrà per coefficiente angolare il valore della derivata in x_0, $F'(x_0)$. Utilizzando l'equazione della retta generica (o fascio di rette) per $P_0 : y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$, sostituendo m con $F'(x_0)$ e imponendo $y_1 = 0$ si ha:

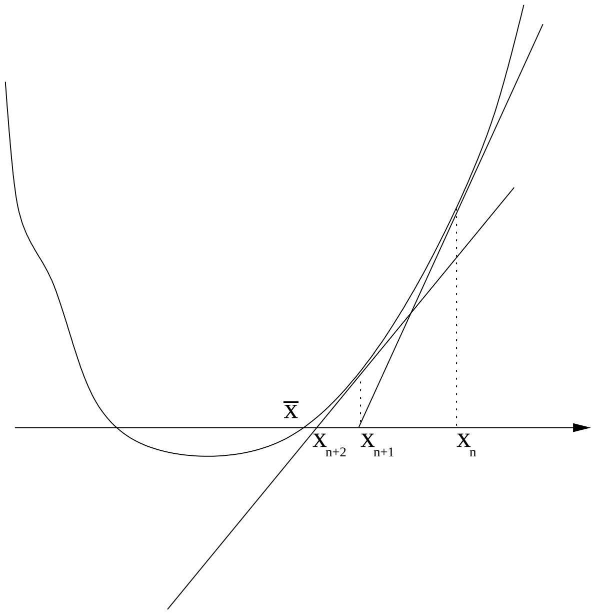
$$-y_0 = F'(x_0)(x_1 - x_0)$$

A questo punto si risolve rispetto alla x e si ha con facili passaggi:

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{F'(x_0)},$$

o anche, ricordando che $y_0 = F(x_0)$,

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} := f(x_0).$$



Il procedimento si può iterare, calcolando il valore $y_1 = F(x_1)$, tracciando la tangente per questo nuovo punto $P_1 = (x_1, y_1)$ e così via. In generale, chiamando x_k la k-esima approssimazione e x_{k+1} quella successiva si ha la classica formula di Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} = f(x_k) = f^{k+1}(x_0).$$

Sotto opportune ipotesi di concavità il procedimento è convergente, nel senso che fissato un margine di errore piccolo quanto si vuole, si troverà sempre una approssimazione per la quale l'errore è minore di tale margine.

Il problema di trovare una soluzione $F(x) = 0$ si è dunque trasformato ora nel trovare un punto fisso

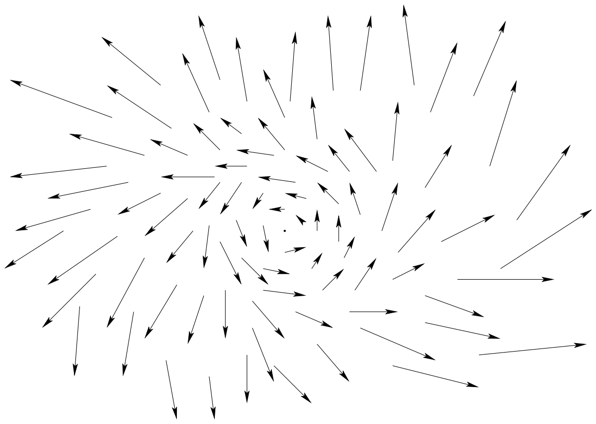
$$f(p) = p,$$

tramite lo studio delle iterate di f.

Il problema sarebbe semplice se potessimo scrivere in modo esplicito le iterate della mappa f. Per questo ci piacerebbe ricondurci ad un caso in cui la f abbia una forma più semplice nel senso che sia facile scrivere le sue iterate.

1.1.2 Punti di equilibrio

In fisica è molto importante studiare quando un sistema è in equilibrio, vale a dire se le forze che agiscono su un particolare oggetto hanno risultante nulla o meno.In particolare, come fa osservare Keplero, se un oggetto è fermo in un punto su cui non agiscono forze rimarrà immobile. Dunque i fisici sono interessati a studiare cosa succede quando un oggetto è vicino ad un punto di equilibrio; più correttamente, vogliono analizzare un campo di forze in un intorno di un punto in cui il campo si annulla.



In termini matematici il problema si descrive nel seguente modo. Sia $\Gamma(M)$ l'insieme delle sezioni del fibrato tangente di una varietà M; sia $X \in \Gamma(M)$, quindi un campo vettoriale di M; siamo interessati alle curve σ sulla varietà tali che in ogni punto hanno derivata uguale al campo dato, vale a dire

$$\dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}.$$

Restringeremo il nostro interesse ad un intorno di un punto singolare, i.e., un punto p tale che

$$X(p) = 0.$$

Il problema è dunque quello di risolvere un'equazione differenziale data una condizione iniziale $\sigma(t_0) = q$ e trovare quindi il flusso associato $\varphi_t(q)$ che verrà interpretato come l'evoluzione temporale dei punti della varietà.

In generale, è difficile integrare un campo, vale a dire, trovare un'espressione esplicita dell'evoluzione temporale. La difficoltà dipende dal campo X. Il nostro intento sarà quello di ridurci in qualche modo a integrare un campo più semplice.

1.1.3 Sistemi dinamici

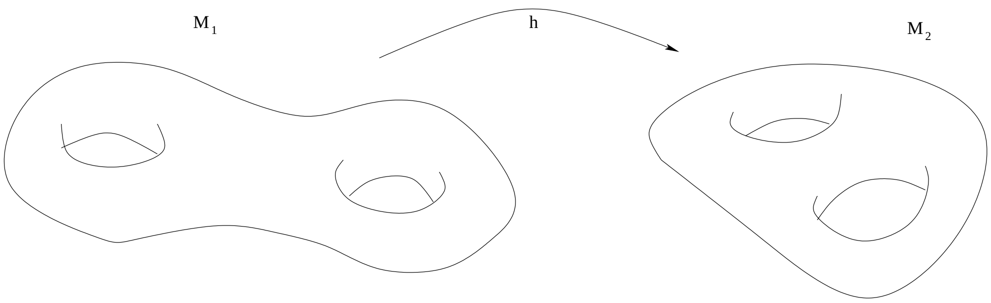
I due problemi discussi sono in stretta analogia e relazione. Entrambi sono detti sistemi dinamici. In generale, un *sistema dinamico* è l'azione di un (semi)gruppo su un insieme. Dunque l'iterazione di una mappa f si può vedere come l'azione del semigruppo $\mathbb{N}$ (non è un gruppo, manca l'inverso) sull'insieme dei punti della varietà. In questo caso parleremo di *sistema dinamico (a tempo) discreto.* Invece, se abbiamo un campo vettoriale, possiamo considerare il flusso generato $\varphi_t(q)$ e quindi ad ogni punto q della varietà e ogni tempo $t \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$ se il campo vettoriale è complesso) abbastanza piccolo affinché il flusso esista, possiamo associare il nuovo punto $\varphi_t(q)$, dando così un'azione (locale: in generale definita solo per $|t|$ piccolo) di $\mathbb{R}$, o $\mathbb{C}$, sull'insieme dei punti della varietà. In questo caso parleremo di *sistema dinamico (a tempo) continuo.*

Notiamo che se $p \in M$ è tale che $f(p) = p$ oppure $X(p) = 0$, allora il punto p è un *punto fisso* del sistema dinamico, i.e., ad ogni tempo (o elemento del (semi)gruppo dell'azione) il punto p viene mandato in sé. Inoltre, poiché saremo interessati solo allo studio del sistema in un intorno di questo punto fisso, parleremo di *sistema dinamico locale* in p.

1.2 Metodi

Se due varietà sono diffeomorfe, ogni sistema dinamico dell'una può esser visto come sistema dinamico dell'altra. Ogni campo vettoriale dell'una può essere trasportato sulla seconda e ogni endomorfismo dell'una ne induce uno sulla seconda. Infatti, consideriamo un diffeomorfismo tra due varietà

$$h : M_1 \longrightarrow M_2.$$



Siano $f \in \mathrm{End}(M_1)$ un endomorfismo e $X \in \Gamma(M_1)$ un campo vettoriale della prima varietà. Allora sono ben definiti i loro *push-forward* $h_*f \in \mathrm{End}(M_2)$ e $h_*X \in \Gamma(M_2)$ nel modo naturale:

$$h_*f = h \circ f \circ h^{-1}$$

$$h_*X = dh.X_{h^{-1}}.$$

In conclusione, studiare i sistemi dinamici su M_1 o su M_2 è la stessa cosa. Infatti,

$$(h_*f)^\nu = h_*(f)^\nu$$

e se σ è una curva integrale per X che per t_0 passa per q, allora $h \circ \sigma$ è una curva integrale per h_*X che per t_0 passa per $h(q)$.

Con questa idea in mente, vogliamo mettere una relazione di equivalenza sulla classe di tutti i sistemi dinamici.

Siano $f_1 : U_1 \to M_1$ e $f_2 : U_2 \to M_2$ due sistemi dinamici locali discreti in $p_1 \in M_1$ e $p_2 \in M_2$ rispettivamente. Diremo che f_1 e f_2 sono *localmente (topologicamente) coniugati* se vi sono due intorni aperti $W_1 \subseteq U_1$ di p_1, $W_2 \subseteq U_2$ di p_2, e un omeomorfismo $h : W_1 \to W_2$ con $h(p_1) = p_2$ tale che

$$f_2 = h_* f_1,$$

cioè,

$$f_1 = h^{-1} \circ f_2 \circ h \qquad \text{su} \qquad h^{-1}\big(W_2 \cap f_2^{-1}(W_2)\big) = W_1 \cap f_1^{-1}(W_1).$$

L'omeomorfismo h è detto *cambio di variabili*.

In particolare, come prima, abbiamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$f_1^{\circ k} = h^{-1} \circ f_2^{\circ k} \circ h$$

su $h^{-1}\big(W_2 \cap \cdots \cap f_2^{-(k-1)}(W_2)\big) = W_1 \cap \cdots \cap f_1^{-(k-1)}(W_1)$.

Analogamente consideriamo due sistemi dinamici locali continui in $p_1 \in M_1$ e $p_2 \in M_2$, cioè, due campi vettoriali locali $X_1 \in \Gamma(U_1)$ e $X_2 \in \Gamma(U_2)$ con $U_1 \subseteq M_1$ e $U_2 \subseteq M_2$ intorni aperti di p_1 e p_2 rispettivamente. Diremo che X_1 e X_2 sono localmente *coniugati* se vi sono due intorni aperti $W_1 \subseteq U_1$ di p_1, $W_2 \subseteq U_2$ di p_2, e un diffeomorfismo C^1 $h : W_1 \to W_2$ con $h(p_1) = p_2$ tale che

$$X_2 = h_* X_1.$$

Il diffeomorfismo h è detto *cambio di variabili* o anche trasformazione.

Così il sistema dinamico locale di f_1 (risp. X_1) in p_1 è del tutto equivalente al sistema dinamico locale di f_2 (risp. X_2) in p_2.

1.2.1 Discussione sul setting

Fino ad ora non abbiamo dato molta attenzione alla regolarità dei sistemi dinamici considerati. Vale a dire che se abbiamo due sistemi dinamici locali con una certa regolarità allora non solo ci chiediamo se sono topologicamente coniugati ma se si può scegliere il cambio di variabili con la stessa regolarità dei due sistemi considerati. È normale aspettarsi che il problema abbia soluzioni molto diverse a seconda che il nostro setting sia continuo, C^∞, analitico reale, olomorfo ...

Nel seguito, la nostra attenzione sarà concentrata quasi esclusivamente sul caso olomorfo. Naturalmente un primo passo sarà quello di studiare il problema tramite serie di potenze formali, vale a dire che supponiamo le uguaglianze soddisfatte come identità tra serie formali, in generale non convergenti.

1.2.2 Oggetti locali

Consideriamo il caso in cui M sia una n-varietà complessa. Di entrambi i due oggetti che stiamo studiando, campi vettoriali e mappe, siamo interessati alla dinamica in un intorno del punto di equilibrio o del punto fisso rispettivamente. Quindi possiamo usare le carte della varietà per avere un coniugio con lo spazio modello e dunque ridurci al caso di $\mathbb{C}^n$.

Sia f una funzione olomorfa su una varietà complessa che ha un punto fisso. Utilizzando coordinate locali centrate nel punto fisso otteniamo un coniugio locale olomorfo in un intorno del punto fisso tra il sistema dinamico olomorfo di partenza e un nuovo sistema dinamico olomorfo in un intorno di $O \in \mathbb{C}^n$, dove n è la dimensione della varietà. Dunque il sistema dinamico diventa un germe di mappa olomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, dove n è la dimensione della varietà.

Analogamente un campo vettoriale olomorfo su una n-varietà complessa è equivalente ad un germe di campo vettoriale $X : (U, 0) \longrightarrow (T\mathbb{C}^n, 0)$ definito in un intorno dell'origine.

1.2.3 Intento

È facile vedere che l'essere coniugati olomorficamente è una relazione di equivalenza.

Ogni volta che abbiamo una relazione di equivalenza su una classe di oggetti, ci sono degli ovvi problemi di classificazione. Dunque ci poniamo il seguente problema naturale. Trovare una classe (possibilmente piccola) $\mathcal{F}$ di sistemi dinamici locali olomorfi in $0 \in \mathbb{C}^n$ tale che ogni sistema dinamico locale olomorfo f o X in un punto di una varietà complessa n-dimensionale sia olomorficamente localmente coniugato ad un (possibilmente unico) elemento di $\mathcal{F}$, detto *forma normale* olomorfa di f o X.

1.2.4 Linearizzabilità e studio della parte lineare

Se indichiamo con $\mathbf{z}$ il vettore $(z_1, \dots, z_n)$ abbiamo concluso che, poiché gli oggetti in esame sono locali, ci si può ridurre a studiare le mappe olomorfe della forma

$$\mathbf{z} \longmapsto f(\mathbf{z}) \;=\; L\mathbf{z} + O(\mathbf{z}^2) \tag{1.4}$$

oppure i campi vettoriali

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) \;=\; L\mathbf{z} + O(\mathbf{z}^2) \tag{1.5}$$

definiti in un intorno dell'origine. La mappa lineare $L \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{C})$ è il differenziale di $\mathbf{f}$ in $\mathbf{0}$, rispettivamente la parte lineare di $\mathbf{X}$. Ovviamente, $L = \{l_{ij}\}$ è considerata come matrice, ma nel caso di campi vettorali $L\mathbf{z}$ vuol dire

$$\sum_{j=1}^{n} l_{1j} z_j \partial_1 + \dots + \sum_{j=1}^{n} l_{nj} z_j \partial_n.$$

È noto che per ogni applicazione lineare esiste una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ tale che in questa base l'applicazione lineare è data da una matrice di Jordan. Dunque, a meno del cambio di variabili (lineare) che porta la vecchia base nella nuova, possiamo supporre che L sia già nella forma canonica di Jordan. Ricordo che una matrice in forma di Jordan è del tipo

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \epsilon_2 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \epsilon_{n-1} & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \epsilon_n & \lambda_n \end{pmatrix},$$

con $\epsilon_j = 0, 1$ e se $\epsilon_j = 1$ allora $\lambda_j = \lambda_{j+1}$.

Riassumendo, d'ora in avanti nello studio di un sistema dinamico olomorfo useremo mappe e campi già preparati in modo che

$$p = 0 \in \mathbb{C}^n$$

e il differenziale in p sia in forma di Jordan.

Allo scopo di studiare il comportamento dell'oggetto locale, si può provare ad usare una forma più semplice della (1.4) o (1.5) introducendo nuove coordinate. Chiaramente, la situazione ottimale sarebbe raggiunta rimuovendo tutti i termini di ordine più alto di 1 e riducendo l'oggetto semplicemente alla sua parte lineare L. Il fatto è che gli oggetti lineari diagonali sono i più semplici da studiare. I nostri prototipi saranno, fissata una n-upla di numeri complessi $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$S(\mathbf{z}) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \partial_j \quad , \qquad \lambda_j \in \mathbb{C},$$

il campo lineare diagonale e

$$\Lambda : \mathbf{z} \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j e_j \quad , \qquad \lambda_j \in \mathbb{C},$$

la mappa lineare diagonale.

Ricordiamo che il nostro interesse è studiare il sistema (olomorfo) di equazioni differenziali

$$\dot{\mathbf{z}}(t) \equiv \left(\frac{dz_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dz_n(t)}{dt} \right) = \mathbf{X}(\mathbf{z}(t)),$$

in breve $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z})$.

Lo studio della soluzione del sistema sarebbe più facile se $\mathbf{X}$ fosse S, la parte lineare (diagonale), i.e., non avesse termini di ordine superiori al primo: il sistema

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j \qquad j = 1, \dots, n \tag{1.6}$$

ha soluzione $z_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}$, con $c_j \in \mathbb{C}$ che dipende dalle condizioni iniziali.

Anche nel caso del problema dell'iterazione di funzione

$$\mathbf{z}^{(\nu)} \longmapsto \mathbf{z}^{(\nu+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{z}^{(\nu)}),$$

la soluzione sarebbe immediata se $\mathbf{f}$ fosse lineare (diagonale), Λ, i.e., non avesse termini di ordine superiori al primo: il sistema

$$z_j^{(\nu)} \longmapsto z_j^{(\nu+1)} = \lambda_j z_j^{(\nu)} \qquad j = 1, \dots, n \tag{1.7}$$

ha soluzione $z_j^{(\nu)} = \lambda_j^{\nu} z_j^{(0)}$, con $\mathbf{z}^{(0)}$ condizione iniziale.

Tuttavia non ci si può sempre ridurre a questi casi; dunque è naturale l'introduzione della prossima definizione.

Definizione 1.1 ***(Linearizzabilità.)*** *Se esiste un cambio di variabili che porti il nostro oggetto locale in esame in forma lineare diremo che è linearizzabile.*

In generale un oggetto locale non è linearizzabile. Comunque, a patto che alcune condizioni siano soddisfatte, se esiste un cambio formale di variabili che riduce l'oggetto locale alla sua parte lineare, allora c'è anche un cambio di variabili analitico con questa proprietà. Si veda [35], [36], [27], [30], [7], [33], [34], [38], [39] per lo sviluppo storico. Per una semplice esposizione in una variabile, [22]; per le più variabili [16] e [2].

1.3 Il problema dei Piccoli Divisori

Non esiste una definizione precisa di cosa siano i piccoli divisori. Essenzialmente sono una successione di numeri che potrebbe dare un'ostruzione alla risoluzione di un problema di convergenza di serie, poiché si presentano al denominatore dei termini della serie e, se diventassero "troppo" piccoli potrebbero far divergere la serie. Di solito se ne parla nella risoluzione formale per serie di Fourier o serie di potenze dell'inversione di un operatore. Precisamente quando ci si trova di fronte un'equazione (formale) e, per poter esplicitare un ciascun termine della serie formale dell'incognita, si deve dividere termini già noti per un elemento di tale successione. Si ha subito un impedimento se l'elemento è nullo oppure un ulteriore problema può essere che decadendo la successione troppo velocemente gli inversi crescano troppo rapidamente facendo divergere la serie formale della soluzione. Facciamo qui un semplice caso esplicativo con le serie di Fourier.

Esempio. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}^n$, data $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ funzione C^∞ dall'n-toro a $\mathbb{R}^n$, consideriamo la nuova funzione

$$\mathrm{D}u.\alpha := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \theta_j} \alpha_j, \tag{1.8}$$

dove θ_j sono le coordinate standard del toro visto come $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$; notiamo che otteniamo una funzione a media nulla.
Poniamoci il problema di invertire l'operatore definito da (1.8). Utilizziamo lo sviluppo in serie di Fourier: se $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ si definiscono per ogni $k \in \mathbb{Z}^n$

$$\hat{u}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i \langle k|\theta \rangle} u(\theta) d\theta,$$

e si ha che

$$u(\theta) = \sum_k \hat{u}(k) e^{2\pi i \langle k|\theta\rangle}, \tag{1.9}$$

cioè è vero che la serie converge e che è uguale alla funzione di partenza. Dunque, integrando per parti,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{D}u.\alpha}(k) &= \sum_j \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i\langle k|\theta\rangle} \frac{\partial u(\theta)}{\partial \theta_j} \alpha_j d\theta \\
&= \sum_j - \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial}{\partial \theta_j} e^{-2\pi i \langle k|\theta\rangle} u(\theta) \alpha_j d\theta \\
&= \sum_j \int_{\mathbb{T}^n} 2\pi i k_j \alpha_j e^{-2\pi i \langle k|\theta\rangle} u(\theta) d\theta \\
&= 2\pi i \langle k|\alpha\rangle \, \hat{u}(k)
\end{aligned}$$

Quindi se si ha una $v \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ a media nulla e si cerca $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^n)$ tale che $\mathrm{D}u.\alpha = v$, si deve prendere

$$\begin{cases} \hat{u}(k) = (2\pi i \langle k|\alpha\rangle)^{-1} \hat{v}(k), & \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \\ \hat{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Si possono avere due problemi:

1. può esistere qualche k per cui $\langle k|\alpha\rangle = 0$ allora non si può proprio risolvere il problema a livello formale. Si parla in questo caso di presenza di *risonanze*;

2. anche se non ci sono risonanze, la serie (1.9) potrebbe non convergere più se i $\langle k|\alpha\rangle^{-1}$ crescono troppo velocemente. Per questo i $\langle k|\alpha\rangle$ sono detti *piccoli divisori*.

Riassumendo, *le risonanze sono un'ostruzione alla risoluzione formale; i piccoli divisori sono un'ostruzione alla convergenza della soluzione formale.*

1.4 Notazioni e nomenclature

Raccogliamo qui un po' di notazioni, definizioni e nomenclature che useremo in seguito.

$\mathbb{N}$ $= \{0, 1, 2, \ldots\}$.

$\mathbb{N}^*$ $= \{1, 2, \ldots\}$.

$\mathbf{e}_j$ denota il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{C}^n$.

∂_j denota il vettore tangente indotto da $\mathbf{e}_j$.
Dati $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ coordinate,

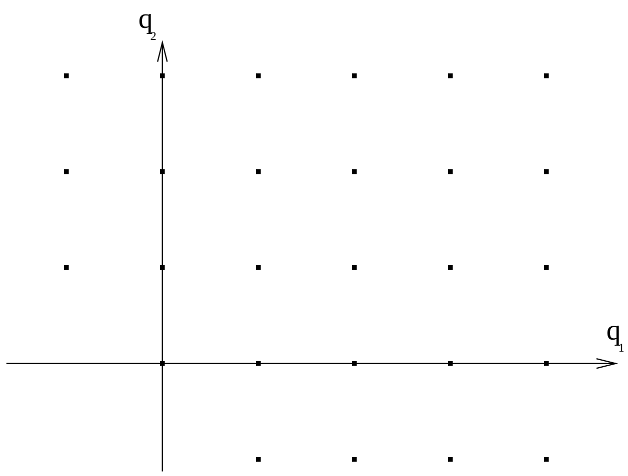
$\langle \lambda | Q \rangle$ $= \sum_{k=1}^n \lambda_k q_k$ il prodotto scalare standard.

$\|Q\|$ $= q_1 + \cdots + q_n$.

$\mathbf{z}^Q$ $= z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}$.

N_j $:= \{Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n \ : \ q_j \geq -1, \ q_l \geq 0 \ \forall l \neq j; \ \|Q\| \geq 0\}$.

N $:= N_1 \cup \cdots \cup N_n$.



N in dimensione 2.

$\mathcal{O}_n$ è l'anello dei germi in 0 delle funzioni olomorfe in n variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$, a valori in $\mathbb{C}$.

$\widehat{\mathcal{O}}_n$ è l'anello delle serie formali in n variabili a coefficienti complessi.

$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ è il modulo dei germi in 0 delle mappe olomorfe in n variabili complesse a valori in $\mathbb{C}^n$ che fissano 0, anche dette sistemi dinamici olomorfi locali discreti.

$\mathcal{M}_n \subset \mathcal{O}_n$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_n$, i.e., i germi che si annullano in 0.

$\widehat{\mathcal{M}}_n \subset \widehat{\mathcal{O}}_n$ l'ideale massimale di $\widehat{\mathcal{O}}_n$

$\mathcal{X}_n$ è il modulo dei germi di campi vettoriali olomorfi con un punto singolare in 0, vale a dire che si annullano nello zero, anche detti sistemi dinamici olomorfi locali continui.

$\widehat{\mathcal{X}}_n$ è il modulo dei germi di campi vettoriali formali con un punto singolare in 0.

Oggetti locali:

- $\mathbf{X}$ campo vettoriale ($\in \widehat{\mathcal{X}}_n$)
- $\mathbf{f}$ mappa ($\in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$)

L la parte lineare dell'oggetto locale.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ spettro di L.

$S := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \partial_j$ la parte lineare diagonale di un campo vettoriale,

$\Lambda : (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n)$ la parte lineare diagonale di una mappa,

$\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ autovalori di Λ o S contati con molteplicità

Una matrice è detta *risonante* (come sistema dinamico continuo[1]) se i suoi autovalori ammettono risonanze additive. Una *risonanza* additiva per $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ è una relazione del tipo

$$\langle \lambda | R \rangle = \lambda_j \qquad \text{Risonanza additiva}$$

per qualche $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $R \in \mathbb{N}^n$, $\|R\| \geq 1$ diversa da quelle banali date da $R = e_j$.

Notiamo che se c'è R tale che $\langle \lambda | R \rangle = \lambda_j$ con $R \in \mathbb{N}^n$, (automaticamente $\|R\| \geq 1$) allora $Q = R - \mathbf{e}_j$ è tale che

$$\langle \lambda | Q \rangle = 0 \qquad \text{Risonanza additiva generica}$$

e $Q \in N_j$ e viceversa. Inoltre $R \neq e_j$ diventa $Q \neq 0$.

[1] Attenzione: il concetto di risonanza per sistemi dinamici continui (sistemi di equazioni differenziali) è diverso da quello per sistemi dinamici discreti cioè che provengono dall'iterazione di mappe con punto fisso; una matrice risonante in uno dei due sensi non è detto che lo sia anche nell'altro.

Una matrice è detta *risonante* (come sistema dinamico discreto) se i suoi autovalori ammettono risonanze moltiplicative. Una *risonanza* moltiplicativa per $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ è una relazione del tipo

$$\lambda^R = \lambda_j \qquad \text{Risonanza moltiplicativa}$$

per qualche $j \in \{1, \ldots, n\}$ e $R \in \mathbb{N}^n$, $\|R\| \geq 1$ diversa da quelle banali date da $R = e_j$.

Notiamo che se c'è R tale che $\lambda^R = \lambda_j$ con $R \in \mathbb{N}^n$, (automaticamente $\|R\| \geq 1$) allora $Q = R - \mathbf{e}_j$ è tale che

$$\lambda^Q = 1 \qquad \text{Risonanza moltiplicativa generica}$$

e $Q \in N_j$ e viceversa. Inoltre $R \neq e_j$ diventa $Q \neq 0$.

Un monomio $c\mathbf{w}^R\partial_j$ nello sviluppo in serie di un campo vettoriale analitico (rispettivamente $c\mathbf{w}^R\mathbf{e}_j$ nello sviluppo in serie di una mappa analitica) tale che $\langle\lambda|R\rangle = \lambda_j$ (risp. $\lambda^R = \lambda_j$), con $R \in \mathbb{N}^n$, sarà detto *monomio risonante nella j-esima coordinata*. D'altra parte, tale monomio si può scrivere $cw_j\mathbf{w}^Q\mathbf{e}_j$ con $\langle\lambda|Q\rangle = 0$ (risp. $\lambda^Q = 1$) e $Q \in N_j$.

Dunque i monomi lineari $cw_k\mathbf{e}_k = cw_k\mathbf{w}^0\mathbf{e}_k$ non sono considerati risonanti. Mentre se $\lambda_k = \lambda_l$, con $k \neq l$, il monomio $cw_k\mathbf{e}_l = cw_k\mathbf{w}^0\mathbf{e}_l$ è risonante.

Per i capitoli 2 e 3:

J^k_n i k-jet (o k-*getti*) di elementi di $\widehat{\mathcal{O}}_n$.

$\pi_k : \widehat{\mathcal{O}}_n \hookrightarrow \{k\text{−jet}\}$ la proiezione sui k-jet.

$\mathcal{L}_S(X) \;:= [S, X] := SX - XS.$

$\mathcal{L}_\Lambda(\psi) \;:= \Lambda \circ \psi - \psi \circ \Lambda.$

$\mathcal{S}$ lo *spettro* dell'operatore $\mathcal{L}_S$ nel caso di campi vettoriali o dell'operatore $\mathcal{L}_\Lambda$ nel caso di mappe.

$E_\alpha \subset \widehat{\mathcal{X}}_n$ l'autospazio corrispondente a $\alpha \in \mathcal{S}$ e π_{E_α} la proiezione associata.

Per i capitoli dal 4 in poi:

$\left\|\sum_Q a_Q x^Q\right\|_\rho \;:= \sum_Q |a_Q|\rho^{|Q|}$

$\{h_j\}_\alpha \;:= \pi_{E_\alpha}(h_j)$

$[h]_k \;:= \pi_k(h)$ il k-jet di h

1.5 Risultati noti

I primi matematici a porsi problemi riguardanti trasformazioni in forma normale di campi vettoriali o mappe e studiarne la convergenza, dando dei primi risultati furono C. L. Siegel [36] e E. Schröder [35] nell'Ottocento. Il problema ha avuto una sua chiara formalizzazione con la tesi [27] di H. Poincaré e a livello di serie formali fu da lui risolto.

Teorema 1.2 *(Poincaré, 1893) Sia $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ un sistema dinamico continuo olomorfo locale tale che non vi siano risonanze (additive) tra gli autovalori della parte lineare. Allora X è formalmente linearizzabile.*

Con Poincaré si ha avuto il primo esempio di una non troppo particolare classe di oggetti locali olomorficamente linearizzabili.

Teorema 1.3 *(Poincaré) Sia $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ un sistema dinamico continuo olomorfo locale tale che l'inviluppo convesso degli autovalori della parte lineare non contenga lo zero. Allora X è olomorficamente linearizzabile se e solo se è formalmente linearizzabile. In particolare, se non ci sono risonanze allora X è olomorficamente linearizzabile.*

È stata relativamente facile la rilettura nel caso discreto.

Teorema 1.4 *(Poincaré, Reich [30]) Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, O)$ un sistema dinamico discreto olomorfo locale invertibile con un punto fisso attrattivo o repulsivo. Allora f è olomorficamente linearizzabile se e solo se è formalmente linearizzabile. In particolare, se non ci sono risonanze allora f è olomorficamente linearizzabile.*

Cominciamo qui ad introdurre la nozione di forma normale.

Teorema 1.5 *(Poincaré, Dulac) Un oggetto locale (olomorfo) è sempre formalmente coniugato ad un oggetto la cui serie di potenze è fatta solo da monomi risonanti, detto forma normale.*

Dunque, la questione che vogliamo trattare nel seguito è sotto quali condizioni analitiche, geometriche o aritmetiche il coniugio è convergente.

1.5.1 Stabilità

Diamo ora una caratterizzazione geometrica delle mappe linearizzabili.

Definizione: Un'applicazione f si dice *stabile nell'origine* se per ogni intorno V di 0 esiste un intorno U di 0 tale che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, f^m è definita su U e $f^m(U) \subseteq V$.

Poiché ogni famiglia olomorfa equilimitata è normale, la nozione di stabilità in 0 è equivalente all'esistenza di un intorno di 0 su cui le iterate di f sono definite e formano una famiglia normale. Vale a dire,

Proposizione 1.6 *Sia f una mappa olomorfa, con $f(0) = 0$. Allora f è stabile nell'origine se e solo se esistono V_0 e U_0 due intorni aperti limitati di 0 tale che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, f^m è definita su U_0 e $f^m(U_0) \subseteq V_0$.*

Dimostrazione. Una implicazione è ovvia. Se l'affermazione è vera per un preciso V_0 mostriamo che è vera per ogni altro V. Vale a dire, supponiamo che esistano V_0 e U_0 due intorni limitati di 0 tali che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, f^m è definita su U_0 e $f^m(U_0) \subseteq V_0$ e mostriamo che per ogni intorno aperto V di 0 esiste un intorno U di 0 contenuto in U_0 tale che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $f^m(U) \subseteq V$.

Essendo V un intorno di 0, per ogni $m \in \mathbb{N}$ possiamo prendere D_m intorno compatto di 0 contenuto in U_0 tale $f^m(D_m) \subseteq V$. Possiamo supporre che $D_m \supseteq D_{m+1}$ e che siano una base di intorni di 0.

Poiché la famiglia $\{f^m\}_m$ delle iterate ristrette a U_0 è equilimitata, è relativamente compatta per la topologia compatta-aperta. Una base per tale topologia è data dagli insiemi

$$\mathcal{N}(K, A) := \{g : U_0 \to V_0 \mid g(K) \subseteq A\},$$

al variare di K compatto di U_0 e A aperto di V_0. Notiamo che

$$\mathcal{N}(D_m, V) \subseteq \mathcal{N}(D_{m+1}, V)$$

e che $f^m \in \mathcal{N}(D_m, V)$. Mostriamo che esiste un k tale che $f^m \in \mathcal{N}(D_k, V)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e prendendo $U = D_k$ abbiamo la tesi. Sia $F = \{f^m : m \in \mathbb{N}\}$ che sappiamo essere a chiusura compatta. Se per assurdo $F \nsubseteq \mathcal{N}(D_m, V)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora i compatti $\overline{F} \setminus \mathcal{N}(D_m, V)$ sono non vuoti e incapsulati. Dunque esiste

$$g \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \left(\overline{F} \setminus \mathcal{N}(D_m, V)\right) = \overline{F} \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{N}(D_m, V).$$

Quindi $g(D_m) \nsubseteq V$ per ogni m, i.e., essendo D_m una base di intorni di 0 $g(0) \notin V$ e dunque $g(0) \neq 0$. Ma $g \in \mathcal{N}(0, V \setminus \{0\})$ è impossibile essendo $f^m \notin \mathcal{N}(0, V \setminus \{0\})$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

□

Vediamo ora come questa concetto, inizialmente solo topologico, dia un primo criterio per la linearizzabilità, concetto analitico. Prima di tutto, quand'è che una mappa lineare è stabile? Consideriamo solo quelle diagonali (1.7). La soluzione dell'iterazione è $z_j^{(\nu)} = \lambda_j^\nu z_j^{(0)}$ che è stabile sse $|\lambda_j| \leq 1$ per ogni j. In particolare se c'è un autovalore di modulo maggiore di 1 la mappa non è stabile.

Per una meravigliosa dimostrazione in dimensione 1 del prossimo teorema si veda [19].

Teorema 1.7 *Sia $\Lambda \in GL(n, \mathbb{C})$ la parte lineare di un germe f di biolomorfismo di $(\mathbb{C}^n, 0)$.*

Se l'applicazione lineare $z \mapsto \Lambda z$ è stabile nell'origine ed f è linearizzabile allora anche f è stabile nell'origine.

D'altra parte, se $\left\|\Lambda^{-1}\right\| \leq 1$, se f è stabile nell'origine allora f è linearizzabile, e inoltre $\left\|\Lambda^{-1}\right\| = 1$, e $|\lambda_j| = 1$ per ogni j.

Dimostrazione. Se f è linearizzabile è ovvio che sia stabile nell'origine se e solo se lo è l'applicazione lineare $z \mapsto \Lambda z$ poiché il coniugio mantiene la stabilità. Viceversa, se f è stabile nell'origine le sue iterate formano una famiglia normale. Notiamo[2] che $\|\Lambda^{-m}\| \leq \left\|\Lambda^{-1}\right\|^m \leq 1$. Consideriamo

$$\phi_m := \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \Lambda^{-j} f^j.$$

La famiglia $\{\phi_m\}_m$ è normale, poiché è equilimitata. Infatti, per ogni K compatto su cui le $\{f^m\}_m$ sono definite ed equilimitate, se $z \in K$ si ha

$$|\phi_m(z)| \leq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} |\Lambda^{-j} f^j(z)| \leq \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left\|\Lambda^{-j}\right\| \left\|f^j\right\|_K \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\|f^k\right\|_K =: M < \infty.$$

Quindi possiamo estrarre una sotto successione delle ϕ_m convergente ad una mappa ϕ tangente all'identità.

Per come è stata definita ϕ_m si ha

$$\phi_m \circ f = \Lambda \phi_m + \frac{\Lambda}{m}(\Lambda^{-m} f^m - Id).$$

Passando al limite si ha $\phi \circ f = \Lambda \phi$, poiché

$$\left\|\frac{\Lambda}{m}(\Lambda^{-m} f^m - Id)\right\| \leq \frac{\|\Lambda\|}{m}(M+1) \to 0.$$

Il fatto che non può esistere j con $|\lambda_j| > 1$ segue dalla discussione sulla stabilità delle mappe lineari: se fosse $|\lambda_j| > 1$ allora Λ non sarebbe stabile contraddicendo il fatto, appena provato, che è coniugata ad una mappa stabile. Quindi il raggio spettrale di Λ è ≤ 1, per cui il raggio spettrale di Λ^{-1} è ≥ 1, da cui $\left\|\Lambda^{-1}\right\| \geq 1$ e $\left\|\Lambda^{-1}\right\| = 1$

□

Osservazione 1.8 *Dalla nozione di stabilità si evince che, se $|\lambda_j| = 1$ per ogni j e un'iterata della f è linearizzabile allora f stessa è linearizzabile.*

[2] Ricordo che $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

1.5.2 Teoremi di Brjuno

I risultati, dimostratisi poi essere i più precisi possibili, sono dovuti a A. D. Brjuno e sono raccolti nel suo articolo [7] al quale faremo spesso riferimento per tutto il seguito.

Teorema 1.9 (Brjuno)[caso semi-semplice] *Sia X un campo vettoriale singolare nell'origine. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori della sua parte lineare. Se X è formalmente linearizzabile e*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2^k} \log \Omega_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(2^{k+1}) \right) < +\infty,$$

con

$$\Omega_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(m) = \min \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_j - \lambda_j \right| \ : \ k_j \in \mathbb{N}^n,\, 2 \leq k_1 + \cdots + k_n \leq m \right\},$$

allora X è olomorficamente linearizzabile.

Nel caso discreto, seguendo le idee di Brjuno [7], Rüssmann [34] dimostrò il seguente

Teorema 1.10 (Rüssmann). *Sia f un germe olomorfo in 0. Se esiste un cambio formale di coordinate*

$$w \mapsto z = h(w)$$

tangente all'identità che linearizza formalmente f, i.e., f è ridotta formalmente alla sua parte lineare

$$h^{-1} \circ f \circ h = \Lambda,$$

allora c'è anche una trasformazione convergente con la stessa proprietà a patto che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. *Λ è diagonalizzabile e non singolare;*
2. *gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ di Λ soddisfano le disuguaglianze*

$$|\lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_m^{j_m} - \lambda_l| \geq \frac{1}{\Omega(j_1 + \ldots + j_m)}$$

per ogni $j_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha, l = 1, \ldots, m$ con $(j_1 + \ldots + j_m) \geq 2$ e $\lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_m^{j_m} \neq \lambda_l$ per una qualche funzione $\Omega : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ vincolata dalle disuguaglianze

$$k \leq \Omega(k) \leq \Omega(k+1) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \Omega(k)}{k^2} < \infty.$$

1.6 Metodo di Newton

Nel seguito, per la risoluzione di certe equazioni, useremo un metodo iterativo che ricorda quello introdotto all'inizio del capitolo; per questo motivo è detto metodo di Newton generalizzato. In realtà il metodo è associato ai nomi Kolmogorov, Arnold e Moser (K.A.M.). La filosofia del metodo KAM è quella di risolvere non direttamente l'equazione voluta ma una sua linearizzazione, una sua semplificazione al primo ordine. Sostituendo la candidata soluzione nell'equazione di partenza si avrà un errore. Ora si vuole trovare una seconda possibile soluzione cercando di annullare l'errore al primo ordine. Essa si può sostituire nell'equazione e iterare il metodo. Generalmente la difficoltà sta nel mostrare che il processo ha limite.

1.6.1 Linearizzazione

Vogliamo utilizzare il metodo KAM per la risoluzione del coniugio con la parte lineare nel caso di mappe.

Denotiamo con $\mathcal{F}(f,h)$ l'operatore

$$\mathcal{F}(f,h) := h^{-1} \circ f \circ h;$$

il nostro intento è quello di risolvere l'equazione $\mathcal{F}(f,h) = \Lambda$ nell'incognita h. L'idea del metodo è quella di considerare una soluzione approssimata risolvendo una versione "linearizzata" dell'equazione; dopodiché impostare un processo che converga alla coniugazione vera e propria.

Scriviamo $h = \mathrm{id} + \psi$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f,h) &= \mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id}) + D_1\mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id})(f-\Lambda) + D_2\mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id})(h-\mathrm{id}) + \mathcal{R}(f,h) \\
&= \Lambda + D_1\mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id})(f-\Lambda) + D_2\mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id})\psi + \mathcal{R}(f,h),
\end{aligned}$$

dove $D_j\mathcal{F}$ è la derivata di $\mathcal{F}$ rispetto al j-esimo argomento, $\mathcal{R}$ è del secondo ordine in $(f-\Lambda)$, e $\psi = h - \mathrm{id}$.

Ora, $\mathcal{F}(\cdot,\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ e così $D_1\mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. D'altra parte,

$$\begin{aligned}
D_2\mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id})\psi &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id}+t\psi) - \mathcal{F}(\Lambda,\mathrm{id})\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\mathrm{id}+t\psi)^{-1}\circ\Lambda\circ(\mathrm{id}+t\psi) - \Lambda\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(\mathrm{id}-t\psi)\circ\Lambda\circ(\mathrm{id}+t\psi) - \Lambda + O(t^2)\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[t(\Lambda\circ\psi - \psi\circ\Lambda) + O(t^2)\right] = \Lambda\circ\psi - \psi\circ\Lambda.
\end{aligned}$$

Dunque h è una soluzione di $\mathcal{F}(f,h) = \Lambda$ se e solo se ψ soddisfa

$$(f-\Lambda) + \Lambda\circ\psi - \psi\circ\Lambda + \mathcal{R}(f,\mathrm{id}+\psi) = 0.$$

Ponendo $\tilde{f} = f - \Lambda$, si studia l'equazione "linearizzata"

$$(f - \Lambda) + \Lambda \circ \hat{\psi} - \hat{\psi} \circ \Lambda = 0,$$

$$\tilde{f} + D_2\mathcal{F}(\Lambda, \mathrm{id})\hat{\psi} = 0.$$

Si considera $\hat{h} = \mathrm{id} + \hat{\psi}$ e $f_1 = \mathcal{F}(f, \hat{h}) = \Lambda + \mathcal{R}(f, \hat{h})$. Poiché $\tilde{f} = O(z^2)$ si ha che $f_1 - \Lambda = o(f - \Lambda)$, e perciò, iterando questo procedimento si ottengono approssimazioni sempre migliori. Ovviamente si deve provare che questo procedimento converge ad una soluzione concreta.

1.6.2 Normalizzazione

In presenza di risonanze non possiamo porci in generale il problema della linearizzazione poiché la soluzione potrebbe non esistere neanche formalmente. Bada bene che non è vero che un germe risonante non è mai linearizzabile; per esempio la mappa lineare stessa lo è banalmente. Comunque è più naturale chiedersi se possiamo trovare un cambio di variabili che coniughi la mappa di partenza ad una forma normale. Quindi ora il nostro intento è quello di risolvere l'equazione $\mathcal{F}(f, h) = G$ nelle incognite h e G. Cerchiamo una soluzione approssimata risolvendo l'equazione "linearizzata". Per il momento supponiamo che G sia già stata trovata, magari in qualche altro modo, per esempio formalmente eguagliando i coefficienti nell'equazione del coniugio.

Scriviamo $h = \mathrm{id} + \psi$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f,h) &= \mathcal{F}(G, \mathrm{id}) + D_1\mathcal{F}(G, \mathrm{id})(f - G) + D_2\mathcal{F}(G, \mathrm{id})(h - \mathrm{id}) + \mathcal{R}(f, h) \\
&= G + (f - G) + D_2\mathcal{F}(G, \mathrm{id})\psi + \mathcal{R}(f, h).
\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
D_2\mathcal{F}(G, \mathrm{id})\psi &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[\mathcal{F}(G, \mathrm{id} + t\psi) - \mathcal{F}(G, \mathrm{id})\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[(\mathrm{id} + t\psi)^{-1} \circ G \circ (\mathrm{id} + t\psi) - G\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[(\mathrm{id} - t\psi) \circ G \circ (\mathrm{id} + t\psi) - G + O(t^2)\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[G \circ (\mathrm{id} + t\psi) - t\psi \circ G - G + O(t^2)\right] \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[G \circ (\mathrm{id} + t\psi) - G\right] - \psi \circ G = dG_{\mathrm{id}}\psi - \psi \circ G.
\end{aligned}$$

Quindi l'equazione linearizzata da studiare è

$$f - G + dG\psi - \psi \circ G = 0.$$

Capitolo 2

Forme normali di campi vettoriali olomorfi

Sia $\mathcal{O}_n$ (risp. $\widehat{\mathcal{O}}_n$) l'anello dei germi in 0 delle funzioni olomorfe in n variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$ (risp. le serie formali in n variabili); indicheremo con $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{O}_n$ (risp. $\widehat{\mathcal{M}}_n \subset \widehat{\mathcal{O}}_n$) l'ideale massimale, i.e., i germi che si annullano in 0. Infine chiameremo $\mathcal{X}_n$ (risp. $\widehat{\mathcal{X}}_n$) il modulo dei germi di campi vettoriali olomorfi (risp. campi vettoriali formali) con un punto singolare in 0, vale a dire che si annullano nello zero.

Richiami di geometria differenziale

Un campo vettoriale X di una varietà M può esser visto come derivazione sull'algebra delle funzioni della varietà a valori in un campo $\mathbb{K}$; infatti, per ogni funzione $f : M \to \mathbb{K}$, X agisce su f dando luogo ad un'altra funzione definita da

$$(X.f)(z) = \frac{d(f \circ \sigma)}{dt}(0),$$

dove $\sigma(t)$ è una qualsiasi curva che al tempo 0 passa per z con vettore tangente $X(z)$. Si mostra che la definizione non dipende dalla particolare σ scelta e che X è una derivazione, cioè è lineare nello spazio vettoriale delle funzioni di M e che vale la legge di Liebniz:

$$X.(fg)(z) = f(z)(X.g)(z) + g(z)(X.f)(z).$$

Nel caso particolare in cui $M = \mathbb{C}^n$, lo spazio tangente in ogni punto è identificabile con $\mathbb{C}^n$ stesso tramite la base canonica $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Quindi un campo vettoriale si può scrivere come

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \partial_j. \tag{2.1}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ci limitiamo alla derivazione sull'algebra delle funzioni olomorfe, oppure sull'algebra delle serie complesse formali.

Col termine *campo vettoriale formale* intendiamo una scrittura del tipo (2.1) con X_j serie formali. Quindi se X è un campo formale e $f = \sum_Q f_Q z^Q$ è una serie di potenze formali, abbiamo

$$\begin{aligned}(X.f)(z) &= \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \partial_j\right) . \left(\sum_{Q \geq 0} f_Q z^Q\right) \\ &= \sum_{j,Q} X_j f_Q \partial_j z^Q \\ &= \sum_{j,Q} X_j f_Q q_j \frac{z^Q}{z_j}.\end{aligned}$$

Sviluppiamo anche le coordinate di X in serie di potenze $X_j = \sum_P X_{j,P} z^P$, dalla formula sopra si ha

$$\begin{aligned}(X.f)(z) &= \sum_{j,Q} \sum_{P \geq 0} X_{j,P} z^P f_Q q_j \frac{z^Q}{z_j} \\ &= \sum_{j,Q,P} X_{j,P} f_Q q_j \frac{z^{Q+P}}{z_j}.\end{aligned}$$

Da cui si nota che se X e f in 0 valgono zero, quindi $|P|, |Q| \geq 1$, allora $Q + P - e_j$ ha modulo maggiore di 1 e quindi anche $X.f$ vale zero in 0. In generale, se $|Q| \geq 1$ e $|P| \geq k$ allora $Q + P - e_j \geq k$, vale a dire, se $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ e $f \in \left(\widehat{\mathcal{M}}_n\right)^k$, allora $X.f \in \left(\widehat{\mathcal{M}}_n\right)^k$. Riassumendo,

$$X. \left((\widehat{\mathcal{M}}_n)^k\right) \subseteq (\widehat{\mathcal{M}}_n)^k \qquad \forall\, X \in \widehat{\mathcal{X}}_n.$$

Definizione 2.1 *Definiamo i k-jet (o k-getti) J_n^k di elementi di $\widehat{\mathcal{O}}_n$ come classi di equivalenza di elementi in $\widehat{\mathcal{O}}_n$ modulo $(\widehat{\mathcal{M}}_n)^{k+1}$; $J_n^k = \widehat{\mathcal{O}}_n/(\widehat{\mathcal{M}}_n)^{k+1}$.*
Abbiamo una proiezione

$$\pi = \pi_k : \widehat{\mathcal{O}}_n \hookrightarrow \{k\text{−jet}\}$$

che può esser vista come il troncamento di una serie ad i suoi termini di grado $\leq k$. Inoltre i k-jet si possono proiettare sui l-jet se $l < k$ per il fatto che $(\widehat{\mathcal{M}}_n)^k \subset (\widehat{\mathcal{M}}_n)^l$. Tale proiezione sarà indicata con

$$\pi_{kl} : \{k\text{−jet}\} \hookrightarrow \{l\text{−jet}\}$$

Quindi ogni elemento di J_n^k ha un rappresentante privilegiato che è l'unico polinomio di grado k che si proietta su di esso; questa associazione è un'iniezione che chiameremo $\iota : \{k\text{−jet}\} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_n$.

I k-jet sono un'algebra: le operazioni di somma e prodotto si conservano al quoziente, o, se si preferisce, per troncamento.

Notiamo che se $X.\left((\widehat{\mathcal{M}}_n)^k\right) \subseteq (\widehat{\mathcal{M}}_n)^k$, allora la derivazione X passa al quoziente come applicazione lineare; denotiamo tale applicazione con $X^{(k)}$. Possiamo anche vedere $X^{(k)}$ definita dal diagramma

$$\begin{array}{cccc} X^{(k)}: & \{k\text{−jet}\} & \longrightarrow & \{k\text{−jet}\} \\ & \downarrow \iota & & \uparrow \pi \\ X\ : & \widehat{\mathcal{O}}_n & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_n \end{array} .$$

Ovviamente il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{cccc} X^{(l)}: & \{l\text{−jet}\} & \longrightarrow & \{l\text{−jet}\} \\ & \downarrow \iota_{lk} & & \uparrow \pi_{kl} \\ X^{(k)}: & \{k\text{−jet}\} & \longrightarrow & \{k\text{−jet}\} \\ & \downarrow \iota & & \uparrow \pi \\ X: & \widehat{\mathcal{O}}_n & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_n \end{array} . \tag{2.2}$$

Dal calcolo fatto sopra, $(X.f)(z) = \sum_{j,Q,P} X_{j,P} f_Q q_j \dfrac{z^{Q+P}}{z_j}$. Quindi, prendiamo i monomi z^Q, con $|Q| \leq k$, come base di J_n^k e vediamo come ci agisce $X^{(k)}$:

$$\begin{aligned} X^{(k)}(z^Q) &= \pi\left(X.z^Q\right) \\ &= \pi\left(\sum_{j,P} X_{j,P} q_j z^{Q+P-e_j}\right) \\ &= \sum_{\substack{j,P \\ |Q+P-e_j| \leq k}} X_{j,P} q_j z^{Q+P-e_j} =: \sum f_{Q'} z^{Q'}. \end{aligned}$$

Dato ora un altro campo $Y = \sum_l Y_l \partial_l = \sum_{l,R} Y_{l,R} z^R \partial_l \in \widehat{\mathcal{X}}_n$, vediamo cosa succede se applichiamo a quello che abbiamo ottenuto l'applicazione lineare $Y^{(k)}$,

$$\begin{aligned} Y^{(k)}\left(X^{(k)}(z^Q)\right) &= \sum_{\substack{l,R \\ |Q'+R-e_j| \leq k}} Y_{l,R} f_{Q'} q'_j z^{Q'+R-e_l} \\ &= \sum_{\substack{l,j,P,R \\ |Q+P-e_j| \leq k \\ |Q+P+R-e_j-e_l| \leq k}} Y_{l,R} X_{j,P} q_j (Q+P-e_j)_l z^{Q+P+R-e_j-e_l} \end{aligned}$$

poiché $X.f$ manda 0 in 0 se $X \in \mathcal{X}_n$ e $f \in \widehat{\mathcal{M}}_n$, ha senso calcolare $Y.(X.f)$ e, sui monomi della base viene

$$Y.(X.z^Q) = \sum_{l,j,P,R} Y_{l,R} X_{j,P} q_j (Q+P-e_j)_l z^{Q+P+R-e_j-e_l}$$

Vedendo $Y.X$ come applicazione lineare ($Y.X$ non è un campo!) possiamo calcolare $(Y.X)^{(k)}$ e, sempre sulla base,

$$(Y.X)^{(k)}(z^Q) = \sum_{\substack{l,j,P,R \\ |Q+P+R-e_j-e_l| \leq k}} Y_{l,R} X_{j,P} q_j (Q+P-e_j)_l z^{Q+P+R-e_j-e_l}$$

Ma, osservando che $|Q+P+R-e_j-e_l| \leq k$ implica $|Q+P-e_j| \leq k$ poiché $|R| \geq 1$, si ha $Y^{(k)} \circ X^{(k)} = (Y.X)^{(k)}$. Quindi se col simbolo $[\cdot,\cdot]$ indichiamo rispettivamente la parentesi di Lie per campi vettoriali o il commutatore (rispetto alla composizione) per applicazioni lineari nello spazio dei k-jet, otteniamo:

$$[Y^{(k)}, X^{(k)}] = [Y, X]^{(k)}.$$

Tutto ciò si riassume nella seguente

Osservazione 2.2 *La proiezione $\pi : X \longmapsto X^{(k)}$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

Analogamente, tenendo conto del diagramma (2.2) si ha

Osservazione 2.3 *La proiezione $\pi_{kl} : X^{(k)} \longmapsto X^{(l)}$ è un omomorfismo di algebre di Lie.*

2.1 Decomposizione di Jordan di un campo formale

Sia $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$; tale campo induce una derivazione su $\widehat{\mathcal{O}}_n$ ed essendo nullo nell'origine, questa derivazione lascia stabile ogni potenza dell'ideale massimale $\widehat{\mathcal{M}}_n$. Possiamo ridurci all'algebra dei k-jet J_n^k di elementi di $\widehat{\mathcal{O}}_n$; poiché tale algebra ha dimensione finita, la derivazione indotta da X diventa un'applicazione lineare in dimensione finita e sarà indicata con $X^{(k)}$. Siano $\iota : \{k\text{−jet}\} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_n$ l'iniezione canonica e $\pi : \widehat{\mathcal{O}}_n \hookrightarrow \{k\text{−jet}\}$ la proiezione. Allora

$$\begin{array}{lccc} X^{(k)}: & \{k\text{−jet}\} & \longrightarrow & \{k\text{−jet}\} \\ & \downarrow \iota & & \uparrow \pi \\ X: & \widehat{\mathcal{O}}_n & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_n \end{array} .$$

Poiché $X^{(k)}$ è un'applicazione lineare di uno spazio di dimensione finita, ammette una decomposizione di Jordan:

$$X^{(k)} = X_S^{(k)} + X_N^{(k)},$$

dove $X_S^{(k)}$ e $X_N^{(k)}$ sono le parti semi-semplice e nilpotente di $X^{(k)}$, cioè $X_S^{(k)}$ è diagonalizzabile mentre $X_N^{(k)}$ è nilpotente. Inoltre $X_S^{(k)}$ e $X_N^{(k)}$ commutano come derivazioni in J_n^k, questo ultimo concetto possiamo esprimerlo utilizzando il commutatore: $[X_S^{(k)}, X_N^{(k)}] = 0$.

Le decomposizioni ai diversi ordini sono compatibili per troncamento, cioè $\pi_{kl}(X_S^{(k)}) = X_S^{(l)}$ e $\pi_{kl}(X_N^{(k)}) = X_N^{(l)}$ e ciò segue dal diagramma commutativo (2.2); in questo modo si ottiene, quando $k \to \infty$, una *decomposizione canonica*:

$$X = X_S + X_N,$$

dove

$$X_S, X_N \in \widehat{\mathcal{X}}_n \quad \text{e} \quad [X_S, X_N] = 0,$$

dove ora $[\cdot,\cdot]$ indica la parentesi di Lie dei due campi vettoriali.

Questa decomposizione è chiamata *decomposizione di Jordan* del campo X; il campo X_S è la parte semi-semplice e X_N la parte nilpotente.

Un campo X sarà detto semi-semplice (risp. nilpotente) se $X_N = 0$ (risp. $X_S = 0$).

Notiamo che mentre si vedrà in seguito che X_S è ancora diagonalizzabile, nel senso che ammette una base di autovalori, X_N non sarà nilpotente nel senso che una sua potenza è nulla, ma che ristretta ad ogni k-jet sarà nilpotente. Quindi, applicando X_N più volte a un qualsiasi germe, si aumenta il suo ordine di annullamento in zero, e otteniamo dunque la seguente

Osservazione 2.4 *Un campo è nilpotente se e solo se la sua parte lineare in 0 vista come matrice è una matrice nilpotente.*

Inoltre,

Osservazione 2.5 *La decomposizione di Jordan è naturale: se $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ e φ è un diffeomorfismo locale (formale) di $(\mathbb{C}^n, 0)$, allora $\varphi_*(X_S) + \varphi_*(X_N)$ è la decomposizione di Jordan di $\varphi_*(X)$.* Infatti, $\varphi_*(X_S)$ è ancora semi-semplice (poiché, se v_ν sono una base di J_n^k formata da autovettori per $X_S^{(k)}$, allora $v_\nu \circ \varphi$ sono una base di J_n^k formata da autovettori per $\varphi_* X_S^{(k)}$), $\varphi_*(X_N)$ è nilpotente (ha parte lineare nilpotente) e $[\varphi_*(X_S), \varphi_*(X_N)] = [d\varphi(X_S), d\varphi(X_N)] = d\varphi([X_S, X_N]) = 0$.

Osservazione 2.6 *Lo spazio $\widehat{\mathcal{X}}_n$ è un'algebra di Lie di dimensione infinita, limite proiettivo delle algebre di Lie di dimensione finita $\mathcal{X}_n^k$ (k-jet di campi nulli in 0). La decomposizione di Jordan del campo $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ è il limite proiettivo delle decomposizioni di Jordan dei k-jet di X in $\mathcal{X}_n^k$.*

2.1.1 Normalizzazione di un campo formale

Nel seguito, Λ denoterà la matrice jacobiana in 0 del campo X in esame e S sarà il campo lineare diagonale formato dagli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (contati con molteplicità) della matrice Λ, cioè

$$S := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \partial_j.$$

Come si era anticipato, ogni campo semi-semplice è diagonalizzabile. Infatti, dimostreremo che

Proposizione 2.7 *Ogni un campo semisemplice $X = X_S \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ è coniugato, tramite un diffeomorfismo formale, ad un campo lineare diagonale S.*

Sarà sufficiente costruire un sistema di coordinate formali $y_1, \ldots, y_n$ tali che $X.y_j = \lambda_j y_j$, vale a dire tale che le funzioni y_j siano autofunzioni di X visto come derivazione. La costruzione verrà fatta per ricorrenza sull'ordine.

Definizione 2.8 *Si chiamano forme normali tutti i campi $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ dove la parte semi-semplice è, nelle coordinate canoniche di $\mathbb{C}^n$, lineare diagonale.* Vale a dire che $X = X_S + X_N$ dove $X_S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \partial_j$, X_N nilpotente e $[X_S, X_N] = 0$.

Come conseguenza della proposizione,

Teorema 2.9 *Tutti i campi $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ sono isomorfi formalmente ad una forma normale.*

Sarà sufficiente mettere la parte semi-semplice in forma lineare diagonale. Comunque un campo X non ha in generale una forma normale ben determinata, poiché la parte nilpotente nella forma normale non è unica ma è determinata modulo l'azione del gruppo di diffeomorfismi formali che lasciano invariato S.

2.1.2 Problemi

Sia $X \in \mathcal{X}_n$ un germe di campo vettoriale olomorfo. Ci poniamo le seguenti domande:

- La sua decomposizione di Jordan, a priori formale, è convergente? Vale a dire, X_S e X_N sono convergenti? Ovviamente basta studiarne uno solo.

- Se si ha che anche una forma normale è convergente, allora la trasformazione normalizzante è olomorfa? Se non lo è in generale, quando è vero che è olomorfa?

- Dare una condizione su una forma normale per poter affermare che: "tutti i germi formalmente coniugati a questa particolare forma normale sono anche olomorficamente coniugati ad essa".

- Dare una condizione su una forma normale, possibilmente il più simile, se non uguale, alla precedente, per poter affermare che: "se una forma normale non soddisfa tale condizione allora esiste almeno un germe coniugato ad essa formalmente ma non olomorficamente".

2.1.3 Decomposizione spettrale

Sia

$$S := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \partial_j \quad , \qquad \lambda_j \in \mathbb{C},$$

un campo lineare diagonale. Studiamo l'azione (aggiunta) di S su $\widehat{\mathcal{X}}_n$, vale a dire l'operatore di Lie $\mathcal{L}_S(X) := [S, X] := SX - XS$.

Si ponga, come fa Brjuno:

$$X = \sum_{j=1}^{n} \tilde{X}_j x_j \partial_j,$$

dove $\tilde{X}_j := x_j^{-1} X_j$ $(X_j \in \widehat{\mathcal{M}_n})$ potrebbero essere meromorfe.

Con un calcolo immediato otteniamo

$$\mathcal{L}_S(X) = [S, X] = \sum_{j=1}^{n} (S.\tilde{X}_j) x_j \partial_j.$$

Dunque X è un autovettore per l'operatore $\mathcal{L}_S$ con autovalore α se $S.\tilde{X}_j = \alpha \tilde{X}_j$ per $j = 1, \dots, n$. D'altra parte, utilizzando la scrittura con i multiindici,

$$S.x^Q = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j q_j) x^Q = \langle \lambda | Q \rangle \, x^Q.$$

Risulta dunque che

$$\mathcal{L}_S(x^Q x_j \partial_j) = [S, x^Q x_j \partial_j] = \langle \lambda | Q \rangle \, x^Q x_j \partial_j.$$

Quindi abbiamo trovato che alcuni autovalori dell'operatore $\mathcal{L}_S$ in $\widehat{\mathcal{X}}_n$ sono i numeri complessi $\alpha_Q = \langle \lambda | Q \rangle$ dove Q è tale che le sue coordinate q_i sono interi ≥ -1, con al più una sola (la j-esima) uguale a -1, e $|Q| \geq 0$; lo spazio in cui variano i Q sarà denotato con N. L'insieme degli α_Q, denotato con $\mathcal{S}$, è detto lo *spettro* dell'operatore di Lie $\mathcal{L}_S$.

Ad ogni $\alpha \in \mathcal{S}$ corrisponde un autospazio $E_\alpha \subset \widehat{\mathcal{X}}_n$; tale spazio ha come base naturale l'insieme dei campi *monomiali* $x^Q x_j \partial_j$ dove $\alpha = \langle \lambda | Q \rangle$ con $Q \in N_j := \{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ q_j \geq -1, \ q_k \geq 0 \text{ per } k \neq j \text{ e } |Q| \geq 0\}$; $N = \cup_j N_j$.

Poiché i monomi $x^Q x_j \partial_j$ al variare di $j = 1, \dots, n$ e $Q \in N_j$ non sono altro che i monomi $x^P \partial_j$ con $j = 1, \dots, n$ e $P \in \mathbb{N}^n$, essi formano una base di $\widehat{\mathcal{X}}_n$, dunque [1]

$$\widehat{\mathcal{X}}_n = \widehat{\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{S}}} E_\alpha .$$

Poiché abbiamo trovato una base di autovettori (autofunzioni) per l'operatore $\mathcal{L}_S$, abbiamo che ogni autofunzione con autovalore α, cioè elemento di E_α, è allora combinazione lineare infinita di monomi $x^Q x_j \partial_j$ con $\alpha = \langle \lambda | Q \rangle$. Quindi abbiamo trovato tutti gli autovalori dell'operatore $\mathcal{L}_S$.

Dall'identità di Jacobi si ha

$$[E_\alpha, E_\beta] \subseteq E_{\alpha+\beta} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{S},$$

dove però $E_{\alpha+\beta} = 0$ se $\alpha + \beta \notin \mathcal{S}$. Infatti, se $X_\alpha \in E_\alpha$ e $X_\beta \in E_\beta$,

$$\begin{aligned} [S, [X_\alpha, X_\beta]] &= -[X_\alpha, [X_\beta, S]] - [X_\beta, [S, X_\alpha]] \\ &= \beta[X_\alpha, X_\beta] - \alpha[X_\beta, X_\alpha] \\ &= (\alpha+\beta)[X_\alpha, X_\beta]. \end{aligned}$$

Lo spazio E_0 è lo spazio dei campi che commutano con S, sarà particolarmente importante poiché le forme normali con parte semi-semplice S avranno parte nilpotente in E_0.

I generatori di E_0 sono di due tipi:

a) i campi della forma $x^Q x_j \partial_j$, dove $\langle \lambda | Q \rangle = 0$ e i q_k sono tutti non negativi; una Q del genere è detta *risonanza di Siegel*, essa dà luogo all'esistenza di *integrali primi* per il campo S. Infatti, la funzione $x \mapsto x^Q$ (definita anche in 0 poiché $q_j \geq 0$) è costante lungo le orbite di S, essendo

$$S.x^Q = \langle \lambda | Q \rangle \, x^Q = 0.$$

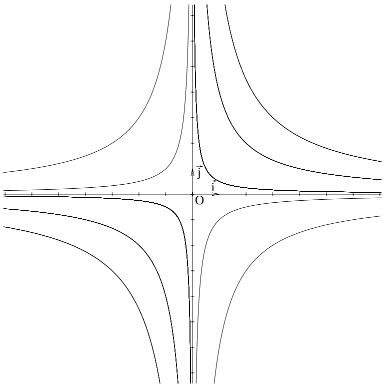
Dunque possiamo dire che ogni orbita di S giace in una foglia della foliazione (singolare in 0)

$$\left\{ x^Q = c \right\}_{c\in\mathbb{C}},$$

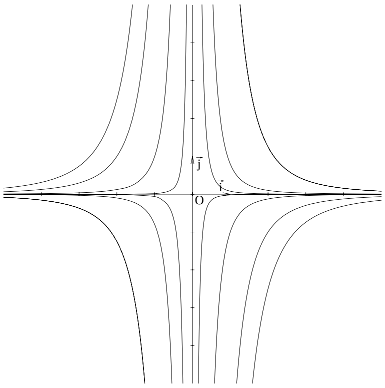
In altre parole, le soluzioni dell'equazione differenziale $\dot{x}(t) = S(x(t))$ sono contenute nelle superfici di livello x^Q =costante.

0 sta solo nella foglia $x^Q = 0$ che non è altro che l'insieme degli assi coordinati $x_k = 0$ tali che $q_k \neq 0$.

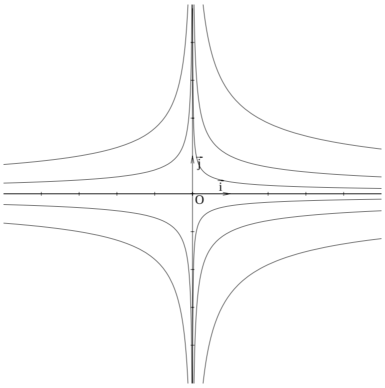
[1] Con $\widehat{\bigoplus}$ si intendono somme infinite.



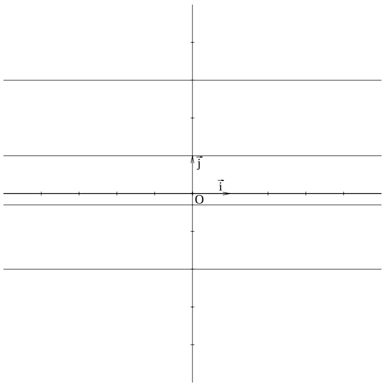
$xy = c$



$yx^3 = c$



$x^2y = c$



$y = c$

Tipo (a)

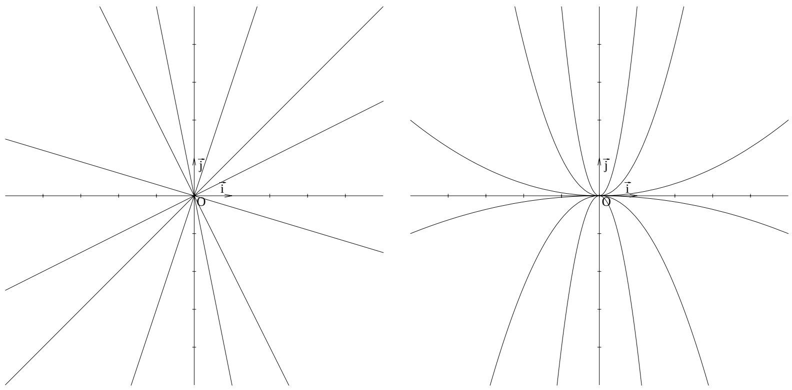
b) i campi $x^Q x_j \partial_j$ dove $\langle \lambda | Q \rangle = 0$ e $q_j = -1$ (le restanti componenti di Q sono non negative). Questi tipi di risonanza, dette *risonanze di Dulac*, danno luogo all'esistenza di *varietà integrali* di S, regolari nell'origine. Infatti, supponendo per semplicità di notazione che $j = 1$, come nel caso precedente S è tangente alle superfici di livello della funzione x^Q la quale però ora non è definita nell'origine. Ma possiamo isolare la variabile x_1 in modo che $Q + e_1$ abbia coordinate non negative, quindi

$$\left\{ x^Q = c \right\} = \left\{ x_1^{-1} x^{Q+e_1} = c \right\}.$$

Dunque la foliazione

$$\left\{ x_1 = \frac{x^{Q+e_1}}{c} \right\}_{c \in \mathbb{C}}$$

è un insieme di varietà integrali per S definite anche in 0. Notiamo che 0 sta in tutte le varietà.



$xy^{-1} = c$ $\qquad$ $x^2y^{-1} = c$

$y = c'x$ $\qquad$ $y = c'x^2$

Tipo (b)

Definizione 2.10 $W \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ *si dice k-piatto se nel suo sviluppo di Taylor sono nulli tutti i termini fino all'ordine k, cioè lo sviluppo parte dai termini di grado* $k+1$*; dunque* $W \in \widehat{\mathcal{M}}_n^k \widehat{\mathcal{X}}_n$.

Proposizione 2.11 ***Invertibilità di*** $\mathcal{L}_X$. *Sia* $X = S + N \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ *una forma normale. Per ogni* α *elemento dello spettro dell'operatore* $\mathcal{L}_S$*, sia* E_α *l'autospazio corrispondente. Allora* $\mathcal{L}_X$ *è invertibile ristretto a* $\bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$ *e la sua inversa è*

$$\mathcal{L}_X^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (\mathcal{L}_S^{-1})^{(l+1)} \circ (\mathcal{L}_N)^l.$$

Se ci si limita ai k-jet si può prendere la somma fino a $2m-1$ *dove* $m = m(k)$ *è tale che* N^m *è nullo ristretto allo spazio dei k-jet. Inoltre, se* W *è k-piatto, anche* $\mathcal{L}_X^{-1}(W)$ *lo è.*

Dimostrazione. Notiamo che

$$\mathcal{L}_S(x^Q x_j \partial_j) = [S, x^Q x_j \partial_j] = \langle \lambda | Q \rangle \, x^Q x_j \partial_j,$$

dove λ è l' n-vettore formato dagli autovalori della parte lineare S.

Quindi $\mathcal{L}_S^{-1}(x^Q x_j \partial_j) = \dfrac{1}{\langle \lambda | Q \rangle} x^Q x_j \partial_j$ per $\langle \lambda | Q \rangle \neq 0$ (i.e., $x^Q x_j \partial_j \notin E_0$).

Notiamo inoltre che $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_N$ e che $\mathcal{L}_S$ commuta con $\mathcal{L}_N$, e pertanto $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_S^{-1}$, $\mathcal{L}_N$ commutano fra loro.

Ora

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X^{-1}\mathcal{L}_X &= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-(l+1)}\mathcal{L}_N^l(\mathcal{L}_S+\mathcal{L}_N)\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l+\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-(l+1)}\mathcal{L}_N^{l+1}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l=(-1)^0\mathcal{L}_S^0\mathcal{L}_N^0=\mathrm{Id}.
\end{aligned}$$

Analogamente $\mathcal{L}_X\mathcal{L}_X^{-1}=\mathrm{Id}$.

Notiamo infine che se limitiamo la serie al termine $2m-1$ dove m è tale che $\pi N^m=0$, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X^{-1}\mathcal{L}_X &= \sum_{l=0}^{2m-1}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-(l+1)}\mathcal{L}_N^l\mathcal{L}_X\\
&= \sum_{l=0}^{2m-1}(-1)^l\mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l+\sum_{l=1}^{2m}(-1)^{l+1}\mathcal{L}_S^{-l}\mathcal{L}_N^l\\
&= \mathrm{Id}+(-1)^{2m+1}\mathcal{L}_S^{-2m}\mathcal{L}_N^{2m};
\end{aligned}$$

ma $\mathcal{L}_N^{2m-1}$ è 0 ristretto ai k-jet poiché $\mathcal{L}_N^{2m-1}(X)$ è composto da monomi del tipo AXB con N^m come fattore in A o in B ma $N^m=0$.

□

Proposizione 2.12 ***Risolubiltà dell'equazione di Lie*** *Sia $X=S+N\in\widehat{\mathcal{X}}_n$ una forma normale; sia $\mathcal{S}\subseteq\mathbb{C}$ lo spettro dell'operatore $\mathcal{L}_S$ su $\widehat{\mathcal{X}}_n$ e siano E_α, $\alpha\in\mathcal{S}$, gli autospazi corrispondenti. Allora per ogni $Y\in\widehat{\mathcal{X}}_n$ fissato, si può risolvere l'equazione*

$$Y=Y_0+[S+N,Z]$$

in modo unico con $Y_0\in E_0$ e $Z\in\bigoplus_{\alpha\neq 0}E_\alpha$. Inoltre, se Y è k-piatto ($Y\in\widehat{\mathcal{M}}_n^k\widehat{\mathcal{X}}_n$), lo sono anche Y_0 e Z.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata dalla proposizione precedente. Infatti, sia Y_0 la proiezione di Y su E_0, dunque $Y=Y_0+W$ con $W\in\bigoplus_{\alpha\neq 0}E_\alpha$, basta prendere $Z=\mathcal{L}_X^{-1}(W)$. Inoltre, se Y è k-piatto, lo sono anche Y_0, W e quindi anche Z.

□

2.2 Normalizzazione (formale) col metodo di Newton

Sia $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$. Supponiamo che X sia già normalizzato fino all'ordine $k \geq 1$, vale a dire

$$X = S + N_1 + R_1,$$

dove $S + N_1$ è una forma normale che rappresenta lo sviluppo di Taylor di X all'ordine k; N_1 è dunque un campo polinomiale di grado k e R_1 è un campo k-piatto.

Consideriamo l'equazione:

$$R_1 = N_1' + [S + N_1, U] \tag{2.3}$$

con incognite N_1' e U. Dalla proposizione precedente sappiamo che è risolvibile con $N_1' \in E_0$ e $U \in \bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$ ed inoltre sono entrambi k-piatti.

Nel seguito, dato un qualsiasi campo $U \in \widehat{\mathcal{X}}_n$, denoteremo con $\exp U$ il flusso al tempo 1 associato al campo vettoriale U.

Proposizione 2.13 ***Il primo passo*** *Sia $\varphi := \exp U$, con U che soddisfa l'equazione (2.3); si ha*

$$\varphi_* X = S + N_1 + N_1' + R_2$$

dove R_2 è $2k$-piatto.

Dimostrazione. Dalla formula classica, vedi [13] pagina 197,

$$(\exp tU)_* X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{L}_U^{\circ n}(X) = X + t[U, X] + \frac{1}{2} t^2 [U, [U, X]] + \dots$$

si ha, chiaramente, che il coefficiente di t è k-piatto, quello di t^2 è $2k$-piatto, $\dots$, quello di t^p è pk-piatto.

Dunque $\varphi_* X \equiv X + [U, X]$ modulo campi $2k$-piatti. Usando la (2.3) si conclude. Infatti,

$$\varphi_* X \equiv S + N_1 + R_1 + [U, S + N_1 + R_1] \equiv S + N_1 + R_1 - [S + N_1, U] = S + N_1 + N_1'$$

modulo campi $2k$-piatti.

□

In conclusione

Teorema 2.14 *Sia $X \in \widehat{\mathcal{X}}_n$ un germe di campo vettoriale formale. Allora tramite un cambio di variabili formale si può portare X in forma normale.*

Dimostrazione. Con le notazioni precedenti, lo sviluppo di Taylor di $\varphi_* X$ all'ordine $2k$ è $S + N_1 + N_1'$ e questo campo polinomiale di grado $2k$

rappresenta, per costruzione, una forma normale di X all'ordine $2k$. Inoltre si ha una costruzione esplicita di un diffeomorfismo normalizzante $(\exp U)$, k-piatto in rapporto all'identità, nel senso che esso meno l'identità è k-piatto.

Si ottiene lo stesso risultato risolvendo la (2.3) modulo campi $2k$-piatti, vale a dire utilizzando solo gli sviluppi di Taylor all'ordine $2k$ di N_1' e U, ottenendo così campi polinomiali.

Se si itera questa procedura, si ottiene un metodo per la normalizzazione formale tale che l'ordine di approssimazione (della forma normale e del diffeomorfismo normalizzante) duplica ad ogni tappa; questo si chiama metodo di Newton.

□

2.3 Normalizzazione di campi olomorfi semi-semplici

Teorema 2.15 ***(Brjuno)****(caso semi-semplice)*

Sia $X \in \mathcal{X}_n$ un germe di campo vettoriale olomorfo, tale che gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ della sua parte lineare in 0 soddisfano la condizione aritmetica ω (sotto). Se X è formalmente semi-semplice, allora è olomorficamente coniugato a $S := \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \partial_j$.

2.3.1 La condizione aritmetica ω introdotta da A. D. Brjuno

Sia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Poniamo, per ogni $k \geq 0$:

$$\omega_\Lambda(2^k) := \min\{|\langle Q|\lambda\rangle| \ : \ \langle Q|\lambda\rangle \neq 0,\ |Q| \leq 2^{k+1},\ Q \in N\},$$

brevemente, con le notazioni precedenti,

$$\omega_k := \min\{|\alpha_Q| \bigm| \alpha_Q \neq 0,\ |Q| \leq 2^{k+1}\},$$

La condizione ω si enuncia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^k} \log \omega_k \ < \ +\infty.$$

2.3.2 Dimostrazione del teorema di Brjuno nel caso semi-semplice

L'idea è classica: si utilizza il metodo precedente di normalizzazione di Newton e si stima il raggio di convergenza del diffeomorfismo finale tramite un metodo di "conteggi successivi".

Notazioni: Dato $\rho > 0$, sia $D_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n \;:\; |x_j| \leq \rho\}$ il polidisco di raggio ρ. Se $f = \sum_Q f_Q x^Q$ è una funzione olomorfa su un intorno di D_ρ, poniamo $\|f\|_\rho = \sum_Q |f_Q| \rho^{|Q|}$. Se X è un campo di vettori, $\|X\|_\rho$ designerà la più grande delle norme delle sue componenti nel senso precedente, viste come funzioni.

Sia $S = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \partial_j$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ verificante ω. Supponiamo inoltre che ω_k siano ≤ 1. Se così non fosse saremmo nel caso di Poincaré.

Poniamo:

$$\sigma_k := (\omega_k)^{1/m} m^{-2/m}$$

e

$$\tau_k := (\omega_k)^{1/m} m^{-1/m}$$

dove $m = 2^k$. Si ha $\sigma_k < \tau_k < 1$ e, dalla condizione ω, $\sigma_k \to 1$ quando $k \to \infty$.

Ci servirà una stima di quanto variano i raggi di convergenza ad ogni passo, ma prima serve un lemma:

Lemma 2.16 *Se k è abbastanza grande allora per ogni $\rho \geq \frac{1}{2}$ si ha*

$$\sigma_k \rho + \frac{1}{2^k} < \tau_k \rho.$$

Dimostrazione. Detto $m = 2^k$ e sostituendo le definizioni di σ_k e τ_k, si vuole dimostrare che

$$(\omega_k)^{1/m} m^{-2/m} \rho + m^{-1} < (\omega_k)^{1/m} m^{-1/m} \rho$$

cioè

$$\frac{1}{m} < (\omega_k)^{1/m} m^{-1/m} (1 - m^{-1/m}) \rho.$$

Poiché $\rho \geq \frac{1}{2}$, basta dimostrare che

$$\frac{2}{m} < (\omega_k)^{1/m} m^{-1/m} (1 - m^{-1/m}).$$

Siccome, $m^{-1/m}$ e $(\omega_k)^{1/m}$ tendono a 1 (il secondo poiché se una serie converge (condizione ω) il termine della somma deve essere infinitesimo) risulta che

$$(\omega_k)^{1/m} m^{-1/m} \left(\frac{1 - m^{-1/m}}{2/m} \right) \longrightarrow +\infty$$

se $k \longrightarrow +\infty$, poiché $\dfrac{1 - x^x}{x} \longrightarrow +\infty$ se $x \longrightarrow 0$.

Quindi per k grande $(\omega_k)^{1/m} m^{-1/m} \left(\dfrac{1 - m^{-1/m}}{2/m} \right)$ è maggiore di 1.

□

Proposizione 2.17 *(Stime per l'Iterazione) Sia* $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$*, e sia* Y *un campo di vettori olomorfo sul polidisco* D_ρ*,* 2^k*-piatto in 0 (*k *che soddisfa il lemma precedente), con* $\|Y\|_\rho < 1$*. Sia* U *il campo polinomiale di grado* 2^{k+1} *soluzione dell'equazione:*

$$Y \equiv Y_0 + [S, U]$$

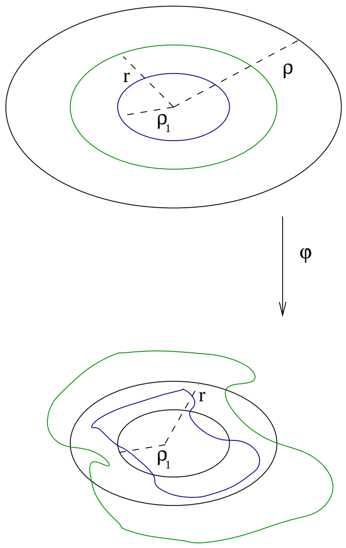
modulo campi 2^{k+1}*-piatti (*$Y_0 \in E_0$*). Allora:*

(a) detto $r := \tau_k \rho$ *si ha*

$$\|U\|_r < \frac{1}{2^k};$$

(b) detto $\rho_1 := \sigma_k \rho$ *e* $\varphi := \exp U$ *si ha*

$$\varphi(D_r) \supset D_{\rho_1} \quad \text{e} \quad \varphi(D_{\rho_1}) \subseteq D_r;$$



(c) detto $Y_1 := \varphi_*(S + Y) - S$ *si ha*

$$\|Y_1\|_{\rho_1} < 1.$$

Dimostrazione. (a)

$$U = \sum_{j=1}^{n} \tilde{U}^j x^j \partial_j \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}^j x^j \partial_j$$

$$\tilde{U}^j = \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \alpha_Q \neq 0}} \tilde{U}^j_Q x^Q \qquad \tilde{Y}^j = \sum_{|Q| \geq 2^k} \tilde{Y}^j_Q x^Q$$

$$\tilde{U}^j = \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \alpha_Q \neq 0}} \frac{\tilde{Y}_Q^j}{\alpha_Q} x^Q$$

$$\left\|U^j\right\|_\rho = \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \alpha_Q \neq 0}} \frac{|\tilde{Y}_Q^j|}{|\alpha_Q|} \rho^{|Q|} \rho \leq \frac{1}{\omega_k} \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \alpha_Q \neq 0}} |\tilde{Y}_Q^j| \rho^{|Q|} \rho = \frac{1}{\omega_k} \left\|Y^j\right\|_\rho \leq \frac{1}{\omega_k} \left\|Y\right\|_\rho .$$

Passo al sup su j

$$\left\|U\right\|_\rho \leq \frac{1}{\omega_k} \left\|Y\right\|_\rho \leq \frac{1}{\omega_k}.$$

Cambio raggio, usando che $\dfrac{r}{\rho} < 1$

$$\left\|U^j\right\|_r = \sum_{2^k < |Q| \leq 2^{k+1}} |U_Q^j| r^{|Q|} = \sum_{2^k < |Q| \leq 2^{k+1}} |U_Q^j| \rho^{|Q|} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|Q|} \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2^k} \left\|U^j\right\|_\rho .$$

Passo al sup su j

$$\left\|U\right\|_r \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2^k} \left\|U\right\|_\rho \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2^k} \frac{1}{\omega_k} = (\tau_k)^{2^k} \frac{1}{\omega_k} = \frac{1}{2^k}.$$

(b) Ricordiamo che φ è la mappa flusso a tempo 1 dell'equazione differenziale associata ad U, i.e., $\dot{x} = U$,

$$|\dot{x}| = |U| < \frac{1}{2^k} \quad \forall x \in D_r$$

dunque se $x \in D_{\rho_1}$ allora $\varphi(x) \in D_{\rho_1 + 1/2^k} \subseteq D_r$ (il lemma precedente afferma proprio che $\rho_1 + 1/2^k < r$); poiché un punto che si muove con velocità al massimo $\frac{1}{2^k}$ per un tempo 1 non si può allontanare più di $\frac{1}{2^k}$.

L'altro contenimento vale poiché $\varphi^{-1} = \exp(-U)$ è per $-U$ vale la stessa stima di U.

(c) Dimostrazione omessa.

□

Siamo pronti per dare la dimostrazione del teorema di Brjuno nel caso semi-semplice. Attenzione che semi-semplice non vuol dire non risonante, bensì che il campo lineare associato al differenziale è una forma normale per il campo di partenza.

Dimostrazione del teorema.

Sia X un campo olomorfo, formalmente semi-semplice, che soddisfa la condizione ω.

i) la condizione ω, letta passando agli esponenziali, afferma che il prodotto infinito $\prod_k \sigma_k$ è convergente, quindi la coda tende a 1. Si scelga un intero p tale che

$$\frac{1}{2} < \prod_{k \geq p} \sigma_k < 1.$$

ii) Si può supporre il campo X normalizzato fino all'ordine 2^p, vale a dire che

$$X = S + Y_p$$

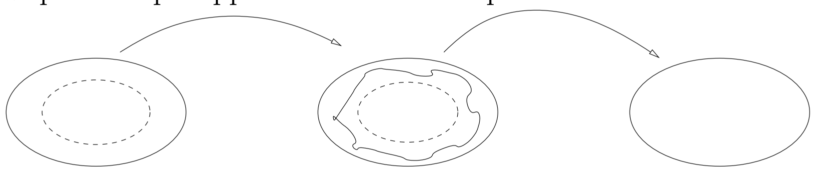
e Y_p è 2^p-piatto; inoltre, tramite un'omotetia di $\mathbb{C}^n$, si può supporre Y_p olomorfo su D_1 e $\|Y_p\|_1 < 1$.

Applichiamo la proposizione precedente con $Y_p = Y$ e $\rho = 1$. Si ottiene (proposizione 2.13) una normalizzazione di X all'ordine 2^{p+1}:

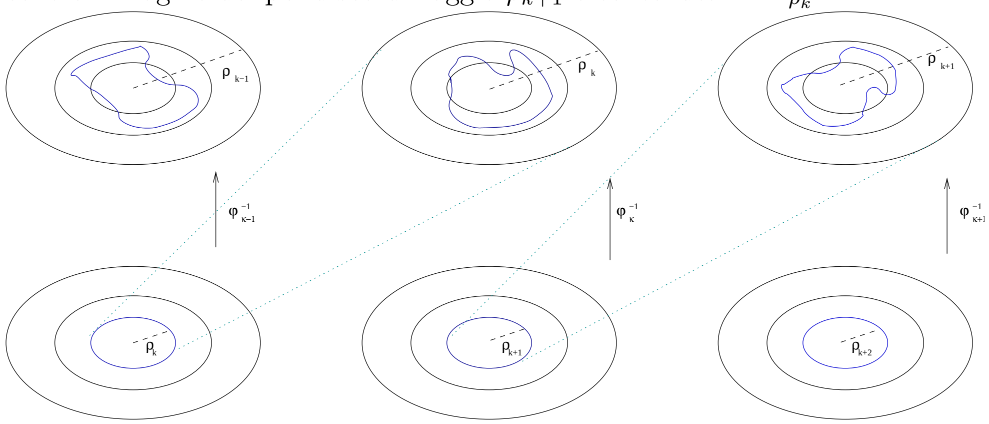
$$(\varphi_p)_* X = S + Y_{p+1}$$

e Y_{p+1} è 2^{p+1}-piatto; non ci sono parti risonanti per l'ipotesi che X sia semi-semplice. La proposizione mostra che Y_{p+1} ha norma < 1 (per il punto c) su D_{σ_p} e che il diffeomorfismo normalizzante è $1/2^p$-vicino all'identità su D_{τ_p} (per il punto a).

Si può dunque applicare il lemma a ripetizione.



Considero la composizione delle inverse. Ogni mappa φ_k è tale che la controimmagine del polidisco di raggio ρ_{k+1} è contenuta in D_{ρ_k}.



Dunque la composizione $\varphi_k^{-1}\varphi_{k+1}^{-1}$ è definita in $D_{\sigma_k \sigma_{k+1}}$ e così via... La composizione dei diffeomorfismi successivi converge sul polidisco D_σ con $\sigma = \prod_{k \geq p} \sigma_k$ (per il punto b), la dimostrazione è quindi conclusa.

$\square$

2.3.3 Necessità di una condizione aritmetica

Teorema 2.18 *Se il campo lineare $S := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \partial_j$ verifica la condizione $\bar{\omega}$ (sotto), esiste un campo olomorfo Y, 1-piatto in 0, tale che:*

i) *$S + Y$ è semisemplice (quindi formalmente coniugato a S)*

ii) *$S + Y$ non è olomorficamente linearizzabile.*

Condizione $\bar{\omega}$

$$\limsup_{m \to +\infty} -\frac{1}{2^k} \log \omega_k \ = \ +\infty.$$

Capitolo 3

Forme normali di mappe olomorfe

3.1 Decomposizione di Jordan di un campo formale

Sia $\mathcal{O}_n$ (risp. $\widehat{\mathcal{O}}_n$) l'anello dei germi in 0 delle funzioni olomorfe in n variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$ (risp. le serie formali in n variabili); indicheremo con $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{O}_n$ (risp. $\widehat{\mathcal{M}}_n \subset \widehat{\mathcal{O}}_n$) l'ideale massimale, i.e., i germi che si annullano in 0.

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$; tale mappa induce una derivazione f^* su $\widehat{\mathcal{O}}_n$

$$f^* \ : \ \varphi \longmapsto f^*.\varphi := \varphi \circ f$$

ed essendo f nulla nell'origine, con un calcolo simile a quello fatto per campi vettoriali, si mostra che questa derivazione lascia stabile ogni potenza dell'ideale massimale $\widehat{\mathcal{M}}_n$. Possiamo ridurci all'algebra dei k-jet J_n^k di elementi di $\widehat{\mathcal{O}}_n$; poiché tale algebra ha dimensione finita, la derivazione indotta da f^* diventa un'applicazione lineare in dimensione finita e sarà indicata con $f^{*(k)}$. Siano $\iota : \{k\text{−jet}\} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_n$ l'iniezione canonica e $\pi : \widehat{\mathcal{O}}_n \hookrightarrow \{k\text{−jet}\}$ la proiezione. Allora

$$\begin{array}{cccc} f^{*(k)}: & \{k\text{−jet}\} & \longrightarrow & \{k\text{−jet}\} \\ & \downarrow \iota & & \uparrow \pi \\ f^*: & \widehat{\mathcal{O}}_n & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_n \end{array} .$$

Poiché $f^{*(k)}$ è un'applicazione lineare di uno spazio di dimensione finita, ammette una decomposizione di Jordan. Notiamo che una matrice in forma di Jordan è scritta come $\Lambda + M$ con Λ diagonalizzabile e M nilpotente e tali che commutano tra loro; ma possiamo anche scrivere

$$\Lambda + M = \Lambda(\mathrm{id} + \Lambda^{-1}M) = \Lambda(\mathrm{id} + N) = (\mathrm{id} + N)\Lambda$$

con Λ diagonalizzabile e N nilpotente.

Dunque possiamo scrivere

$$f^{*(k)} = f_S^{*(k)} \circ \left(\mathrm{id} + f_N^{*(k)}\right) = \left(\mathrm{id} + f_N^{*(k)}\right) \circ f_S^{*(k)}$$

dove $f_S^{*(k)}$ e $\mathrm{id} + f_N^{*(k)}$ sono le parti semi-semplice e identità+nilpotente di $f^{*(k)}$, cioè $f_S^{*(k)}$ è diagonalizzabile mentre $f_N^{*(k)}$ è nilpotente.

Se $l < k$ i k-jet sono contenuti negli l-jet e il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{cccc} f^{*(l)}: & \{l\text{-jet}\} & \longrightarrow & \{l\text{-jet}\} \\ & \downarrow \iota_{lk} & & \uparrow \pi_{kl} \\ f^{*(k)}: & \{k\text{-jet}\} & \longrightarrow & \{k\text{-jet}\} \\ & \downarrow \iota & & \uparrow \pi \\ f^{*}: & \widehat{\mathcal{O}}_n & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_n \end{array} \tag{3.1}$$

Dunque le decomposizioni ai diversi ordini sono compatibili per troncamento; in questo modo si ottiene, quando $k \to \infty$, una *decomposizione canonica*:

$$f^* = f_S^* \circ (\mathrm{id} + f_N^*) = (\mathrm{id} + f_N^*) \circ f_S^*.$$

La mapppa si decompone in

$$f = f_S \circ (\mathrm{id} + f_N) = (\mathrm{id} + f_N) \circ f_S,$$

con $f_S, f_N \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ tali che f_S induce un operatore lineare (f_S^*) semi-semplice e f_N induce un operatore lineare (f_S^*) nilpotente se ristretto ai k-jet.

Questa decomposizione è chiamata *decomposizione di Jordan* della mappa f.

3.1.1 Problemi

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ un germe di mappa olomorfa. Ci poniamo le seguenti domande:

- La sua decomposizione di Jordan, a priori formale, è convergente? Vale a dire, f_S e f_N sono convergenti? Ovviamente basta studiarne uno solo.
- Se si ha che anche una forma normale è convergente, allora la trasformazione normalizzante è olomorfa? Se non lo è in generale, quando è vero che è olomorfa?
- Dare una condizione su una forma normale per poter affermare che: "tutti i germi formalmente coniugati a questa particolare forma normale sono anche olomorficamente coniugati ad essa".

- Dare una condizione su una forma normale, possibilmente il più simile, se non uguale, alla precedente, per poter affermare che: “se una forma normale non soddisfa tale condizione allora esiste almeno un germe coniugato ad essa formalmente ma non olomorficamente”.

3.1.2 Decomposizione spettrale

Sia

$$\Lambda(x) := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j e_j \quad , \qquad \lambda_j \in \mathbb{C},$$

una mappa lineare diagonale. Studiamo l'azione (aggiunta) di Λ su $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$, vale a dire l'operatore di coniugio tramite la composizione

$$\mathcal{L}_\Lambda(\psi) := D_2\mathcal{F}(\Lambda, \mathrm{id})\psi := \Lambda \circ \psi - \psi \circ \Lambda.$$

Si ponga,

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\psi}_j e_j.$$

Con un calcolo immediato otteniamo

$$\mathcal{L}_\Lambda(\psi) = \Lambda \circ \psi - \psi \circ \Lambda = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j \tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j \circ \Lambda) e_j.$$

D'altra parte, utilizzando la scrittura con i multiindici e scrivendo $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,

$$x^P \circ \Lambda = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{p_j} x^P = \lambda^P x^P.$$

Risulta dunque che

$$\mathcal{L}_\Lambda(x^P e_j) = (\lambda_j - \lambda^P) x^P e_j.$$

Quindi abbiamo trovato che alcuni autovalori dell'operatore $\mathcal{L}_\Lambda$ in $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ sono i numeri complessi $\alpha_{jP} = \lambda_j - \lambda^P$ con $P \in \mathbb{N}^n$ L'insieme dei α_{jP}, denotato con $\mathcal{S}$, è detto lo spettro dell'operatore di coniugio $\mathcal{L}_\Lambda$.

Ad ogni $\alpha \in \mathcal{S}$ corrisponde un autospazio $E_\alpha \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$; tale spazio ha come base naturale l'insieme delle mappe *monomiali* $x^P e_j$ dove $\alpha = \lambda_j - \lambda^P$. Abbiamo mostrato la seguente

Osservazione 3.1 *$\mathcal{L}_\Lambda$ è invertibile ristretto a $\bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$ e la sua inversa è*

$$\mathcal{L}_\Lambda^{-1}(x^P e_j) = \frac{1}{\alpha_{jP}} x^P e_j$$

per $\alpha_{jP} = \lambda_j - \lambda^P \neq 0$ (i.e., $x^P e_j \notin E_0$).

Poiché i monomi $x^P e_j$ al variare di $j = 1, \dots, n$ e $P \in \mathbb{N}^n$ formano una base di $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$, dunque [1]

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0) = \widehat{\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{S}}} E_\alpha.$$

Poiché abbiamo trovato una base di autovettori (autofunzioni) per l'operatore $\mathcal{L}_\Lambda$, abbiamo che ogni autofunzione con autovalore α, cioè elemento di E_α, è allora combinazione lineare infinita di monomi $x^P e_j$ con j e P tali che $\alpha = \lambda_j - \lambda^P$. Quindi abbiamo trovato tutti gli autovalori dell'operatore $\mathcal{L}_\Lambda$.

Lo spazio E_0 è lo spazio dei commutatori di Λ, sarà particolarmente importante poiché le forme normali con parte semi-semplice Λ avranno parte nilpotente in E_0.

Estendiamo la nozione di operatore $\mathcal{L}$ anche quando non dipende da una mappa lineare Λ:

Definizione 3.2

$$\mathcal{L}_G(\psi) := D_2\mathcal{F}(G, \mathrm{id})\psi = dG \circ \psi - \psi \circ G.$$

Osservazione 3.3 *$\mathcal{L}_G(\psi)$ è lineare in ψ ma non in G .*

Definizione 3.4 *$W \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ si dice k-piatto se nel suo sviluppo di Taylor sono nulli tutti i termini fino all'ordine k, cioè lo sviluppo parte dai termini di grado $k+1$; dunque $W \in \widehat{\mathcal{M}}_n^k \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$.*

Proposizione 3.5 ***Invertibilità di $\mathcal{L}_G$.*** *Sia $G = \Lambda + N \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ una forma normale. Per ogni α elemento dello spettro dell'operatore $\mathcal{L}_\Lambda$, sia E_α l'autospazio corrispondente. Allora $\mathcal{L}_G$ è invertibile ristretto a $\bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$.*

Non c'è una semplice dimostrazione di questo fatto come nel caso dei campi vettoriali; la verifica va fatta in coordinate, vedi capitoli successivi.

□

Proposizione 3.6 ***Risolubiltà dell'equazione omologica.*** *Sia $G = \Lambda + N \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ una forma normale; sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ lo spettro dell'operatore $\mathcal{L}_\Lambda$ su $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ e siano E_α, $\alpha \in \mathcal{S}$, gli autospazi corrispondenti. Allora per ogni $Y \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ fissato, si può risolvere l'equazione*

$$Y = Y_0 + \mathcal{L}_{\Lambda+N}(\phi)$$

in modo unico con $Y_0 \in E_0$ e $\phi \in \bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$. Inoltre, se Y è k-piatto ($Y \in \widehat{\mathcal{M}}_n^k \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$), lo sono anche Y_0 e ϕ.

[1] Con $\widehat{\bigoplus}$ si intende somme infinite.

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata dalla proposizione precedente. Infatti, sia Y_0 la proiezione di Y su E_0, dunque $Y = Y_0 + W$ con $W \in \bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$, basta prendere $\phi = \mathcal{L}_X^{-1}(W)$. Inoltre, se Y è k-piatto, lo sono anche Y_0, W e quindi anche ϕ.

□

3.2 Normalizzazione (formale) col metodo di Newton

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$. Supponiamo che f sia già normalizzato fino all'ordine $k \geq 1$, vale a dire

$$f = \Lambda + N_1 + R_1,$$

dove $\Lambda + N_1$ è una forma normale che rappresenta lo sviluppo di Taylor di f all'ordine k; N_1 è dunque un mappa polinomiale di grado k e R_1 è una mappa k-piatto.

Consideriamo l'equazione:

$$R_1 = N_1' + \mathcal{L}_{\Lambda+N_1}(\phi) \tag{3.2}$$

con incognite N_1' e ϕ. Dalla proposizione precedente sappiamo che è risolvibile con $N_1' \in E_0$ e $\phi \in \bigoplus_{\alpha \neq 0} E_\alpha$ ed inoltre sono entrambi k-piatti.

Proposizione 3.7 ***Il primo passo*** *Sia ϕ soddisfacente l'equazione (3.2); si ha, ponendo $h = \mathrm{id} - \phi$,*

$$h^{-1} \circ f \circ h = \Lambda + N_1 + N_1' + R_2$$

dove R_2 è $2k$-piatto.

Dimostrazione. Usiamo lo sviluppo ai primi termini dell'operatore coniugio. Si ha, usando la (3.2) con $G = \Lambda + N_1$,

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ f \circ h &= G + (f - G) + D_2\mathcal{F}(G, \mathrm{id})(-\phi) + \mathcal{R}(f, h) \\
&= \Lambda + N_1 + (f - \Lambda - N_1) - \mathcal{L}_{\Lambda+N_1}(\phi) + o(f - G) \\
&= \Lambda + N_1 + R_1 - R_1 + N_1' + o(f - \Lambda - N_1) \\
&= \Lambda + N_1 + N_1' + o(R_1).
\end{aligned}$$

se R_1 è k-piatto, allora $o(R_1)$ è più piatto, esattamente $2k$-piatto.

□

In conclusione

Teorema 3.8 *Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ un germe di mappa formale. Allora tramite un cambio di variabili formale si può portare f in forma normale.*

Dimostrazione. Con le notazioni precedenti, lo sviluppo di Taylor di $h_* f$ all'ordine $2k$ è $\Lambda + N_1 + N_1'$ e questa mappa polinomiale di grado $2k$ rappresenta, per costruzione, una forma normale di f all'ordine $2k$. Inoltre si ha una costruzione esplicita di un diffeomorfismo normalizzante (h), k-piatto in rapporto all'identità, nel senso che esso meno l'identità è k-piatto.

Se si itera questa procedura, si ottiene un metodo per la normalizzazione formale tale che l'ordine di approssimazione (della forma normale e del diffeomorfismo normalizzante) duplica ad ogni tappa; questo si chiama metodo di Newton.

□

3.3 Normalizzazione di mappe olomorfe semi-semplici

Teorema 3.9 ***(Brjuno)****(caso semi-semplice)*

Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n, 0)$ un germe di mappa olomorfa, tale che gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ della sua parte lineare in 0 soddisfano la condizione aritmetica ω (sotto). Se f è formalmente semi-semplice, allora è olomorficamente coniugato a $\Lambda(x) := \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j e_j$.

3.3.1 La condizione aritmetica ω per mappe olomorfe

Sia $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Poniamo, per ogni $k \geq 0$:

$$\omega_\Lambda(2^k) := \min\{|\lambda^Q| \ : \ \lambda^Q \neq 0,\ |Q| \leq 2^{k+1},\ Q \in \mathbb{N}^n\},$$

brevemente, con le notazioni precedenti,

$$\omega_k := \min\{|\alpha_Q| \bigm| \alpha_Q \neq 0,\ |Q| \leq 2^{k+1}\},$$

La condizione ω si enuncia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^k} \log \omega_k \ < \ +\infty.$$

3.3.2 Dimostrazione del teorema di Brjuno nel caso semi-semplice

L'idea è classica: si utilizza il metodo precedente di normalizzazione di Newton e si stima il raggio di convergenza del diffeomorfismo finale tramite un metodo di "conteggi successivi".

Notazioni: Dato $\rho > 0$, sia $D_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n \ : \ |x_j| \leq \rho\}$ il polidisco di raggio ρ. Se $f = \sum_Q f_Q x^Q$ è una funzione olomorfa su un intorno di

D_ρ, poniamo $\|f\|_\rho = \sum_Q |f_Q|\rho^{|Q|}$. Se f è una mappa, $\|f\|_\rho$ designerà la più grande delle norme delle sue componenti nel senso precedente, viste come funzioni.

Sia $\Lambda(x) := \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j e_j$ verificante ω. Supponiamo inoltre che ω_k siano ≤ 1. Se così non fosse saremmo nel caso di Poincaré.

Poniamo:

$$\sigma_k := (\omega_k)^{1/m} m^{-2/m}$$

e

$$\tau_k := (\omega_k)^{1/m} m^{-1/m}$$

dove $m = 2^k$. Si ha $\sigma_k < \tau_k < 1$ e, dalla condizione ω, $\sigma_k \to 1$ quando $k \to \infty$.

Ricordo che dal lemma (2.16) si ha

$$\sigma_k \rho + \frac{1}{2^k} < \tau_k \rho.$$

Proposizione 3.10 *(Stime per l'Iterazione) Sia $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, e sia g una mappa olomorfa sul polidisco D_ρ, 2^k-piatta in 0 (k che soddisfa il lemma precedente), con $\|g\|_\rho < 1$. Sia ϕ la mappa polinomiale di grado 2^{k+1} soluzione dell'equazione:*

$$g \equiv g_0 + \mathcal{L}_\Lambda \phi$$

modulo mappe 2^{k+1}-piatte ($g_0 \in E_0$). Allora:

(a) detto $r := \tau_k \rho$ si ha

$$\|\phi\|_r < \frac{1}{2^k};$$

(b) detto $\rho_1 := \sigma_k \rho$ e $\varphi := \exp U$ si ha

$$\varphi(D_r) \supset D_{\rho_1} \quad \text{e} \quad \varphi(D_{\rho_1}) \subseteq D_r;$$

(c) detto $Y_1 := \varphi_*(S+Y) - S$ si ha

$$\|Y_1\|_{\rho_1} < 1.$$

Dimostrazione. (a)

$$\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j e_j \qquad g = \sum_{j=1}^n g_j e_j$$

$$\phi_j = \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \lambda^Q \neq \lambda_j}} \phi_Q^j x^Q \qquad g_j = \sum_{|Q| \geq 2^k} g_Q^j x^Q$$

$$\phi_j = \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \alpha_Q \neq 0}} \frac{g_Q^j}{\alpha_{jQ}} x^Q$$

$$\|\phi_j\|_\rho = \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \alpha_{jQ} \neq 0}} \frac{|g_Q^j|}{|\alpha_{jQ}|} \rho^{|Q|} \leq \frac{1}{\omega_k} \sum_{\substack{2^k \leq |Q| < 2^{k+1} \\ \alpha_Q \neq 0}} |g_Q^j| \rho^{|Q|} = \frac{1}{\omega_k} \left\| g^j \right\|_\rho \leq \frac{1}{\omega_k} \|g\|_\rho .$$

Passo al sup su j

$$\|\phi\|_\rho \leq \frac{1}{\omega_k} \|g\|_\rho \leq \frac{1}{\omega_k}.$$

Cambio raggio, usando che $\dfrac{r}{\rho} < 1$

$$\|\phi_j\|_r = \sum_{2^k < |Q| \leq 2^{k+1}} |\phi_Q^j| r^{|Q|} = \sum_{2^k < |Q| \leq 2^{k+1}} |\phi_Q^j| \rho^{|Q|} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|Q|} \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2^k} \|\phi_j\|_\rho .$$

Passo al sup su j

$$\|\phi\|_r \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2^k} \|\phi\|_\rho \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2^k} \frac{1}{\omega_k} = (\tau_k)^{2^k} \frac{1}{\omega_k} = \frac{1}{2^k}.$$

(b) Dimostrazione omessa.
(c) Dimostrazione omessa.

□

Siamo pronti per dare la dimostrazione del teorema di Brjuno nel caso semi-semplice. Attenzione che semi-semplice non vuol dire non risonante, bensì che la mappa lineare associata al differenziale è una forma normale per la mappa di partenza.

Dimostrazione del teorema.

Sia f una mappa olomorfa, formalmente semi-semplice, che soddisfa la condizione ω.

i) la condizione ω, letta passando agli esponenziali, afferma che il prodotto infinito $\prod_k \sigma_k$ è convergente, quindi la coda tende a 1. Si scelga un intero p tale che

$$\frac{1}{2} < \prod_{k \geq p} \sigma_k < 1.$$

ii) Si può supporre la mappa f normalizzata fino all'ordine 2^p, vale a dire che

$$f = \Lambda + g_p$$

e g_p è 2^p-piatto; inoltre, tramite un'omotetia di $\mathbb{C}^n$, si può supporre g_p olomorfo su D_1 e $\|g_p\|_1 < 1$.

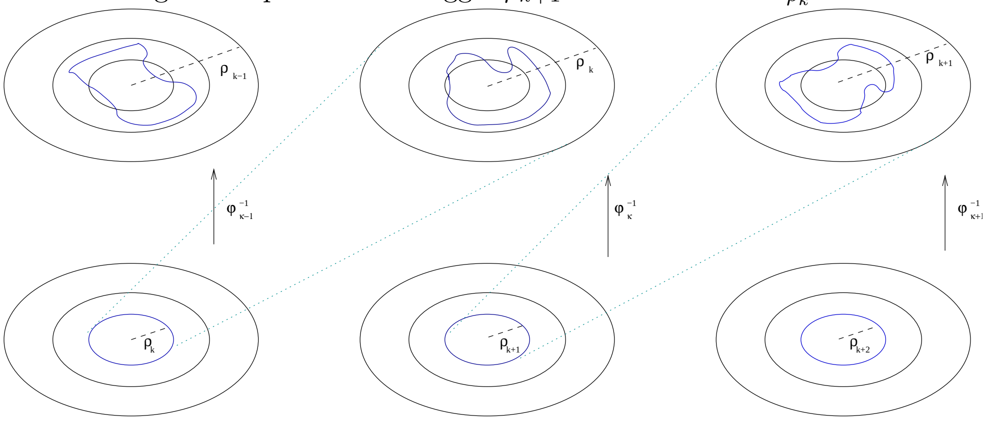
Applichiamo la proposizione precedente con $g_p = g$ e $\rho = 1$. Si ottiene (proposizione 3.7) una normalizzazione di f all'ordine 2^{p+1}:

$$(h_p)_* f = h_p^{-1} \circ f \circ h_p = \Lambda + g_{p+1}$$

e g_{p+1} è 2^{p+1}-piatto; non ci sono parti risonanti per l'ipotesi che f sia semi-semplice. La proposizione mostra che g_{p+1} ha norma < 1 (per il punto c) su D_{σ_p} e che il diffeomorfismo normalizzante è $1/2^p$-vicino all'identità su D_{τ_p} (per il punto a).

Si può dunque applicare il lemma a ripetizione.

Considero la composizione delle inverse. Ogni mappa φ_k è tale che la controimmagine del polidisco di raggio ρ_{k+1} è contenuta in D_{ρ_k}.



Dunque la composizione $\varphi_k^{-1}\varphi_{k+1}^{-1}$ è definita in $D_{\sigma_k \sigma_{k+1}}$ e così via... La composizione dei diffeomorfismi successivi converge sul polidisco D_σ con $\sigma = \prod_{k \geq p} \sigma_k$ (per il punto b), la dimostrazione è quindi conclusa.

$\square$

Capitolo 4

Condizione A & normalizzazione olomorfa di campi vettoriali

Nel seguito vogliamo cercare di utilizzare il fatto che in $\mathbb{C}^n$ vi sono delle coordinate standard con le quali è più facile fare stime e conti. Comunque, essendo i nostri oggetti in esame locali, non si perderà di generalità.

4.0.3 Introduzione

Sia X un campo vettoriale olomorfo su una varietà complessa definito in un intorno di un punto p, e supponiamo che p sia un punto singolare, i.e., $X(p) = O$. Letto in carte centrate in p, X diventa un germe di un campo olomorfo $\mathbf{X} : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, dove n è la dimensione della varietà. Quindi, se indichiamo[1] con $\mathbf{z}$ il vettore $(z_1, \ldots, z_n)$ possiamo ridurci a studiare i campi olomorfi della forma

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) \;=\; L\mathbf{z} + O(|\mathbf{z}|^2)$$

definiti in un intorno dell'origine. L, la parte lineare di $\mathbf{X}$ in $\mathbf{0}$, può essere identificata con una matrice $n \times n$ e, a meno di un cambio di coordinate lineare, possiamo supporre che sia già nella forma canonica di Jordan [2]. Con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ indichiamo gli autovalori di L contati con molteplicità e[3]

[1] Se una lettera è in grassetto vuol dire che indica un vettore.

[2] Non stiamo facendo nessuna assunzione sulla linearizzabilità di L; per questo motivo non la chiameremo Λ se non quando sarà diagonale.

[3] Nel seguito indicheremo con Diag l'n-upla degli n numeri posti sulla diagonale di una matrice in forma di Jordan, vale a dire gli n autovalori contati con molteplicità.

$\lambda := \mathrm{Diag}(L) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}$. Quindi

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \epsilon_2 & \lambda_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \epsilon_{n-1} & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \epsilon_n & \lambda_n \end{pmatrix},$$

con $\epsilon_j = 0, 1$ e se $\epsilon_j = 1$ allora $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. Inoltre poniamo per convenzione $\epsilon_1 = 0$.

Ci chiediamo se esista un cambio di coordinate olomorfo

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}), \text{ con } \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

tale che il campo nelle coordinate $\mathbf{w}$ sia un campo lineare; oppure, se ciò non è possibile, ci si vorrà comunque ridurre a qualche forma più semplice da studiare. Vorremo inoltre trovare il biolomorfismo $\mathbf{h}$ vicino all'identità e si spera che imponendo la condizione

$$\mathrm{D}\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathrm{id},$$

si abbia unicità.

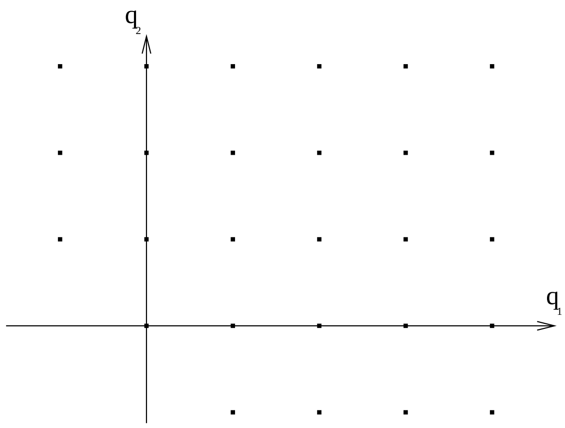
Poincaré iniziò lo studio di questo problema nella sua tesi di dottorato [27]. Per l'esposizione di questo paragrafo seguiremo l'articolo [7] di Brjuno con l'aggiunta di preziosi commenti di Martinet [21].

4.1 Forme normali

Ricordo le notazioni:

$N_j \;= \{Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}^n \;:\; q_j \geq -1,\; q_l \geq 0 \;\forall l \neq j;\; \|Q\| \geq 0\}.$

$N \;= N_1 \cup \cdots \cup N_n.$



N in dimensione 2.

Poiché $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ è olomorfo, possiamo scriverlo in serie di potenze; usando la notazione dei multiindici e ricordando che $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n} f^j(\mathbf{z})\partial_j = \sum_{j=1}^{n} z_j F^j(\mathbf{z})\partial_j = \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{Q \in N_j} F^j_Q \mathbf{z}^Q \partial_j.$$

Attenzione: le F^j non sono necessariamente olomorfe in $\mathbf{0}$; potrebbero avere una singolarità in $\mathbf{0}$.

Un campo olomorfo, sempre con parte lineare L,

$$\mathbf{Y}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} g^j(\mathbf{w})\partial_j$$

è detto in *forma normale* se, sviluppato come sopra, si ha $G^j_Q = 0$ per ogni Q tale che $\langle Q|\lambda\rangle \neq 0$, cioè, se

$$\mathbf{Y}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{\substack{Q \in N_j \\ \langle Q|\lambda\rangle = 0}} G^j_Q \mathbf{w}^Q \partial_j.$$

Una forma normale quindi è un campo contenente solo termini risonanti.

Analogamente possiamo sviluppare in serie il cambio di variabili $\mathbf{h}$,

$$\mathbf{h}(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{Q \in N_j} H^j_Q \mathbf{w}^Q \mathbf{e}_j.$$

A questo punto possiamo definire la serie

$$\mathbf{h}_\diamond(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{\substack{Q \in N_j \\ \langle Q|\lambda\rangle = 0}} H^j_Q \mathbf{w}^Q \mathbf{e}_j,$$

i.e., la serie dei soli termini risonanti di $\mathbf{h}$.

4.2 Condizioni di Brjuno

Ora daremo una serie di condizioni introdotte da A. D. Brjuno [7] per poter enunciare i teoremi del prossimo paragrafo.

Condizione ω
Consideriamo la funzione[4]

$$\Omega_\lambda(m) := \min\{|\langle Q|\lambda\rangle| \;:\; \langle Q|\lambda\rangle \neq 0,\ \|Q\| < m,\ Q \in N\}.$$

Quindi diciamo che L (in realtà, λ) soddisfa *la condizione di Brjuno*, anche detta *condizione* ω, se

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^k}\log\Omega_\lambda(2^k) \;<\; +\infty. \qquad \text{(Condizione } \omega\text{)}$$

Condizione $\bar{\omega}$
Diciamo che L soddisfa *la condizione* $\overline{\omega}$ se

$$\limsup_{k\to+\infty} -\frac{1}{2^k}\log\Omega_\lambda(2^k) \;<\; +\infty, \qquad \text{(Condizione } \overline{\omega}\text{)}$$

cioè la successione dei termini $-\frac{1}{2^k}\log\Omega_\lambda(2^k)$ è limitata.

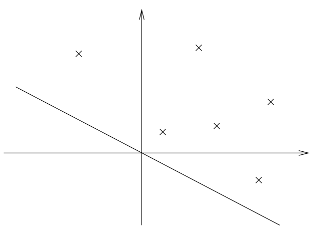
È un'osservazione banale, ma va fatta: la condizione $\bar{\omega}$ è più forte di quella ω, poiché la convergenza di una serie implica la limitatezza dei suoi termini; comunque ci possono essere casi intermedi in cui è verificata la seconda ma non la prima.

Condizione A

Mentre le precedenti condizioni si impongono solo sulla matrice L, o meglio sui suoi autovalori, le prossime riguardano una fissata forma normale, anche se in realtà la loro formulazione dipende principalmente dalla disposizione degli autovalori di L nel piano complesso.

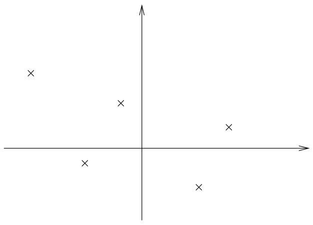
Consideriamo gli autovalori di L come n punti nel piano complesso. Possiamo avere due casi:

Caso 1 esiste almeno una retta passante per l'origine che lascia tutti questi punti dallo stesso lato;



[4]La definizione è diversa da quella data nel caso di un sistema dinamico discreto, quindi anche la condizione sarà diversa.

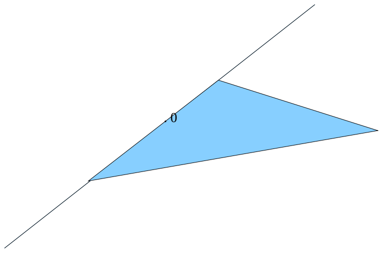
Caso 2 per ogni retta passante per l'origine c'è almeno un punto in ciascuno dei due semipiani che la retta individua.



Storicamente per indicare questa dicotomia si sono adoperati i seguenti termini

Caso 1 una n-upla di autovalori appartiene al *dominio chiuso di Poincaré* se l'inviluppo convesso degli n punti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nel piano complesso non contiene al suo interno lo zero:

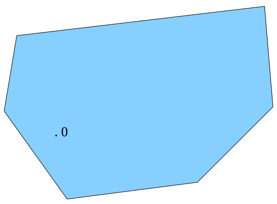
$$0 \notin \text{Int Conv}(\lambda);$$



Caso 1

Caso 2 una n-upla di autovalori appartiene al *dominio di Siegel* se l'inviluppo convesso degli n punti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nel piano complesso contiene al suo interno lo zero:

$$0 \in \text{Int Conv}(\lambda).$$



Caso 2

Osservazione 4.1 *In verità si definisce il dominio di Poincaré in modo che zero non sia nel convesso, cioè l'insieme* $\{\lambda \in \mathbb{C}^n \ : \ 0 \notin \text{Conv}(\lambda)\}$. In questo modo i due domini sono entrambi coni[5] aperti e sono separati dal cono fatto dai punti che hanno zero sul bordo del loro inviluppo convesso nel piano. Da notare che per $n = 2$ il dominio di Siegel ha codimensione reale 1 in $\mathbb{C}^2$.

Definizione 4.2 (Condizione A_2) *Diremo che una forma normale Y soddisfa la condizione A_2 se λ appartiene al dominio di Siegel (caso 2) ed esistono due serie di potenze $a(\boldsymbol{w})$ e $b(\boldsymbol{w})$ tali che la forma normale ha coordinate*

$$g_j(\boldsymbol{w}) = \lambda_j w_j a(\boldsymbol{w}) + \bar{\lambda}_j w_j b(\boldsymbol{w}) \ , \quad j = 1, \ldots, n.$$

Nel seguito si cercherà di dare anche un senso geometrico a queste e alle prossime condizioni.

Se λ appartiene al dominio chiuso di Poincaré (caso 1), si deve studiare la questione più in dettaglio. Sia r una retta che soddisfi la richiesta; rinumerando le variabili possiamo supporre che i primi l autovalori, $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, siano esattamente in r, mentre $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ siano tutti in un semipiano aperto individuato dalla retta.

Vedremo (Teorema 4.18) che in questo caso 1, ogni forma normale è del tipo

$$g_j(\mathbf{w}) = \begin{cases} \psi_j(\mathbf{w}') & j = 1, \ldots, l \\ \\ \sum_{m=l+1}^{n} b_{jm}(\mathbf{w}') w_m + \eta_j(\mathbf{w}) & j = l+1, \ldots, n, \end{cases}$$

dove $\psi_j(\mathbf{w}')$ e $b_{jm}(\mathbf{w}')$ sono serie di potenze in $\mathbf{w}' := (w_1, \ldots, w_l)$ e le $\eta_j(\mathbf{w})$ non contengono né termini lineari in $w_1, \ldots, w_l$ né termini indipendenti in queste variabili; in parole povere, non ci sono termini del tipo $c\mathbf{w}'^{Q'}$.

Definizione 4.3 (Condizione A_1') *Diremo che una forma normale Y soddisfa la condizione A_1' se λ appartiene al dominio chiuso di Poincaré (caso 1) ed esiste una serie di potenze $a(\boldsymbol{w})$ tale che la forma normale abbia coordinate*

$$g_j(\boldsymbol{w}) = \lambda_j w_j a(w_1, \ldots, w_l) \ , \quad j = 1, \ldots, l.$$

Ulteriore suddivisione:

1* $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ sono incommensurabili[6] a coppie;

1** c'è una coppia di numeri commensurabili.

[5] se $\mathbf{x}$ appartiene all'insieme anche $\rho\mathbf{x}$ ci appartiene per ogni ρ positivo.

[6] λ e $\mu \in \mathbb{C}^*$ sono commensurabili sse esiste $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $\lambda = \frac{p}{q}\mu$ sse esiste $\beta \in \mathbb{C}$ t.c. $\beta\lambda$ e $\beta\mu$ sono razionali sse $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ t.c. $n\lambda = m\mu$.

Sia $D = (d_1, \dots, d_n)$ il vettore le cui coordinate rappresentano le distanze tra la retta r e i punto $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Definizione 4.4 (Condizione A_1'') *Diremo che una forma normale Y soddisfa la condizione A_1'' se λ è nel caso 1**, e esistono $a_{l+1}(\boldsymbol{w}), \dots, a_n(\boldsymbol{w})$, serie di potenze in $w_1, \dots, w_l$ tali che*

a) *se $Q \in N$ e $\langle Q|D\rangle = 0$, allora $\sum_{j=l+1}^{n} q_j a_j(\boldsymbol{w}) \equiv 0$;*

b) *la matrice*

$$\mathcal{R} := \{b_{ij} - \delta_{ij}(\lambda_i a + a_i)\}_{ij} \quad i, j = l+1, \dots, n.$$

è nilpotente, i.e., $\mathcal{R}^{n-1} \equiv 0$.

Definizione 4.5 (Condizione A_1) *Diremo che una forma normale Y soddisfa la condizione A_1 se λ appartiene al dominio chiuso di Poincaré e, nel caso 1*, verifica A_1', mentre nel caso 1** verifica simultaneamente A_1' e A_1''.*

Definizione 4.6 (Condizione A) *Diremo che una forma normale Y soddisfa la condizione A se soddisfa la condizione A_1 nel caso 1 o la condizione A_2 nel caso 2.*

4.3 Risultati

Con le notazioni dei paragrafi precedenti, il Teorema di Poincaré [27] si enuncia nel seguente modo.

Teorema 4.7 *Per ogni sistema dinamico continuo olomorfo locale esiste un cambio di coordinate formale $\boldsymbol{h}$ che riduce il sistema ad una forma normale. Inoltre, $\boldsymbol{h}_{\diamondsuit}$ può essere scelto in modo arbitrario, ma appena fissato, il cambio di coordinate e la forma normale sono univocamente determinati.*

I fatti successivi sono stati provati da A. D. Brjuno all'inizio degli anni '70. Le dimostrazioni si possono trovare in [7]; comunque nel seguito cercheremo di dare un'idea delle strategie con l'ausilio di molte semplificazioni consigliate da J. Martinet [21].

Innanzitutto, la condizione A è una condizione che dipende solo dal campo vettoriale iniziale e non dalla particolare forma normale a cui lo si vuol portare.

Teorema 4.8 *Se una forma normale di un sistema differenziale soddisfa la condizione A, allora ogni altra forma del sistema soddisfa la condizione.*

Il seguente è noto come il 'Teorema di Brjuno in Più Variabili per Campi Vettoriali'.

Teorema 4.9 *Sia L la parte lineare di un sistema differenziale olomorfo che soddisfa la condizione ω e sia data una forma normale che soddisfa la condizione A. Allora il cambio di coordinate formale $\boldsymbol{h}$ che riduce il sistema alla forma normale converge se e solo se $\boldsymbol{h}_{\diamondsuit}$ converge in un intorno dell'origine.*

Brjuno provò anche un parziale viceversa.

Teorema 4.10 *Sia data una forma normale proveniente da un sistema differenziale olomorfo. Ipotizziamo che non sia soddisfatta la condizione $\bar{\omega}$ oppure quella A. Allora esiste un sistema differenziale che ha ancora come forma normale quella di partenza e ogni cambio di coordinate che riduce il sistema alla forma normale diverge.*

Inoltre, vedi [7] Teorema 1, Capitolo II,

Proposizione 4.11 *Una forma normale che soddisfa la condizione A può essere integrata in forma chiusa, i.e., si può quadrare e trovare la soluzione esplicita del sistema differenziale.*

Dunque è stata un'effettiva semplificazione per il nostro scopo, che era quello di poter scrivere esplicitamente la soluzione del sistema differenziale.

4.4 Riduzione diretta in forma normale

Proveremo in maniera diretta che ogni sistema può essere ridotto formalmente in forma normale tramite un adeguato cambio di variabili; studieremo poi le proprietà di tali cambi di coordinate.

Nel seguito useremo le seguenti notazioni. Dato un sistema differenziale analitico singolare nell'origine $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z})$, riscriviamolo nella forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z}) = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{z}).$$

Se

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j \partial_j,$$

sviluppiamo in serie di potenze le coordinate

$$\hat{f}_j(\mathbf{z}) = z_j F_j(\mathbf{z}) = z_j \sum_Q F_Q^j \mathbf{z}^Q \qquad \text{dove } Q \in N_j, Q \neq 0.$$

Sia $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Y}(\mathbf{w})$ una sua forma normale; scriviamo anch'essa nello stesso modo:

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Y}(\mathbf{w}) = L\mathbf{w} + \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{w})$$

con $\hat{\mathbf{Y}} = \sum_{j=1}^{n} \hat{g}_j \partial_j$ e

$$\hat{g}_j(\mathbf{w}) = w_j G_j(\mathbf{w}) = w_j \sum_Q G_Q^j \mathbf{w}^Q \qquad \text{dove } Q \in N_j, Q \neq 0, \langle Q|\lambda\rangle = 0.$$

Dato invece un cambio di variabili tangente all'identità $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w})$, avremo

$$\mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

con $\hat{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} \hat{h}_j \mathbf{e}_j$ e

$$\hat{h}_j(\mathbf{w}) = w_j H_j(\mathbf{w}) = w_j \sum_Q H_Q^j \mathbf{w}^Q \qquad \text{dove } Q \in N_j, Q \neq 0$$

e indichiamo la serie dei soli termini risonanti di $\mathbf{h}$ così:

$$\mathbf{h}_\diamond(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{\langle Q|\lambda\rangle = 0} H_Q^j \mathbf{w}^Q \mathbf{e}_j.$$

$\hat{\mathbf{X}}$, $\hat{\mathbf{Y}}$, $\hat{\mathbf{h}}$ sono serie di potenze che non contengono termini di grado minore di due.

Inoltre useremo le notazioni:

$$\mathbf{F}_Q := (F_Q^1, \dots, F_Q^n) \ \in \mathbb{C}^n$$

in modo che

$$\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_n) \equiv \sum_Q \mathbf{F}_Q \mathbf{z}^Q.$$

4.4.1 Esistenza

Teorema 4.12 *Per ogni sistema differenziale olomorfo*

$$\dot{\mathbf{z}} = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{z})$$

esiste un cambio di coordinate formale

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

che riduce il sistema ad una forma normale

$$\dot{\mathbf{w}} = L\mathbf{w} + \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{w}).$$

In altre parole, in $\mathbf{Y}$ *è nullo ogni termine non risonante, cioè, con le notazioni precedenti,* $\mathbf{G}_Q = 0$ *se* $\langle Q|\lambda\rangle \neq 0$.

Inoltre, per $\langle Q|\lambda\rangle = 0$, $\mathbf{H}_Q$ *può essere scelto in modo arbitrario; i rimanenti* $\mathbf{H}_Q$ *e* $\mathbf{G}_Q$ *sono univocamente determinati.*

Notare che $\mathbf{H}_Q$ con $\langle Q|\lambda\rangle = 0$ sono proprio i coefficienti di $\mathbf{h}_\diamondsuit$.

Dimostrazione. Basta considerare l'equazione del coniugio

$$\mathbf{X} = \mathbf{h}_*(\mathbf{Y})$$

cioè

$$\mathbf{X} \circ \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathrm{D}\mathbf{h}_{(\mathbf{w})}.\mathbf{Y}(\mathbf{w})$$

e sostituire secondo le notazioni. Fissate le $\mathbf{H}_Q$, con $\langle Q|\lambda\rangle = 0$, in modo arbitrario, si avrà un sistema risolvibile nelle incognite $\mathbf{H}_Q$, con $\langle Q|\lambda\rangle \neq 0$, e $\mathbf{G}_Q$, con $\langle Q|\lambda\rangle = 0$.

Ecco il calcolo esplicito:

$$L \circ \mathbf{h} + \hat{\mathbf{X}} \circ \mathbf{h} = \mathrm{D}(\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}).(L + \hat{\mathbf{Y}}),$$

$$L(\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}) + \hat{\mathbf{X}} \circ (\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}) = L + \hat{\mathbf{Y}} + \mathrm{D}\hat{\mathbf{h}}.(L + \hat{\mathbf{Y}}).$$

Cancello L

$$L\hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{X}} \circ (\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}) = \hat{\mathbf{Y}} + \mathrm{D}\hat{\mathbf{h}}.(L + \hat{\mathbf{Y}}),$$

sostituisco $L = L_D + L_{SD}$ dividendo la parte diagonale dalla sottodiagonale

$$L_D\hat{\mathbf{h}} + L_{SD}\hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{X}} \circ (\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}) = \hat{\mathbf{Y}} + \mathrm{D}\hat{\mathbf{h}}.L_D + \mathrm{D}\hat{\mathbf{h}}.L_{SD} + \mathrm{D}\hat{\mathbf{h}}.\hat{\mathbf{Y}},$$

prendo la componente j-esima

$$\lambda_j \hat{h}_j + \varepsilon_j \hat{h}_{j-1} + \hat{f}_j \circ \mathbf{h} = \hat{g}_j + \partial_k \hat{h}_j \lambda_k w_k + \partial_k \hat{h}_j \varepsilon_k w_{k-1} + \partial_k \hat{h}_j \hat{g}_k,$$

dove sono sottintese le somme su k. Sostituisco $\hat{h}_j = w_j H_j$ e $\hat{g}_j = w_j G_j$,

$$\lambda_j w_j H_j + \varepsilon_j w_{j-1} H_{j-1} + \hat{f}_j \circ \mathbf{h} = w_j G_j + \partial_k(w_j H_j)\lambda_k w_k + \partial_k(w_j H_j)\varepsilon_k w_{k-1} + \partial_k(w_j H_j) w_k G_k.$$

Osserviamo che $\partial_k(w_j H_j) = \delta_{jk} H_j + w_j \partial_k H_j$; dunque il secondo membro diventa

$$\begin{aligned} &w_j G_j + H_j \lambda_j w_j + w_j \partial_k H_j \lambda_k w_k + H_j \varepsilon_j w_{j-1} \\ &\quad + w_j \partial_k H_j \varepsilon_k w_{k-1} + H_j w_j G_j + w_j \partial_k H_j w_k G_k. \end{aligned}$$

Cancello il termine $\lambda_j w_j H_j$ da entrambi i lati e ottengo

$$\begin{aligned} \varepsilon_j w_{j-1} H_{j-1} + \hat{f}_j \circ \mathbf{h} \;\; = \;\; & w_j G_j + w_j \partial_k H_j \lambda_k w_k + H_j \varepsilon_j w_{j-1} \\ & + w_j \partial_k H_j \varepsilon_k w_{k-1} + H_j w_j G_j + w_j \partial_k H_j w_k G_k. \end{aligned}$$

Sviluppiamo in serie $H_j(\mathbf{w}) = \sum_Q H^j_Q \mathbf{w}^Q$ e $G_j(\mathbf{w}) = \sum_Q G^j_Q \mathbf{w}^Q$, osservando che $\partial_k H_j w_k = \sum_Q H^j_Q q_k \mathbf{w}^Q$, abbiamo

$$\begin{aligned} &\varepsilon_j w_{j-1} H^{j-1}_Q \mathbf{w}^Q + \hat{f}_j \circ \mathbf{h} \\ &= w_j G^j_Q \mathbf{w}^Q + w_j \lambda_k H^j_Q q_k \mathbf{w}^Q + H^j_Q \mathbf{w}^Q \varepsilon_j w_{j-1} \\ &+ w_j H^j_Q q_k \mathbf{w}^Q \varepsilon_k w_{k-1} w_k^{-1} + H^j_Q \mathbf{w}^Q w_j G^j_R \mathbf{w}^R + w_j H^j_Q q_k \mathbf{w}^Q G^k_R \mathbf{w}^R, \end{aligned}$$

dove stiamo sottintendendo la somma su k, R e Q. Mettiamo in evidenza la potenza di $\mathbf{w}$ in fondo ad ogni termine:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_j H^{j-1}_Q w_j \mathbf{w}^{Q+e_{j-1}-e_j} + \hat{f}_j \circ \mathbf{h} \\ &= G^j_Q w_j \mathbf{w}^Q + \lambda_k q_k H^j_Q w_j \mathbf{w}^Q + H^j_Q \varepsilon_j w_j \mathbf{w}^{Q+e_{j-1}-e_j} \\ &+ \varepsilon_k H^j_Q q_k w_j \mathbf{w}^{Q+e_{k-1}-e_k} + H^j_Q G^j_R w_j \mathbf{w}^{Q+R} + H^j_Q q_k G^k_R w_j \mathbf{w}^{Q+R}, \end{aligned}$$

e calcoliamo il coefficiente del termine $w_j \mathbf{w}^Q$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_j H^{j-1}_{Q-e_{j-1}+e_j} + \hat{f}_j \circ \mathbf{h} \\ &= G^j_Q + \sum_k \lambda_k q_k H^j_Q + \varepsilon_j H^j_{Q-e_{j-1}+e_j} \\ &+ \sum_k \varepsilon_k H^j_{Q-e_{k-1}+e_k}(q_k+1) + \sum_{P+R=Q} H^j_P G^j_R + \sum_k \sum_{P+R=Q} H^j_P p_k G^k_R; \end{aligned}$$

attenzione che nei termini del tipo $\mathbf{w}^{Q+e_{k-1}-e_k}$ ho dovuto cambiare indice e che la componente k-esima di $Q - e_{k-1} + e_k$ è $q_k + 1$. Osservo che $\sum_k \lambda_k q_k = \langle \lambda | Q \rangle$ è il prodotto scalare.

$$\begin{aligned} &\varepsilon_j H^{j-1}_{Q-e_{j-1}+e_j} + \hat{f}_j \circ \mathbf{h} \\ &= G^j_Q + \langle \lambda | Q \rangle\, H^j_Q + \varepsilon_j H^j_{Q-e_{j-1}+e_j} \\ &+ \sum_k \varepsilon_k H^j_{Q-e_{k-1}+e_k}(q_k+1) + \sum_{P+R=Q} H^j_P G^j_R + \sum_k \sum_{P+R=Q} H^j_P p_k G^k_R. \end{aligned}$$

Riordinando i termini siamo arrivati a

$$
\begin{aligned}
G_Q^j + \langle\lambda|Q\rangle\, H_Q^j \quad = \quad & -H^j_{Q-e_{j-1}+e_j}\varepsilon_j - \sum_{P+R=Q} H_P^j G_R^j \\
& -\sum_k \varepsilon_k H^j_{Q-e_{k-1}+e_k}(q_k+1) - \sum_k \sum_{P+R=Q} H_P^j p_k G_R^k \\
& +\varepsilon_j H^{j-1}_{Q-e_{j-1}+e_j} + \{\hat{f}_j \circ \mathbf{h}\}_Q,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

dove $\{\cdot\}_Q$ indica il coefficiente di $w_j \mathbf{w}^Q$ della serie argomento.

L'insieme degli n-vettori reali può essere totalmente ordinato nel seguente modo: il vettore P precede Q se la prima differenza non nulla nelle seguenti differenze

$$
\|Q\| - \|P\|\,, \quad q_1 - p_1, \ldots,\; q_{n-1} - p_{n-1}
$$

è positiva. Per esempio $(0,1)$ precede $(1,0)$. Ovviamente ogni $Q \in \mathbb{Z}^n$ è preceduto da solo un numero finito di vettori a coefficienti interi. Tale ordinamento degli indici sarà chiamato *ordinamento lessicografico*.

Osserviamo che il membro di destra nella (4.1) dipende solo dalle H_P^j e G_R^k per cui i vettori P e R precedono Q. Ciò è ovvio per il primo, terzo e quinto termine poiché $Q - e_{j-1} + e_j$ precede Q; per il secondo e quarto, notiamo che se $P+R=Q$ allora $\|P\|+\|R\| = \|Q\|$ ed essendo $\|P\|\,, \|R\| > 0$ si ha $\|P\|\,, \|R\| < \|Q\|$. Infine, $\{\hat{f}_j \circ \mathbf{h}\}_Q$ contiene solo termini H_P^j per cui $\|P\| < \|Q\|$, poiché $\hat{f}_j$ è del secondo ordine.

Abbiamo già imposto che i termini lineari degli oggetti considerati fossero uguali. Infatti nei passaggi si sono semplificati automaticamente. Per quanto riguarda i termini successivi, detto C_{jQ} il membro di destra nella (4.1), possiamo porre

$$
G_Q^j = 0 \quad , \quad H_Q^j = \langle\lambda|Q\rangle^{-1} C_{jQ}, \quad \text{se}\, \langle\lambda|Q\rangle \neq 0 \tag{4.2}
$$

$$
G_Q^j = C_{jQ}, \qquad H_Q^j \quad \text{arbitrario}, \qquad \text{se}\, \langle\lambda|Q\rangle = 0 \tag{4.3}
$$

Notare il problema dovuto all'annullamento dei piccoli divisori.
Dunque, seguendo l'ordine lessicografico degli indici si possono determinare induttivamente i coefficienti H_Q^j e G_Q^j con le proprietà volute.

□

Nella dimostrazione del teorema abbiamo provato che i coefficienti della forma normale si possono trovare dalla formula

$$
G_Q^j + \langle\lambda|Q\rangle\, H_Q^j = C_{jQ} \tag{4.4}
$$

dove C_{jQ} è un polinomio nelle variabili H_P^j e G_P^j con P che precede Q nell'ordine lessicografico.

Dal teorema segue anche che dato un sistema iniziale non è sempre unicamente determinata la forma normale. Ipotizziamo che un qualche sistema possa essere ridotto in due modi diversi in forma normale (vedi Rüssmann [34]), nel senso che ci sono due diverse forme normali ad esso coniugate. Per la proprietà transitiva del coniugio siamo quindi in presenza di due diverse forme normali coniugate. Cerchiamo di vedere la struttura dei cambi di variabili che mandano forme normali in forme normali; in modo da poter conoscere tutte le riduzioni del sistema originale in forma normale appena conosciamo una sua riduzione.

Teorema 4.13 *Se il cambio di variabili*

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

coniuga una forma normale di un sistema differenziale ad un'altra forma normale del sistema, allora $\mathbf{H}_Q = 0$ *se* $\langle Q|\lambda\rangle \neq 0$.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{Y}$ e $\tilde{\mathbf{Y}}$ le due forme normali. Nella dimostrazione del teorema precedente siamo arrivati alla formula (4.1). Riscriviamola per $\langle Q|\lambda\rangle \neq 0$ e ricordiamo che in questo caso $\tilde{G}^j_Q = 0$

$$\begin{aligned} \langle\lambda|Q\rangle\, H^j_Q &= -H^j_{Q-e_{j-1}+e_j}\varepsilon_j - \sum_{P+R=Q} H^j_P G^j_R \\ &\quad -\sum_k \varepsilon_k H^j_{Q-e_{k-1}+e_k}(q_k+1) - \sum_k \sum_{P+R=Q} H^j_P p_k G^k_R \\ &\quad +\varepsilon_j H^{j-1}_{Q-e_{j-1}+e_j} + \{\hat{g}_j \circ \mathbf{h}\}_Q. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si ordinano i vettori lessicograficamente e si osserva che nel membro di destra ci sono gli H^j_P per cui P precede Q. Si mostra per induzione che

$$H^j_P = 0 \quad \text{se} \quad \langle P|\lambda\rangle \neq 0. \tag{4.6}$$

Per questo ultimo conto si veda direttamente la dimostrazione a pagina 156 di [7].

□

4.4.2 Trasformazioni speciali

Dal teorema precedente segue la relazione di convergenza tra i vari cambi che portano il campo vettoriale in forma normale, detti brevemente trasformazioni normalizzanti.

Teorema 4.14 *Se esiste una trasformazione normalizzante normalizzante convergente del campo vettoriale*

$$X(\mathbf{z}) = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{z}),$$

allora ogni altra trasformazione normalizzante $\boldsymbol{h}$ *del sistema converge non appena* $\boldsymbol{h}_\diamondsuit$ *converge. Quindi, se il sistema ha almeno una trasformazione normalizzante* $\boldsymbol{h}$ *divergente tale che* $\boldsymbol{h}_\diamondsuit$ *converge, allora ogni altra trasformazione normalizzante diverge.*

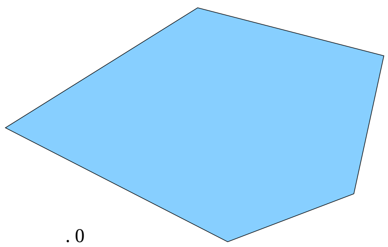
4.5 Classificazione di base

Data L una matrice $n \times n$ in forma di Jordan, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i suoi autovalori. Abbiamo la dicotomia

Caso 1 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartiene al *dominio chiuso di Poincaré*:

$$0 \notin \text{Int Conv}(\lambda).$$

Vale a dire che esiste almeno una retta r passante per l'origine che lascia i λ_j dallo stesso lato; a meno di rinumerare le variabili possiamo supporre che $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in r$ mentre $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ appartengono tutti ad uno stesso semipiano dei due individuati dalla retta.

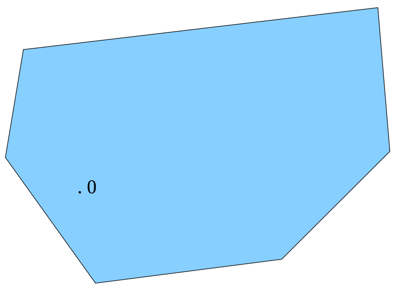


Caso 1

Caso 2 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartiene al *dominio di Siegel*:

$$0 \in \text{Int Conv}(\lambda).$$

Vale a dire che per ogni retta passante per l'origine c'è almeno un punto in ciascuno dei due semipiani che la retta individua.

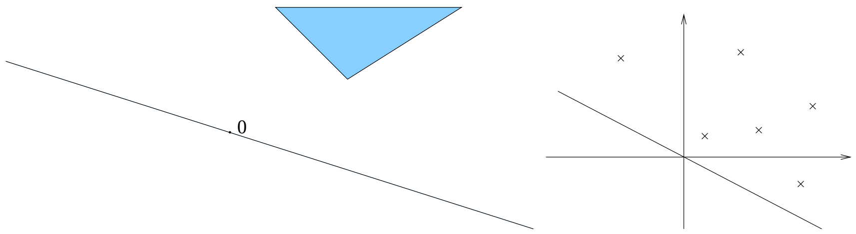


Caso 2

Sia $\mathfrak{N} = \text{Conv}(\lambda)$ l'inviluppo convesso di $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ nel piano. $\mathfrak{N}$ può essere un singolo punto, un segmento o un poligono. Ovviamente, nel caso 2, $\mathfrak{N}$ è un poligono con l'origine al suo interno.

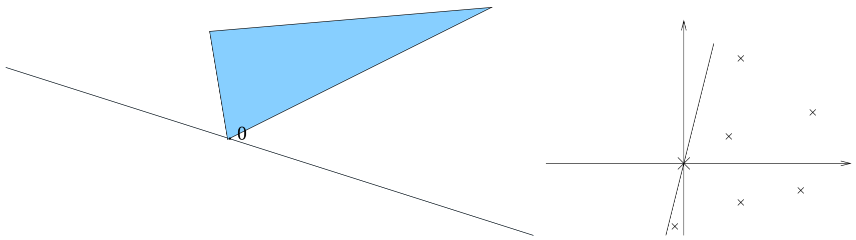
Dividiamo il caso 1 in quattro ulteriori sottocasi:

1.a $0 \notin \mathfrak{N}$; esiste una retta r che passa per l'origine e lascia i λ_j tutti da una stessa parte ma non ne incontra nessuno (dominio di Poincaré).



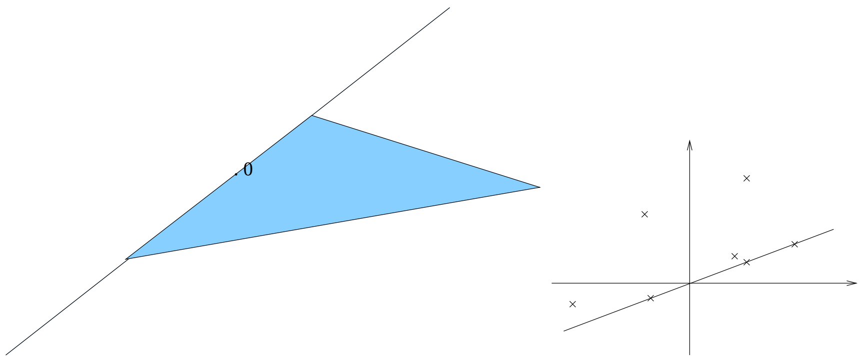
Caso 1.a

1.b $0 \in \mathrm{Vert}(\mathfrak{N})$; zero è un vertice del poligono $\mathfrak{N}$ (o un punto finale se $\mathfrak{N}$ è un segmento). Quindi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$ (con $0 < l < n$), e i rimanenti sono tutti diversi da zero; esiste una retta r passante per l'origine tale che i $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ sono tutti da una stessa parte di r ma non in r. In pratica 0 è un autovalore di molteplicità l.



Caso 1.b

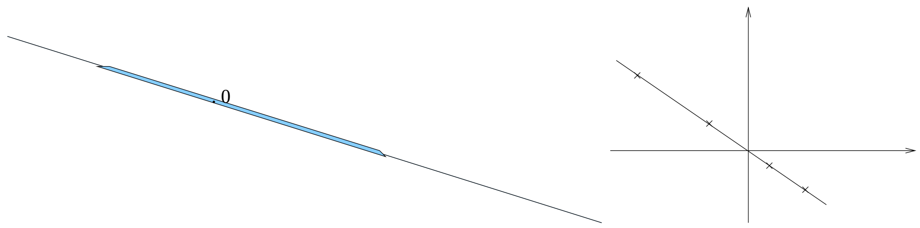
1.c $0 \in$ lati di $\mathfrak{N}$ e $\mathfrak{N}$ è un poligono; zero giace su uno spigolo di $\mathfrak{N}$. Siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ (con $1 < l < n$) i punti allineati che giacciono su questo spigolo; in questo caso la retta r è quella definita da tali punti.



Caso 1.c

Non stiamo ipotizzando nulla sul fatto che 0 sia o meno uno dei λ_j.

1.d $\mathfrak{N}$ è un segmento contenente al suo interno lo 0; la retta r è determinata dal segmento, in questo caso $l = n$.



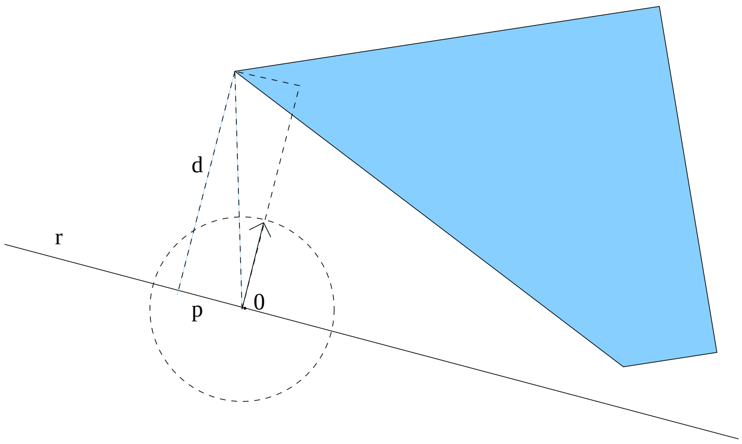
Caso 1.d

Quindi, per come abbiamo scelto l, è sempre vero che $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in r$ mentre $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n \notin r$ e sono tutti da una stessa parte di r. Se d_j è la distanza tra λ_j e r, possiamo rinumerare le variabili in modo che

$$0 = d_1 = \cdots = d_l < d_{l+1} \leq \cdots \leq d_n.$$

Nei casi 1.c e 1.d la retta r è determinata univocamente. Nei casi 1.a e 1.b abbiamo un'infinità di scelte all'interno di un settore angolare; scegliamo r in modo che $d_i = d_j$ solo se $\lambda_i = \lambda_j$. Sia τ il versore ortogonale a r che giace nello stesso semipiano dei punti λ_j, quindi di $\mathfrak{N}$; se si moltiplica per τ^{-1} si fa coincidere r con l'asse immaginario, quindi la distanza dei punti dalla retta diventa la parte reale. Poniamo

$$\begin{aligned} d_j :=& \quad (\lambda_j|\tau)_{\mathbb{R}^2} = \Re e(\lambda_j \tau^{-1}) &&= \text{distanza}(\lambda_j, r); \\ p_j :=& \quad (\lambda_j|i\tau)_{\mathbb{R}^2} = \Im m(\lambda_j \tau^{-1}) &&= \text{proiezione di } \lambda_j \text{ su } r, \text{ lungo } i\tau. \end{aligned}$$



Se $D := (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ e $P := (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$, abbiamo la scomposizione

$$\text{Diag}(L) = (D + iP)\tau$$

Abbiamo così ricondotto una combinazione di vettori complessi a due di vettori reali.

$$\langle Q|\lambda\rangle_{\mathbb{C}^n} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle Q|D\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \\ \langle Q|P\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \end{array} \right. . \tag{4.7}$$

Nel seguito, dato un qualsiasi vettore $V = (v_1, \ldots, v_n)$, indicheremo con V' il vettore $(v_1, \ldots, v_l)$ di lunghezza l e con V'' il vettore restante $(v_{l+1}, \ldots, v_n)$ di lunghezza $n - l$. La disuguaglianza $V \leq 0$ significa $v_1 \leq 0, \ldots, v_n \leq 0$. Per esempio, si ha che $D' = 0$ e $D'' > 0$.

Osservazione 4.15 *Sia $\lambda :=Diag(L) \in \mathbb{C}^n$. Nel caso 1 gli n-vettori λ' e $\bar{\lambda}'$ sono linearmente dipendenti su $\mathbb{C}$; nel caso 2 i vettori λ e $\bar{\lambda}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.* Infatti, se un vettore V di $\mathbb{C}^n$ e il suo complesso coniugato $\overline{V}$ sono linearmente dipendenti su $\mathbb{C}$ vuol dire che esiste un numero complesso non nullo β tale che $\beta V = \overline{V}$, cioè $\beta V_j = \overline{V_j} \in \mathbb{C}$ e, poiché V e $\overline{V}$ hanno la stessa norma, β avrà modulo unitario, $\beta = e^{i\theta}$ con θ reale. Dunque i punti $e^{i\theta/2}V_j$ coincidono con i loro coniugati:

$$\overline{e^{i\theta/2}V_j} = e^{-i\theta/2}\overline{V_j} = e^{-i\theta/2}e^{i\theta}V_j = e^{i\theta/2}V_j,$$

quindi sono reali; in particolare giacciono su una stessa retta e dunque i V_j stanno tutti sulla retta $e^{-i\theta/2}\mathbb{R}$. Le implicazioni sono tutte invertibili.

Lemma 4.16 *Se L è nel caso 1, allora l'equazione*

$$\langle Q|D\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$

ha solo le seguenti soluzioni $Q \in N_m$:

- *se $m \leq l$,*
$$Q'' = 0;$$
- *se $m > l$,*
$$Q'' = \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_m, \tag{4.8}$$
per qualche j tale che $d_m = d_j$; oppure
$$Q'' = \sum_{j=l+1}^{k} q_j \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_m, \qquad \text{dove } q_j \geq 0, k < i, d_k < d_m. \tag{4.9}$$

Cioè, nel caso $m > l$, abbiamo i casi $Q'' = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ oppure $Q'' = (q_{l+1}, \ldots, q_k, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$.

In poche parole, non è possibile che $Q'' > 0$. Più precisamente, poiché $D = (0, D'')$, essendo $D' = 0$, e inoltre $D'' > 0$, si ha

$$0 = \langle Q|D\rangle = \left\langle Q''|D''\right\rangle,$$

e se sommo un po' di distanze poi, per ottenere 0, ne devo togliere una più grande di tutte quelle tolte. Per la dimostrazione precisa del lemma 4.16, vedi pagina 166 dell'articolo [7].

Da (4.7) è automatico:

Corollario 4.17 *Se L è nel caso 1, allora l'equazione*

$$\langle Q|\lambda\rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$$

ha solo le soluzioni descritte nel lemma precedente.

Un risultato immediato a questo punto è il seguente

Teorema 4.18 *Se L è nel caso 1, allora ogni forma normale è del tipo*

$$g_j(\boldsymbol{w}) = \begin{cases} \psi_j(\boldsymbol{w}') & j = 1, \ldots, l \\ \\ \sum_{m=l+1}^n b_{jm}(\boldsymbol{w}')w_m + \eta_j(\boldsymbol{w}) & j = l+1, \ldots, n, \end{cases}$$

dove la somma è fatta per le le $m > l$ per cui vale la (4.8) e

$$\eta_j(\boldsymbol{w}) = \sum b_{jq_{l+1}\cdots q_{j+1}}(\boldsymbol{w}')w_{l+1}^{q_{l+1}} \cdots w_{j+1}^{q_{j+1}}$$

in cui la somma è presa per quegli interi $q_{l+1} \cdots q_{j+1}$ per cui è soddisfatta la (4.9). In particolare quindi le $\eta_j(\boldsymbol{w})$ non contengono né termini lineari in $w_1, \ldots, w_l$ né termini indipendenti in queste variabili.

Interpretiamo geometricamente in $\mathbb{R}^n$ i vari casi della classificazione di L. Sia

$$\mathfrak{O} := \{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ Q \geq 0\}\,,$$

l'ortante (quadrante, ottante, etc.) non negativo e sia $\mathfrak{R}$ il sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$ formato dalle soluzioni reali dell'equazione di risonanza $\langle Q|\lambda\rangle = 0$, i.e.,

$$\mathfrak{R} := \{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle Q|\lambda\rangle = 0\}\,.$$

1.a $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} = 0$

Infatti, i punti dell'inviluppo convesso sono della forma $\dfrac{\langle Q|\lambda\rangle}{\|Q\|}$ e quindi, poiché 0 non appartiene al convesso, non ci sono Q in $\mathfrak{R}$ a parte 0.

1.b $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ è la faccia l-dimensionale del cono $\mathfrak{O}$ definita da $Q'' = 0$.

Infatti, ovviamente $\{Q'' = 0\} \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ poiché $\langle Q|\lambda\rangle = \langle Q'|\lambda'\rangle + \langle Q''|\lambda''\rangle = 0$ (poiché nel caso 1.b si ha $\lambda' = 0$); viceversa λ'' è nel caso 1.a quindi non ci sono soluzioni non banali.

1.c $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ è un sottoinsieme $(l-1)$-dimensionale contenuto nella faccia $\{Q'' = 0\}$.

Infatti, $\{Q'' = 0\} \supseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ poiché, siccome i λ_j con $j > l$ stanno tutti da una stessa parte della retta r, nessuno di essi può dare contributo positivo ($q_j > 0$). Quindi la condizione si riduce a $\langle Q'|\lambda'\rangle = 0$ e λ' rientra nel caso 1.d con dimensione l, e si vedrà che la dimensione sarà quella dell'ambiente diminuita di 1 (in questo caso $l-1$).

1.d $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ ha dimensione $n-1$.

Infatti, in questo caso λ e $\bar{\lambda}$ sono linearmente dipendenti, quindi

$$\mathfrak{R} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\Re e\lambda, \Im m\lambda\}^{\perp} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\Re e\lambda\}^{\perp}$$

ha dimensione $n-1$. Inoltre $\mathfrak{R}$ contiene un punto interno di $\mathfrak{O}$. Infatti, per ogni $j = 1, \ldots, n$ esiste $\varepsilon_j > 0$ tale che $-\varepsilon_j\lambda_j \in \mathrm{Conv}(\lambda)$; per cui

$$-\varepsilon_j\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}\lambda_i$$

con $\beta_{ij} \geq 0$. Sommando otteniamo

$$0 = \sum_j \varepsilon_j\lambda_j + \sum_{ij} \beta_{ij}\lambda_i = \sum_i (\varepsilon_i + \sum_j \beta_{ij})\lambda_i$$

con $\varepsilon_i + \sum_j \beta_{ij} \geq \varepsilon_i > 0$.

2 In questo caso λ e $\bar{\lambda}$ sono linearmente indipendenti, per cui $\mathfrak{R} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\Re e\lambda, \Im m\lambda\}^{\perp}$ ha dimensione $n-2$. poiché anche qui $\mathfrak{R}$ contiene un punto interno di $\mathfrak{O}$ come nel caso 1.d, $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ hanno la stessa dimensione. In particolare hanno lo stesso ortogonale.

4.6 Condizione A

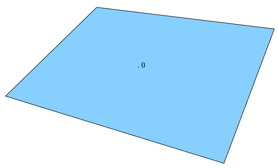
4.6.1 Formulazione

Vogliamo classificare le forme normali

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{Y}(\mathbf{w})$$

Nel seguito non isoleremo la parte lineare come in precedenza.

Consideriamo prima il caso 2:



Condizione A_2: Se L è nel caso 2, allora esistono due serie di potenze $a(\mathbf{w})$ e $b(\mathbf{w})$ tali che la forma normale abbia coordinate ($\mathbf{Y} = \sum g_j \partial_j$)

$$g_j(\mathbf{w}) = \lambda_j w_j a(\mathbf{w}) + \bar{\lambda}_j w_j b(\mathbf{w}) \ , \quad j = 1, \ldots, n.$$

Scritta la forma normale nella forma

$$\dot{w}_j = g_j(\mathbf{w}) = w_j G_j(\mathbf{w}) = w_j \sum_Q G_Q^j \mathbf{w}^Q,$$

si può notare che, mentre a priori le funzioni G_j potevano avere una singolarità in 0, la condizione A_2 afferma che in particolare le G_j sono olomorfe. In particolare L deve essere diagonale. Se

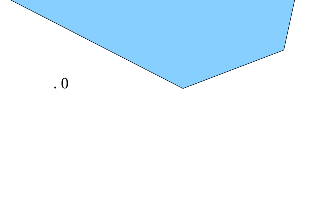
$$\mathbf{G}_Q := (G_Q^1, \ldots, G_Q^n) \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathbf{G} := (G_1, \ldots, G_n),$$

allora, detta $\lambda := \mathrm{Diag}(L)$, la condizione A_2 si legge come

$$\mathbf{G} = \lambda a + \bar{\lambda} b \tag{A_2}$$

i.e., $G_Q = \lambda a_Q + \bar{\lambda} b_Q$, dove $a = \sum_Q a_Q \mathbf{w}^Q$ e $b = \sum_Q b_Q \mathbf{w}^Q$.

Consideriamo ora il caso 1:



Il Teorema 4.18 asserisce che se siamo nel caso 1, ogni forma normale è data da

$$g_j(\mathbf{w}) = \begin{cases} \psi_j(\mathbf{w}') & j = 1, \dots, l \\ \\ \sum_{m=l+1}^{n} b_{jm}(\mathbf{w}')w_m + \eta_j(\mathbf{w}) & j = l+1, \dots, n, \end{cases}$$

dove le $\eta_j(w)$ non contengono termini di grado minore di due nelle variabili $\mathbf{w}''$ e la matrice $\mathbf{B} := \{b_{jm}\}_{jm}$ è diagonale a blocchi, i.e., $b_{jm} = 0$ se $d_j \neq d_m$. Formuleremo separatamente condizioni sulle $g_1, \dots, g_l$ (condizione A_1') e sulle $g_{l+1}, \dots, g_n$ (condizione A_1'').

Condizione A_1': Se L è nel caso 1, allora esiste una serie di potenze $a(w')$ tale che la forma normale abbia coordinate

$$g_j(\mathbf{w}) = \lambda_j w_j a(\mathbf{w}') \,, \quad j = 1, \dots, l.$$

Ricordo che con l'apice $'$ indichiamo le prime l componenti di qualsiasi n-vettore. Analogamente si può enunciare dicendo che

$$\mathbf{G}' = \lambda' a. \tag{A_1'}$$

Si nota subito un'analogia tra le due condizioni A_2 e A_1'. La condizione A_1' non è altro che la condizione A_2 sulle prime l coordinate. Infatti, il Teorema 4.18 afferma in particolare che la dinamica delle prime l variabili è separata; inoltre se ci limitiamo al sistema in $\mathbb{C}^l \subseteq \mathbb{C}^n$ siamo nel caso 1.d che non è altro che un caso degenere del 2.

Nel caso 1 gli n-vettori λ' e $\bar{\lambda}'$ sono linearmente dipendenti; nel caso 2 i vettori λ e $\bar{\lambda}$ sono linearmente indipendenti.

La condizione A_2 quindi è l'affermazione che i due vettori λ e $\bar{\lambda}$ generano un 2-spazio (complesso) in $\mathbb{C}^n$ tale che, per ogni $Q \in N$, ogni G_Q giace in esso.

La condizione A_1' afferma che la retta (complessa) generata da λ' (o, equivalentemente, da $\bar{\lambda}'$) contiene G_Q per ogni $Q \in N$. Essendo appunto λ' e $\bar{\lambda}'$ linearmente dipendenti è sufficiente l'esistenza della sola serie a.

In particolare vediamo cosa succede nei vari sottocasi:

1.a poiché $l = 0$, la condizione A_1' è vuota, quindi sempre vera.

1.b poiché $\lambda' = 0$, A_1' significa che $g_1 \equiv \cdots \equiv g_l \equiv 0$.

1.c Questo sarà il caso più complicato, anche nel seguito.

1.d poiché $l = n$, le condizioni A_1' e A_2 coincidono.

Per enunciare la condizione A_1'' dobbiamo distinguere i due casi:

1* Esiste un numero complesso $\beta \neq 0$ tale che $\beta\lambda_1, \ldots, \beta\lambda_l$ sono numeri reali razionali.

1** Per ogni numero complesso $\beta \neq 0$ tale che $\beta\lambda_1, \ldots, \beta\lambda_l$ sono reali allora almeno uno di essi è irrazionale.

L'argomento del numero complesso β è tale da portare a far coincidere la retta r passante per i punti $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ con l'asse reale.

Supponiamo che la condizione A_1' sia soddisfatta, i.e., esiste la $a(\mathbf{w}')$ richiesta. Quindi possiamo introdurre la

Condizione A_1'': Se L è nel caso 1**, devono esistere serie di potenze $a_{l+1}(\mathbf{w}'), \ldots, a_n(\mathbf{w}')$ tali che

a) se $Q \in N$ e $\langle Q''|D''\rangle = 0$, allora $\langle Q''|A''(\mathbf{w}')\rangle \equiv 0$, dove $A'' = (a_{l+1}, \ldots, a_n)$;

b) la matrice

$$\mathcal{R} := \{b_{ij} - \delta_{ij}(\lambda_i a + a_i)\}_{ij} \quad i, j = l+1, \ldots, n.$$

è nilpotente, i.e., $\mathcal{R}^{n-1} \equiv 0$.

Se L è nel caso 1, la *condizione* A_1 è il verificarsi simultaneo di A_1' e A_1''

La *condizione* A è il verificarsi della *condizione* A_2 nel caso 2 o di A_1 nel caso 1.

Essenzialità della condizione A_1''

La condizione A_1'' è importante solo nel caso complicato 1.c. Analizziamo un po' meglio tale caso. Si ha $l \geq 2$ e $n - l \geq 1$. Ma non sempre la condizione A_1'' rappresenta una restrizione.

Se $l = 2$, per essere nel sottocaso 1** si deve avere che λ_1/λ_2 è irrazionale. Dal Teorema 6 del capitolo 1 in [7] segue che, a meno di rinumerare le variabili, la forma normale è triangolare

$$g_j(\mathbf{w}) = \begin{cases} \lambda_j w_j & j = 1, \ldots, l \\ \lambda_j w_j + \eta_j(w_1, \ldots, w_{j-1}) & j = l+1, \ldots, n, \end{cases}$$

Conderiamo la matrice $\mathbf{B} := \{b_{jm}\}_{jm}$. Ai termini lineari $\lambda_j w_j$ dobbiamo aggiungere quelli provenienti da η_j; i primi daranno i λ_j sulla diagonale di $\mathbf{B}$, i secondi formeranno una matrice triangolare sotto la diagonale. Poniamo $a_{l+1} \equiv \cdots \equiv a_n \equiv 0$. La richiesta a) è soddisfatta banalmente. La b) segue dal fatto che

$$b_{jm} - \lambda_j$$

è nilpotente, essendo triangolare con la diagonale nulla, per quello appena detto. Dunque A_1'' è una condizione vuota in questo caso. Allora A_1'' è essenziale solo per $l \geq 3$.

Se invece $n - l = 1$, si ha $Q'' = (q_{l+1}) = (q_n)$ e allora $\langle Q''|D''\rangle = q_n d_n$ e l'equazione $\langle Q''|D''\rangle = 0$ non ha soluzioni $Q'' \neq 0$. Dunque possiamo scegliere $a_{l+1}(\mathbf{w})$ in modo che

$$b_{l+1,l+1}(\mathbf{w}) - (\lambda_{l+1} a + a_{l+1}(\mathbf{w})) = 0$$

e avere la b) soddisfatta in maniera ovvia e la a) soddisfatta poiché non esistono Q come richiesti. Quindi A_1'' è una condizione vuota.

Dunque *la condizione A_1'' è essenziale solo quando $l \geq 3$ e $n - l \geq 2$, i.e., $n \geq 5$.*

Considerazione sulla condizione A_1''. Le entrate della matrice $\mathcal{R}$ sono serie di potenze in $\mathbf{w}'$. Assumiamo che questa matrice sia triangolare. Allora per la condizione A_1''b) abbiamo $a_j = b_{jj} - \lambda_j a$, e la condizione A_1''a) afferma che gli elementi diagonali b_{jj} non sono arbitrari, ma, quando considerati come serie di potenze, devono soddisfare certe condizioni lineari.

In generale la matrice $\mathcal{R}$ non è triangolare e ciò causa significative complicazioni nella dimostrazione della convergenza.

Interpretazione geometrica in $\mathbb{R}^n$ delle condizioni A_2 e A_1'. Siano

$$\mathfrak{O} := \{Q \in \mathbb{R}^n \;:\; Q \geq 0\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{R} := \{Q \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle Q|\lambda\rangle = 0\}$$

rispettivamente l'ortante non negativo e il sottospazio lineare delle soluzioni reali dell'equazione di risonanza. Sia inoltre

$$\mathfrak{T} := \{Q \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle Q|G_R\rangle = 0 \;\forall R \in N\}\,.$$

poiché $L = S = G_0$ abbiamo $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{R}$.

Mostreremo che le condizioni A_2 e A_1' sono *equivalenti* a

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{T}.$$

In altre parole, se $Q \geq 0$ e $\langle Q|\lambda\rangle = 0$ allora $\langle Q|G_R\rangle = 0$.

Nel caso 2, $\dim \mathfrak{R} = \dim(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}) = n - 2$, quindi $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{T}$ è equivalente a $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}$. Consideriamo lo spazio $\mathfrak{R}^\perp$ ortogonale a $\mathfrak{R}$. Allora $\mathfrak{R}^\perp$ è generato dai vettori $\Re e\lambda$ e $\Im m\lambda$. Se abbiamo che $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}$, allora $\Re e G_R$ e $\Im m G_R$ giacciono in $\mathfrak{R}^\perp$, cioè possono essere scritti come combinazione lineare di $\Re e\lambda$ e $\Im m\lambda$. Dunque ogni G_R è una combinazione di λ e $\bar{\lambda}$ a coefficienti complessi e quindi la condizione A_2 è soddisfatta.

Viceversa, sempre nel caso 2, assumendo la condizione A_2, cioè $\mathbf{G} = \lambda a + \bar{\lambda} b$, il fatto $\langle Q|\lambda\rangle = 0$ implica

$$\langle Q|G_R\rangle = \left\langle Q|\lambda a_R + \overline{\lambda} b_R\right\rangle = \langle Q|\lambda a_R\rangle + \overline{\langle Q|\lambda b_R\rangle} = 0,$$

cioè $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{T}$, quindi $\mathfrak{R} = \mathfrak{T}$ e la tesi.

Nel caso 1.d la situazione è simile alla precedente, eccetto che $\dim \mathfrak{R} = n - 1$ e $\dim \mathfrak{R}^\perp = 1$. Dunque G_R può essere espresso come un multiplo del solo vettore λ.

Infine, se $l < n$ nel caso 1, allora per ogni $Q \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ si ha necessariamente $Q'' = 0$. Quindi la condizione $\langle Q|G_R\rangle = 0$ non rappresenta alcuna restrizione su $\mathbf{G}''$. Poiché le restrizioni riguardano solo $\mathbf{G}'$, l'equivalenza con la condizione A può esser mostrata analogamente a casi precedenti considerando ora i vettori Q', G' e λ' nel sottospazio $\mathbb{R}^l$.

La foliazione $\{\mathbf{z}^R = c\}$

Se r è un numero reale non è sempre ben definita la potenza z^r per ogni numero complesso z. Infatti già la radice quadrata, $z^{1/2}$ dà problemi: sia i che $-i$ al quadrato danno -1, quindi, chi è $\sqrt{-1}$?

Il problema viene dal fatto che si hanno più determinazioni del logaritmo: se $z \in \mathbb{C}$ e $l \in \mathbb{C}$ sono tali che $e^l = z$ allora anche $l + 2\pi ik$, con $k \in \mathbb{Z}$ è tale che $e^{l+2\pi ik} = e^l e^{2\pi ik} = z$. Inoltre in questo modo abbiamo caratterizzato tutti i possibili logaritmi di z. In conclusione, $\log z$ non è ben definito, ma $\log z + 2\pi i\mathbb{Z}$ sì.

Per quanto riguarda il nostro problema, se $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ e $R \in \mathbb{R}^n$ non è ben chiaro cosa si intenda per $\mathbf{z}^R = c$, come funzione definita a valori in $\mathbb{C}$. Mostriamo però che ha senso vederla come funzione in uno spazio opportuno. Con l'idea che, qualunque definizione vogliamo dare all'elevazione a potenza, 0 elevato ad una qualche potenza non nulla debba fare 0 e qualsiasi numero elevato alla 0 faccia 1, consideriamo $\mathbb{C}^*$ come gruppo moltiplicativo. Sia dunque $R \in \mathbb{R}^n$ tale che $r_j \neq 0, 1$, $\Gamma_R := e^{r_1 2\pi i\mathbb{Z}+\ldots+r_n 2\pi i\mathbb{Z}}$ è un sottogruppo (moltiplicativo) di $\mathbb{C}^*$ quindi a senso dire

$$\mathbf{z}^R \equiv c \pmod{\Gamma_R}.$$

Se $r_j = 1$, non abbiamo nessuna restrizione su z_j. Se $r_j = 0$ ($c \in \mathbb{C}^*$), dobbiamo avere $z_j = 0$. Comunque vogliamo definire la funzione facendole assumere anche il valore 0. Infatti, se $c = 0$ non ci sono problemi: se $r_j > 0$ allora $z \in \{z^R = 0\}$ implica $z_j = 0$ e non ci sono vincoli sugli z_j se $r_j = 0$. In poche parole, non stiamo facendo altro che prendere determinazioni logaritmiche qualsiasi per z_j e avere

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^R &:= \exp\left(r_1\left(\log z_1 + 2\pi i\mathbb{Z}\right) + \ldots + r_n\left(\log z_n + 2\pi i\mathbb{Z}\right)\right)\\ &= \exp\left(r_1 \log z_1 + \ldots + r_n \log z_n\right)\exp\left(r_1 2\pi i\mathbb{Z} + \ldots + r_n 2\pi i\mathbb{Z}\right)\end{aligned}$$

Dunque, se $R \in \mathbb{R}^n$ e se $\Omega := \mathbb{C}^*/\Gamma_R \cup 0$, è ben definita la funzione

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^n & \longrightarrow & X\\ \mathbf{z} & \longmapsto & \mathbf{z}^R.\end{array}$$

Le curve di livello $\{z^R = c\}_{c\in\Omega}$danno una foliazione di $\mathbb{C}^n$. Analogamente il vettore

$$\nabla = \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{\mathbf{z}^R}{z_j}\partial_j$$

non è ben definito se non a meno di una costante moltiplicativa.

Dopo questi preliminari possiamo dare un'interpretazione geometrica della condizione A di Brjuno nel caso di Siegel data da J. Martinet in [21].

Proposizione 4.19 *(Martinet) Sia* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{Conv}(\lambda)$. *(Nel caso in cui* $\operatorname{Conv}(\lambda)$ *è ridotto ad un segmento l'interno è il segmento meno i suoi estremi)*[7] *Un campo vettoriale* $\boldsymbol{X}$ *singolare nell'origine con parte lineare* L *è tangente ad ogni foliazione*

$$\{\mathbf{z}^R = costante\}$$

per ogni R *tale che* $\langle\lambda|R\rangle = 0$, *con* $r_j \geq 0$, $r_j \in \mathbb{R}$, *se e solo se* $\boldsymbol{X}$ *è della forma*

$$\boldsymbol{X} = \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j z_j a(\boldsymbol{z}) + \bar{\lambda}_j z_j b(\boldsymbol{z})\right) \partial_j.$$

Dimostrazione. Scriviamo $\mathbf{X} = \sum_j \tilde{X}_j z_j \partial_j$ con $\tilde{X}_j = \sum_{Q \in N_j} g_Q^j \mathbf{z}^Q$.

Essere tangenti alla foliazione $\{\mathbf{z}^R = costante\}$ equivale ad essere ortogonali al gradiente

$$\nabla = \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{\mathbf{z}^R}{z_j} \partial_j,$$

il quale è definito a meno di una costante, ma comunque siamo solo interessati alla sua direzione. Quindi

$$\begin{aligned}
(\nabla, \mathbf{X}) &= \sum_j r_j \frac{\mathbf{z}^R}{z_j} \tilde{X}_j z_j \\
&= \sum_{jQ} r_j \mathbf{z}^R g_Q^j \mathbf{z}^Q \\
&= \mathbf{z}^R \sum_Q \left(\sum_j r_j g_Q^j \right) \mathbf{z}^Q.
\end{aligned}$$

Si hanno perciò le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned}
0 = (\nabla, \mathbf{X}) &\iff \sum_j r_j g_Q^j = 0 \qquad \forall Q \in N_j,\ \forall R \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{D} \\
&\iff g_Q^j = a_Q^j \lambda_j + b_Q^j \bar{\lambda}_j.
\end{aligned}$$

Questa ultima implicazione è vera perché si ha

$$\begin{aligned}
\sum_j r_j g_Q^j = 0 \qquad \forall R \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{D} &\Leftrightarrow \langle G_Q | R \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \qquad \forall R \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{D} \\
&\Leftrightarrow \Re e(\mathbf{G}_Q), \Im m(\mathbf{G}_Q) \perp (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}) \\
&\Leftrightarrow \Re e(\mathbf{G}_Q), \Im m(\mathbf{G}_Q) \perp \mathfrak{R}
\end{aligned}$$

(poiché, come abbiamo mostrato prima, $\dim(\mathfrak{R}) = \dim(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D})$).

[7] Cioè siamo nel caso 2 o 1.d

Ma $\mathfrak{R} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\Re e\lambda, \Im m\lambda\}^{\perp}$ e quindi

$$\Re e(\mathbf{G}_Q), \Im m(\mathbf{G}_Q) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\Re e\lambda, \Im m\lambda\}_{\mathbb{R}}$$

e $\mathbf{G}_Q \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\lambda, \bar{\lambda}\}$, dove $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

$\square$

4.6.2 Invarianza

Le forme normali, come il cambio di variabili, non sono univocamente determinate. In questa sezione mostreremo che le condizioni A sulla forma normale sono invarianti rispetto a cambi di variabili che portano ad altre forme normali. In altre parole, se la condizione A è verificata per una qualche forma normale di un dato sistema differenziale, allora ogni altra forma normale del sistema soddisfa la condizione.

Proposizione 4.20 *Se il cambio di variabili*

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

coniuga una forma normale di un sistema differenziale

$$\dot{\mathbf{z}} = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{z})$$

ad un'altra forma normale del sistema

$$\dot{\mathbf{w}} = L\mathbf{w} + \hat{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{w}),$$

e se la prima forma normale soddisfa $\langle P|G\rangle \equiv 0$ *per ogni* $P \in N$ *con* $\langle P|\lambda\rangle = 0$*, allora* G_j *sono delle vere serie di potenze (nel senso che nello sviluppo non ci sono monomi elevati a coefficienti negativi) e* $G_{2j} = G_{1j}(\mathbf{h})$*.*

Dimostrazione. Omessa

□

Teorema 4.21 *Se almeno una forma normale di un dato sistema differenziale soddisfa la condizione A, allora ogni altra forma del sistema la soddisfa.*

Dimostrazione. La condizione A è il verificarsi della condizione A_2 nel caso 2 o di A_1' e A_1'' nel caso 1. La dimostrazione deve esser data separatamente per ognuna delle condizioni A_2, A_1' e A_1''.

Caso 2. Siano $\dot{\mathbf{z}} = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{Y}}_1(\mathbf{z})$ e $\dot{\mathbf{w}} = L\mathbf{w} + \hat{\mathbf{Y}}_2(\mathbf{w})$ due forme normali e la prima soddisfi A_2, quindi $\mathbf{G}_1 = \lambda a_1 + \bar{\lambda} b_1$. In particolare vale la proposizione precedente. Dunque $\mathbf{G}_2 = \lambda a_2 + \bar{\lambda} b_2$, dove $a_1 = a_2(\mathbf{h})$ e $b_1 = b_2(\mathbf{h})$, i.e., vale la condizione A_2 per la seconda forma normale.

Caso 1. Questo caso non è per nulla banale. Omettiamo la dimostrazione e facciamo riferimanto alle pagine 182 e 183 di Brjuno, [7].

□

4.7 Dimostrazione della convergenza col metodo di Newton

Poniamo $\omega_k := \min |\langle Q|\lambda\rangle|$, dove il minimo è preso sui Q per cui $\langle Q|\lambda\rangle \neq 0$, $\|Q\| \leq 2^k$, $Q \in N$.

La *Condizione* ω è

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^k} \log \omega_k \ < \ +\infty.$$

Nel caso 1* la condizione ω è sempre verificata, poiché è possibile provare che $\omega_k \geq \varepsilon > 0$ e, dunque,

$$\sum_{k=0}^{\infty} -2^{-k} \log \omega_k \leq -\log \varepsilon.$$

Questo paragrafo sarà interamente dedicato alla dimostrazione del teorema principale sulla convergenza delle trasformazioni normalizzanti. Facciamo notare che quando una forma normale soddisfa la condizione A allora in particolare il suo differenziale in 0 non ha parte nilpotente, dunque sarà della forma

$$S := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j \partial_j \quad , \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}.$$

Il risultato più importante di A. D. Brjuno è il seguente.

Teorema 4.22 *Supponiamo che S, corrispondente ad un sistema differenziale olomorfo*

$$\dot{\mathbf{z}} = S\mathbf{z} + \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{z}), \tag{4.10}$$

soddisfi la condizione ω e che una forma normale del sistema soddisfi la condizione A. Allora esiste un cambio di coordinate analitico che riduce il sistema alla forma normale.

Il teorema 4.9 segue da questo e dal 4.14.

La dimostrazione si basa sul metodo di Newton generalizzato. La trasformazione è costruita per approssimazioni successive. Diamo uno sketch della dimostrazione.

Supponiamo che il sistema $\dot{\mathbf{z}} = S\mathbf{z} + \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{z})$ coincida con la forma normale fino all'ordine m. Allora esiste un cambio di variabili

$$\mathbf{z} = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w}) \tag{4.11}$$

tale che, nelle nuove coordinate, il sistema coinciderà con la forma normale fino all'ordine (rispetto a $\mathbf{w}$) $\leq 2m$. $\hat{\mathbf{h}}$ soddisferà un sistema di PDE lineari (Lemma 4.23). Il Lemma 4.25 elencherà proprietà del sistema di partenza che seguono dalla condizione A. Sulla base di queste proprietà e stime sul sistema differenziale per $|z_j| < \rho$, proveremo che $|\hat{\mathbf{h}}_j| < c_2\omega_{k+1}^{-a}$ dove $m = 2^k$ e c_2 e a dipendono solo da λ. La dimostrazione sarà portata avanti separatamente per ognuno dei casi 2, 1*, 1** nei Lemmi 4.26, 4.27, 4.28 rispettivamente. L'ultimo, come sempre, sarà il più complicato e la dimostrazione si baserà sui casi precedenti. Poiché la serie $\hat{\mathbf{h}}_j$ comincia con i termini d'ordine m, il raggio di convergenza decresce, dopo la k-esima iterazione, di $\left(c_2\omega_{k+1}^{-a}\right)^{1/m}$ volte. Comunque il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{n} \left(c_2\omega_{k+1}^{-a}\right)^{1/2^k}$$

converge per la condizione ω. Quindi la trasformazione risultante ha un raggio positivo di convergenza e la dimostrazione è completata.

Il punto più difficile della dimostrazione sta nel provare che anche il nuovo sistema nelle $\mathbf{w}$ soddisfa le stesse stime del sistema originario in $\mathbf{z}$.

4.7.1 Introduzione all'iterazione

Un po' di notazioni.

Sia $\mathbf{h}(\mathbf{w}) = (h_1(\mathbf{w}), \ldots, h_n(\mathbf{w}))$ una serie (vettoriale) di potenze in $\mathbf{w}$. Per ogni numero complesso δ, l'espressione $\{h_j\}_\delta$ denota la serie che consiste solo di quei termini $cw_j\mathbf{w}^Q$ della serie h_j per cui $\langle Q|\lambda\rangle = \delta$; quindi per una forma normale $\mathbf{Y}$ abbiamo $\{g_j\}_0 = g_j$ e $\{g_j\}_\delta = 0$ per $\delta \neq 0$. Con le notazioni introdotte al capitolo 2 avremmo $\{h_j\}_\delta = \pi_{E_\delta}(h_j)$

Inoltre, per un arbitrario monomio $c\mathbf{w}^Q$ poniamo

$$\mathrm{ord}(c\mathbf{w}^Q) := \|Q\|\,;$$

per una serie di potenze h, $\mathrm{ord}(h)$ è l'insieme degli ordini di tutti i termini della serie. La notazione $m <\mathrm{ord}(h)\leq 2m$ significa che tutti i termini di h hanno ordine più grande di m ma non di $2m$.

$[h]_m$ denota l'm-jet di h, i.e., il polinomio definito dai termini della serie di h il cui ordine non è più grande di m; quindi $\mathrm{ord}[h]_m \leq m$. Per il vettore $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ poniamo $\mathrm{ord}(\mathbf{h}) = \cup_{j=1}^{n}\mathrm{ord}(h_j)$ e in modo simile per le matrici.

Consideriamo il sistema

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \psi_j(\mathbf{z}) + \varphi_j(\mathbf{z}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.12}$$

che coincide con una forma normale nei termini di ordine $\leq m$:

$$1 \leq \mathrm{ord}(\psi_j) \leq m, \qquad \{\psi_j\}_0 = \psi_j, \qquad m+1 \leq \mathrm{ord}(\varphi_j), \tag{4.13}$$

le serie ψ_j non contengono termini lineari eccettuata eventualmente la parte nilpotente dello jacobiano.

Cerchiamo una trasformazione $\mathbf{z} = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$ con $\mathrm{ord}(\hat{h}_j) \geq m+1$, che porti il sistema in esame ad un sistema che coincida con una forma normale nei termini di ordine $\leq 2m$, cioè, della forma

$$\dot{w}_j = \lambda_j w_j + \psi_j(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_j(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_j(\mathbf{w}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.14}$$

con

$$m + 1 \leq \mathrm{ord}(\tilde{\psi}_j) \leq 2m, \qquad \{\tilde{\psi}_j\}_0 = \tilde{\psi}_j, \qquad 2m + 1 \leq \mathrm{ord}(\tilde{\varphi}_j).$$

Inoltre possiamo supporre $\mathrm{ord}(\hat{h}_j) \leq 2m$.

A questo punto dobbiamo provare che tutto ciò è possibile.

Lemma 4.23 ***(Lemma base)*** *Il cambio di variabili* $\mathbf{z} = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$ *che trasforma*

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \psi_j(\mathbf{z}) + \varphi_j(\mathbf{z})$$

in

$$\dot{w}_j = \lambda_j w_j + \psi_j(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_j(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_j(\mathbf{w}),$$

con

$$\begin{gathered} m + 1 \leq \mathrm{ord}(\hat{h}_j) \leq 2m, \\ 1 \leq \mathrm{ord}(\psi_j) \leq m < \mathrm{ord}(\varphi_j), \\ m + 1 \leq \mathrm{ord}(\tilde{\psi}_j) \leq 2m < \mathrm{ord}(\tilde{\varphi}_j), \end{gathered} \tag{4.15}$$

esiste ed è unicamente determinato dalla condizione

$$\{\hat{h}_j\}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \{\hat{h}_j\}_\delta = [\{\zeta_j\}_\delta]_{2m} \tag{4.16}$$

dove ζ_j è la soluzione del sistema

$$\delta\{\zeta_j\}_\delta + \sum_k \frac{\partial\{\zeta_j\}_\delta}{\partial w_k} \cdot \psi_k = \sum_k \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \cdot \{\zeta_k\}_\delta + \{\varphi_j\}_\delta \tag{4.17}$$

per ogni $\delta \neq 0$ e $j = 1, \ldots, n$. Inoltre

$$\tilde{\psi}_j = [\{\varphi_j\}_0]_{2m}. \tag{4.18}$$

Osservazione 4.24 *Se si preferisce il sistema non in coordinate è*

$$\delta\{\zeta\}_\delta + [\psi, \{\zeta\}_\delta] = \{\varphi_j\}_\delta,$$

o equivalentemente, con le notazioni del capitolo 2

$$[S + \psi, \zeta] = \pi_{E_0^\perp} \varphi$$

e, detta $\zeta = \sum_j \zeta_j \partial_j$, si ha $\hat{h}_j = \pi_{2m}\pi_{E_0^\perp}\zeta_j$. Attenzione: ζ è un campo vettoriale, invece h è un diffeomorfismo!

Dimostrazione. Deriviamo il cambio di variabili $\mathbf{z} = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$, in coordinate $z_j = w_j + \hat{h}_j(\mathbf{w})$,

$$\dot{z}_j = \dot{w}_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial w_k}(\mathbf{w}) \cdot \dot{w}_k.$$

Imponiamo il coniugio sostituendo le ipotesi.

$$\begin{aligned} & \lambda_j z_j + \psi_j(\mathbf{z}) + \varphi_j(\mathbf{z}) \\ = \; & \lambda_j w_j + \psi_j(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_j(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_j(\mathbf{w}) \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial w_k}(\mathbf{w}) \cdot \Big(\lambda_k w_k + \psi_k(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_k(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_k(\mathbf{w})\Big), \end{aligned}$$

che diventa

$$\begin{aligned} & \lambda_j \Big(w_j + \hat{h}_j(\mathbf{w})\Big) + \psi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})) + \varphi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})) \\ = \; & \lambda_j w_j + \psi_j(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_j(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_j(\mathbf{w}) + \\ & \quad \sum_k \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial w_k}(\mathbf{w}) \cdot \Big(\lambda_k w_k + \psi_k(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_k(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_k(\mathbf{w})\Big). \end{aligned}$$

Semplificando $\lambda_j w_j$, omettendo la dipendenza esplicita da $\mathbf{w}$, poiché tutto dipende da $\mathbf{w}$, e riordinando, otteniamo

$$\tilde{\psi}_j + \tilde{\varphi}_j + \sum_k \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial w_k} \cdot \Big(\lambda_k w_k + \psi_k + \tilde{\psi}_k + \tilde{\varphi}_k\Big) - \lambda_j \hat{h}_j = \psi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}) - \psi_j + \varphi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}).$$

Usiamo la formula di Taylor

$$\psi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}) = \psi_j(\mathbf{w}) + \sum_k \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \cdot \hat{h}_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial w_k \partial w_l} \cdot \hat{h}_k \hat{h}_l + \dots$$

e, poiché $m + 1 \le \operatorname{ord}(\hat{h}_j) \le 2m$, la seconda somma e i puntini sono termini di grado più grande di $2m + 1$. Analogamente,

$$\varphi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}) = \varphi_j(\mathbf{w}) + \sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial w_k} \cdot \hat{h}_k + \dots$$

e $\operatorname{ord}(\sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial w_k} \cdot \hat{h}_k + \dots) \ge (m + 1 - 1) + (m + 1) = 2m + 1$. Sostituendo e considerando i termini di ordine compreso tra $m + 1$ e $2m$:

$$\tilde{\psi}_j + \sum_k \left[\frac{\partial \hat{h}_j}{\partial w_k} \cdot (\lambda_k w_k + \psi_k)\right]_{2m} - \lambda_j \hat{h}_j = \sum_k \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \cdot \hat{h}_k\right]_{2m} + [\varphi_j]_{2m}.$$

Facciamo questa importante, anche se semplice, osservazione

$$\mathcal{L}_S(x^Q x_j \partial_j) := [S, x^Q x_j \partial_j] = \langle Q|\lambda\rangle\, x^Q x_j \partial_j$$

se $S := \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \partial_j$, cioè

$$\sum_k \frac{\partial (w^Q w_j)}{\partial w_k} \lambda_k w_k - \lambda_j w_j w^Q = \langle Q|\lambda\rangle\, w^Q w_j.$$

Perciò

$$\sum_k \frac{\partial \{\hat{h}_j\}_\delta}{\partial w_k} \lambda_k w_k - \lambda_j \{\hat{h}_j\}_\delta = \delta \{\hat{h}_j\}_\delta. \tag{4.19}$$

Infine otteniamo, usando il fatto che $\{\tilde{\psi}_j\}_0 = \tilde{\psi}_j$ e $\{\tilde{\psi}_j\}_\delta = 0$ se $\delta \neq 0$,

$$\delta \{\hat{h}_j\}_\delta + \sum_k \left[\frac{\partial \{\hat{h}_j\}_\delta}{\partial w_k} \cdot \psi_k \right]_{2m} = \sum_k \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \cdot \{\hat{h}_k\}_\delta \right]_{2m} + [\varphi_j]_{2m}$$

per ogni $\delta \neq 0$ e $j = 1, \ldots, n$.

La risolubilità unica del sistema può esser provata come il primo teorema di esistenza. Vale a dire si dà un ordinamento ai multiindici e per ricorrenza si mostra la risolubilità che avviene in modo unico.

□

Dalla dimostrazione del teorema segue la seguente formula utile in seguito:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_j \quad = \quad & -\sum_k \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial w_k} \cdot \tilde{\varphi}_k - \tilde{\varphi}_j - \sum_k \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial w_k} \cdot \left(\lambda_k w_k + \psi_k + \tilde{\psi}_k \right) + \lambda_j \hat{h}_j \\ & + \sum_k \hat{h}_k \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} (w_1 + \theta_1 \hat{h}_1, \ldots, w_n + \theta_n \hat{h}_n) + \varphi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}) \end{aligned} \tag{4.20}$$

dove $\theta_j \in [0,1]$ danno il resto nella formula di Taylor in forma di Lagrange.

Lemma 4.25 *Se la forma normale del sistema*

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \psi_j(\boldsymbol{z}) + \varphi_j(\boldsymbol{z}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

soddisfa la condizione A, allora la forma normale "troncamento"

$$\dot{w}_j = \lambda_j w_j + \psi_j(\boldsymbol{w}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.21}$$

soddisfa "quasi" la condizione A; nel senso che valgono A_2, A_1' e A_1''a) nei rispettivi casi; tuttavia la condizione A_1''b) subisce un lieve cambiamento.

Dimostrazione. Per quanto riguarda A_2, A_1' e A_1''a) il risultato è automatico dalla linearità e dal fatto che la condizione A è invariante per coniugio tra forme normali.

Per A_1''b) il fatto è molto più rognoso, omettiamo la dimostrazione; comunque saremo interessati maggiormente agli altri casi.

□

4.7.2 Stime di base

Si comincia con le stime. Se $b(\mathbf{w}) = \sum_Q b_Q \mathbf{w}^Q$ è una serie di Laurent, definiamo la sua serie assoluta (a termini positivi)

$$\|b\| := \sum_Q |b_Q| \mathbf{w}^Q$$

e la sua norma sul polidisco di raggio $\rho > 0$

$$\|b\|_\rho := \sum_Q |b_Q| \rho^{|Q|}.$$

Data un'altra serie di Laurent $d(\mathbf{w}) = \sum_Q d_Q \mathbf{w}^Q$ con $d_Q \geq 0$, diciamo che

$$b(\mathbf{w}) \prec d(\mathbf{w}) \Longleftrightarrow |b_Q| \leq d_Q \quad \forall Q.$$

Osserviamo alcune proprietà semplici ma fondamentali nel seguito.

1. **a)** Se $b \prec d$, allora $\|b\|_\rho \leq \|d\|_\rho$;
   b) se $b = \|d\|^m$, allora $b \prec \|d\|$;
   c) se $b = d \cdot e$, allora $\|b\| \prec \|d\| \, \|e\|$.
2. Se la serie b contiene solo potenze non negative nelle variabili,i.e., è una serie di potenze, allora
$$|b(\mathbf{w})| \leq \|b\|_\rho \qquad \text{se } |w_1|, \ldots, |w_n| \leq \rho.$$
3. Se $m \leq \operatorname{ord}(b)$ e $\rho \leq r$, allora
$$\|b\|_\rho \leq \left(\frac{\rho}{r}\right)^m \|b\|_r \,.$$
4. Se $\operatorname{ord}(b) \leq m$, allora
$$\left\| \frac{\partial b}{\partial w_k} \right\|_\rho \leq \frac{m}{\rho} \|b\|_\rho \,.$$

Nel seguito con $c_1, c_2, \ldots$ si indicheranno costanti positive opportunamente scelte, tutte dipendenti solo da λ. Alcune di queste saranno definite esplicitamente, delle altre mostreremo solo l'esistenza.

Lemma 4.26 *Nelle ipotesi del lemma base 4.23, e assumendo inoltre che λ sia nel caso 2 e il sistema "troncato" (4.21)*

$$\dot{w}_j = \lambda_j w_j + \psi_j(\boldsymbol{w}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

soddisfi la condizione (A_2)*, esistono costanti* c_1 *e* c_2 *tali che se, dato* $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$*, sono verificate le disuguaglianze*

$$\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \|\psi_j\|_\rho < c_1, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \right\|_\rho < c_1, \tag{4.22}$$

per $m = 2^k$*, allora si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{h}_j \right\|_\rho < c_2 \omega_{k+1}^{-2}.$$

Dimostrazione. Ci saranno due parti.

1. Soluzione del sistema (4.17). Osserviamo che per una serie arbitraria a da (4.19) si ha

$$\sum_k \frac{\partial \{\zeta_j\}_\delta}{\partial w_k} \lambda_k w_k a - \lambda_j \{\zeta_j\}_\delta a = \delta \{\zeta_j\}_\delta a.$$

Dalla condizione A_2, $G_j = a\lambda_j + b\bar{\lambda}_j$ $(\psi_j = G_j w_j = a w_j \lambda_j + b w_j \bar{\lambda}_j)$, otteniamo

$$\sum_k \frac{\partial \{\zeta_j\}_\delta}{\partial w_k} \psi_k - \{\zeta_j\}_\delta G_j = (a\delta + b\bar{\delta}) \{\zeta_j\}_\delta.$$

Allora il sistema (4.17) può essere scritto come

$$\delta(1 + a + \upsilon b)\{\zeta_j\}_\delta = \sum_k w_j \frac{\partial G_j}{\partial w_k} \cdot \{\zeta_k\}_\delta + \{\varphi_j\}_\delta$$

dove $\upsilon := \bar{\delta}/\delta$, $|\upsilon| = 1$. Introduciamo la matrice $D := \left\{ w_j \frac{\partial G_j}{\partial w_k} \right\}_{k,j=1}^{n}$, in modo da scrivere la formula trovata come

$$\delta(1 + a + \upsilon b)\{\zeta\}_\delta - D\{\zeta\}_\delta = \{\varphi\}_\delta. \tag{4.23}$$

Gli elementi di D^2 sono

$$\left\{ \sum_k w_j \left(\lambda_j \frac{\partial a}{\partial w_k} + \bar{\lambda}_j \frac{\partial b}{\partial w_k} \right) w_k \left(\lambda_k \frac{\partial a}{\partial w_l} + \bar{\lambda}_k \frac{\partial b}{\partial w_l} \right) \right\}_{jl}.$$

Comunque, per definizione di forma normale,

$$\sum_k w_k \lambda_k \frac{\partial a}{\partial w_k} = \sum_k w_k \lambda_k \frac{\partial (\sum_Q a_Q \mathbf{w}^Q)}{\partial w_k} = \sum_Q a_Q \mathbf{w}^Q \langle Q|\lambda \rangle = 0,$$

cioè,

$$S.\mathbf{a} = 0.$$

Analoghe equazioni si ottengono per $\bar{\lambda}_j$ e b; dunque $D^2 \equiv 0$. Quindi abbiamo la formula

$$[\mathrm{id} - cD]^{-1} = \mathrm{id} + cD$$

con c scalare. Quindi dalla (4.23)

$$\{\zeta\}_\delta = \left(\mathrm{id} + \frac{D}{\delta(1 + a + \upsilon b)}\right) \frac{\{\varphi\}_\delta}{\delta(1 + a + \upsilon b)}. \tag{4.24}$$

2. Stime della soluzione. Prima di tutto cerchiamo una costante c_1 tale che le ipotesi (4.22) implichino che

$$\|a\|_\rho < \frac{1}{4}, \qquad \|b\|_\rho < \frac{1}{4}.$$

Poiché siamo nel caso 2, i vettori λ e $\bar{\lambda}$ sono linearmente indipendenti e, senza perdita di generalità, possiamo supporre

$$\Delta := \begin{vmatrix} \lambda_1 & \bar{\lambda}_1 \\ \lambda_2 & \bar{\lambda}_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dalla condizione A_2 otteniamo $\begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \bar{\lambda}_1 \\ \lambda_2 & \bar{\lambda}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Invertiamo il sistema: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \Delta^{-1} \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_2 & -\bar{\lambda}_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$, cioè

$$a = \Delta^{-1}(\bar{\lambda}_2 G_1 - \bar{\lambda}_1 G_2), \qquad b = \Delta^{-1}(\lambda_1 G_2 - \lambda_2 G_1),$$

da cui

$$\|a\| \prec |\Delta^{-1}| \max_j |\lambda_j| \sum_{k=1}^{n} \|G_k\|$$

e simile per b. Tenendo in considerazione che $w_j G_j = \psi_j$ e $\rho > 1/2$, otteniamo

$$\|a\|_\rho < 2|\Delta^{-1}| \max_j |\lambda_j| \sum_{k=1}^{n} \|\psi_k\|_\rho .$$

Possiamo quindi determinare c_1 dall'equazione

$$2|\Delta^{-1}| \max_j |\lambda_j| c_1 = \frac{1}{4}.$$

Perciò, sfruttando il fatto che $|\frac{1}{1+c}| \leq \frac{1}{1-|c|}$,

$$\left\|(1 + a + \upsilon b)^{-1}\right\|_\rho \leq (1 - \|a\|_\rho - \|b\|_\rho)^{-1} < \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = 2.$$

Dalla condizione A_2, le G_j non contengono potenze negative nelle variabili. Dunque ($w_j G_j = \psi_j$)

$$w_j \frac{\partial G_j}{\partial w_k} \prec \left\| \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \right\|$$

e dalle ipotesi (4.22)

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left\| w_j \frac{\partial G_j}{\partial w_k} \right\|_\rho \leq \sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \right\|_\rho \leq c_1;$$

quindi $\|D\| \leq c_1$. La relazione (4.24) implica, considerando separatamente ogni componente, la stima

$$\|\{\zeta\}_\delta\| \prec \left(\mathrm{id} + \frac{\|D\|}{|\delta|(1 - \|a\| - \|b\|)} \right) \frac{\|\{\varphi\}_\delta\|}{|\delta|(1 - \|a\| - \|b\|)},$$

la quale, con le precedenti due stime, dà

$$\sum_{j=1}^{n} \|\{\zeta_j\}_\delta\|_\rho < (n + 2c_1 |\delta|^{-1}) 2|\delta|^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|\{\varphi_j\}_\delta\|_\rho . \tag{4.25}$$

Ricordo che $\delta = \langle Q|\lambda \rangle$, e che abbiamo bisogno solo dei termini $\{\zeta_j\}_\delta$ per cui $1 + \|Q\| \leq 2m$. Comunque $m = 2^k$ e perciò $|\delta| \geq \omega_{k+1}$. Abbiamo

$$\left(n + \frac{2c_1}{|\delta|} \right) \frac{1}{|\delta|} \leq \left(n + \frac{2c_1}{\omega_{k+1}} \right) \frac{1}{\omega_{k+1}} = \frac{\omega_{k+1} n + 2c_1}{\omega_{k+1}^2} \leq \frac{\omega_1 n + 2c_1}{\omega_{k+1}^2}$$

poiché $\omega_1 \geq \omega_{k+1}$.

Dunque da (4.16) e (4.25) otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \{\hat{h}_j\}_\delta \right\|_\rho < \frac{c_2}{\omega_{k+1}^2} \sum_{j=1}^{n} \|\{\varphi_j\}_\delta\|_\rho ,$$

dove $c_2 = 2(n\omega_1 + 2c_1)$. Infine, sommando su tutti i δ e ricordandosi che dall'ipotesi $\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho \leq 1$, otteniamo la tesi.

□

Lemma 4.27 *Nelle ipotesi del lemma base 4.23, e assumendo inoltre che λ sia nel caso 1* e il sistema "troncato" (4.21)*

$$\dot{w}_j = \lambda_j w_j + \psi_j(\boldsymbol{w}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

soddisfi la condizione (A_1'), esistono costanti c_1 e c_2 tali che se, dato $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$, sono verificate le disuguaglianze (4.22)

$$\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \|\psi_j\|_\rho < c_1, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \right\|_\rho < c_1,$$

per $m = 2^k$, allora si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{h}_j \right\|_\rho < c_2. \tag{4.26}$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\zeta_j = w_j h_j = w_j \sum_Q h_{jQ} w^Q, \qquad \check{g}_j = g_j - \lambda_j a = \sum_Q \check{g}_{jQ} w^Q \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{4.27}$$

Dalla condizione A_1', $\check{G}' \equiv 0$. È facile verificare che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \{\zeta_j\}_\delta}{\partial w_k} \psi_k - \{\zeta_j\}_\delta g_j &= w_j \sum_{P,R} h_{jP} \langle P | G_R \rangle w^{P+R} \\ &= w_j \sum_{P,R} h_{jP} \langle P | \lambda a_R \rangle w^{P+R} + w_j \sum_{P,R} h_{jP} \left\langle P | \check{G}_R \right\rangle w^{P+R} \\ &= \delta a \{\zeta_j\}_\delta + w_j \sum_{P,R} h_{jP} \left\langle P'' | \check{G}_R \right\rangle w^{P+R}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

dove $\langle P, \lambda \rangle = \delta$. Faremo ora uso di due lemmi che si possono trovare sull'articolo [7] di Brjuno a pagina 185. Per il lemma 1, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|\delta| > \varepsilon$. Per il lemma 2, per tale ε si può trovare c tale che $|P''| < c|\delta|$. Allora

$$\begin{aligned} w_j \sum_{P,R} |h_{jP}| \left| \left\langle P'' | \check{G}_R \right\rangle \right| w^{P+R} &\prec w_j \sum_P |h_{jP}| |P''| w^P \sum_{k>j} \sum_R |\check{g}_{kR}| w^R \\ &\prec c|\delta| \, \|\{\zeta_j\}_\delta\| \sum_{k>j} \|\check{g}_k\| \\ &\prec c|\delta| \, \|\{\zeta_j\}_\delta\| \left(\sum_{k>j} \|g_k\| + |\Lambda| \, \|a\| \right). \end{aligned} \tag{4.29}$$

poiché $\rho > 1/2$, la (4.22) porta a

$$\sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_\rho < 2c_1, \qquad |\lambda'| \, \|a\|_\rho < 2c_1.$$

Se $\lambda' = 0$, poniamo $a = 0$ e $\check{\lambda} = 1$. Se $\lambda' \neq 0$, poniamo $\check{\lambda} = |\lambda'|$. Allora $\|a\|_\rho < 2c_1 \check{\lambda}^{-1}$. Scriviamo la (4.17) nella forma

$$\delta \{\zeta_j\}_\delta = -\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \{\zeta_j\}_\delta}{\partial w_k} \psi_k - \{\zeta_j\}_\delta g_j \right) - \{\zeta_j\}_\delta g_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \{\zeta_k\}_\delta + \{\varphi_j\}_\delta,$$

con $j = 1, \ldots, n$. Dividendo entrambi i membri per δ, usando la disuguaglianza $|\delta|^{-1} < \varepsilon^{-1}$, la formula (4.28) e l'ultima stima (4.29) e infine sommando su tutti i δ e $j = 1, \ldots, n$ otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\| \prec c \sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|g_k\| + |\Lambda| \, \|a\| \right) + \sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\| \, \|a\| + \varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\| \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|$$

$$+\varepsilon^{-1} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\| + \varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\| .$$

Perciò

$$\sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\|_\rho < \sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\|_\rho \left[c \left(2c_1 + |\Lambda| 2c_1 \check{\lambda}^{-1} \right) + 2c_1 \check{\lambda}^{-1} + \varepsilon^{-1} 2c_1 + \varepsilon^{-1} c_1 \right]$$

$$+\varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho .$$

Ora ricaviamo c_1 dall'uguaglianza

$$c_1 \left(2c + 2|\Lambda| c \check{\lambda}^{-1} + 2\check{\lambda}^{-1} + 3\varepsilon^{-1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Dunque, per la (4.22)

$$\sum_{j=1}^{n} \|\zeta_j\|_\rho < \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho < \frac{2}{\varepsilon}$$

Dalla (4.16) abbiamo

$$\left\| \hat{h}_j \right\| \prec \|\zeta_j\| \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{h}_j \right\|_\rho < \frac{2}{\varepsilon}$$

e quindi in (4.26) abbiamo $c_2 = 2/\varepsilon$.

□

Lemma 4.28 *Nelle ipotesi del lemma base 4.23, assumendo inoltre che λ sia nel caso 1** e il sistema "troncato" (4.21)*

$$\dot{w}_j = \lambda_j w_j + \psi_j(\boldsymbol{w}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

soddisfi la condizione (A_1') e (A_1'') "modificata" come nel lemma 4.25, esistono costanti c_1, c_2 e a tali che se, dato $\frac{1}{2} < \rho \le 1$, sono verificate le disuguaglianze (4.22)

$$\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \|\psi_j\|_\rho < c_1, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \right\|_\rho < c_1,$$

per $m = 2^k$*, allora si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{h}_j \right\|_\rho < c_2 \omega_{k+1}^{-a}.$$

Dimostrazione. Omessa.

□

4.7.3 Conclusione della dimostrazione del teorema di convergenza

I vari lemmi provati in precedenza posso esser riassunti in un caso unico.

Corollario 4.29 *Dato* $\lambda \in \mathbb{C}^n$*, esistono costanti* $a \geq 0$*,* c_1 *e* c_2 *tali che comunque considerato un sistema nelle ipotesi del lemma base 4.23, tale che il sistema "troncato" (4.21)*

$$\dot{w}_j = \lambda_j w_j + \psi_j(\boldsymbol{w}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

soddisfi la condizione (A) *e, dato* $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$*, se sono verificate le disuguaglianze (4.22)*

$$\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho < 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \|\psi_j\|_\rho < c_1, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \right\|_\rho < c_1,$$

per $m = 2^k$*, allora si ha*

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{h}_j \right\|_\rho < c_2 \omega_{k+1}^{-a}. \tag{4.30}$$

La dimostrazione del teorema e divisa in 4 parti ed è basata su un processo iterativo. Nel seguito assumeremo che il membro destro della (4.30) sia più grande di 1:

$$1 \leq \frac{c_2}{\omega_{k+1}^a}.$$

Se così non fosse possiamo sempre ridurci a questo caso prendendo c_2 abbastanza grande.

1°. Mantenimento delle disuguaglianze (4.22) ad ogni passo.

Nelle ipotesi del lemma base 4.23, sia $m = 2^k$ e valgano le disuguaglianze (4.22). Dal corollario 4.29 vale

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \hat{h}_j \right\|_\rho < c_2 \omega_{k+1}^{-a} := \gamma^{-m}, \tag{4.31}$$

con $\gamma \leq 1$, per come supposto prima. Poniamo

$$r := m^{-1/m}\rho \qquad \text{e} \qquad R := \gamma m^{-1/m} r = \gamma m^{-2/m}\rho. \tag{4.32}$$

Si ha $R < r < \rho$. Le proprietà della norma introdotta e (4.15), (4.22), (4.31), (4.32) implicano

$$\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_R < \left(\frac{R}{\rho}\right)^{m+1} < \gamma^{m+1} m^{-2-\frac{2}{m}} < m^{-2}, \tag{4.33}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|\hat{h}_j\right\|_R < \gamma m^{-2-\frac{2}{m}} < m^{-2-\frac{2}{m}} < m^{-2}. \tag{4.34}$$

Si può mostrare che per $m \geq 3$ e per $\mathbf{w}$ nel polidisco di raggio R, vale che per ogni $\theta \in [0,1]$

$$|\mathbf{w} + \theta\hat{\mathbf{h}}| < r. \tag{4.35}$$

È sufficiente mostrare che

$$R + \left\|\hat{\mathbf{h}}\right\|_R < r.$$

In accordo con (4.34) otteniamo

$$R + \left\|\hat{\mathbf{h}}\right\|_R < \rho m^{-\frac{2}{m}} + m^{-2-\frac{2}{m}}.$$

Mostriamo che il membro di destra è più piccolo di $r := m^{-1/m}\rho$, i.e.,

$$\rho + m^{-2} < m^{1/m}\rho$$

oppure, equivalentemente,

$$\frac{m^{-2}}{m^{1/m} - 1} < \rho.$$

Ma

$$\frac{m^{-2}}{m^{1/m} - 1} = \frac{m^{-2}}{\exp\left(\frac{\log m}{m}\right) - 1} < \frac{m^{-2}}{\frac{\log m}{m}} = \frac{1}{m \log m} < \frac{1}{2}.$$

per $m \geq 3$. Siccome $\rho > 1/2$, la (4.35) segue.

Da (4.35), (4.22) e (4.15)

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}})\right\|_R < \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_r < \left(\frac{r}{\rho}\right)^{m+1} < m^{-1}. \tag{4.36}$$

Poiché $\mathrm{ord}(\hat{\mathbf{h}}_j) \leq 2m$, (4.32) e (4.34) implicano

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_j}{\partial w_k}\right\|_R < \frac{2m}{R} \sum_{j=1}^{n} \left\|\hat{h}_j\right\|_R < \frac{2m^{-1}}{\rho} \leq 4m^{-1}. \tag{4.37}$$

Da (4.18), (4.15) e (4.33) otteniamo

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|\tilde{\psi}_j\right\|_R < \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_R < m^{-2},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial w_k}\right\|_R < \frac{2m}{R}\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_R < 4m^{-1},$$

da cui

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|\tilde{\psi}_j\right\|_R < \frac{4n}{m}, \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \left\|\frac{\partial\tilde{\psi}_j}{\partial w_k}\right\|_R < \frac{4n}{m}. \tag{4.38}$$

L'identità (4.20), combinata con le stime (4.22) e (4.33)-(4.38), implica

$$\sum_{j=1}^{n} \|\tilde{\varphi}_j\|_R < 4m^{-1}\sum_{j=1}^{n} \|\tilde{\varphi}_j\|_R + m^{-1}c_{10}, \tag{4.39}$$

dove $c_{10} = 6 + 5c_1 + 5|\Lambda|$. Perciò

$$\sum_{j=1}^{n} \|\tilde{\varphi}_j\|_R < \frac{m^{-1}c_{10}}{1-4m^{-1}} = \frac{c_{10}}{m-4}, \tag{4.40}$$

e $\sum_{j=1}^{n} \|\tilde{\varphi}_j\|_R < 1$ per $m > c_{10} + 4$. Sotto le ipotesi del lemma base 4.23, le disuguaglianze (4.38) e (4.40) insieme con

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} < \rho \leq 1, & \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_\rho < 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \|\psi_j\|_\rho < c_1 - \dfrac{8n}{m}, & \sum_{j,k=1}^{n} \left\|\dfrac{\partial\psi_j}{\partial w_k}\right\|_\rho < c_1 - \dfrac{8n}{m} \end{cases} \tag{4.41}$$

(se $m > 8n/c_1$, allora $c_1 - 8n/m > 0$) implicano, per

$$m = 2^k > \max\left[c_{10} + 4,\ \frac{8n}{c_1},\ 3\right],$$

la disuguaglianza (4.31) e ancora le disuguaglianze

$$\sum_{j=1}^{n} \|\tilde{\varphi}_j\|_R < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left\|\psi_j + \tilde{\psi}_j\right\|_R < c_1 - \frac{8n}{m} + \frac{4n}{m} = c_1 - \frac{8n}{m'}, \tag{4.42}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \left\|\frac{\partial(\psi_j + \tilde{\psi}_j)}{\partial w_k}\right\|_R < c_1 - \frac{8n}{m'}.$$

Queste disuguaglianze sono analoghe alle (4.41), ma corrispondono ai nuovi valori di $R = \gamma m^{-2/m}\rho$, $m' = 2m$ e al nuovo sistema (4.14).

2°. Introduzione alle iterazioni e variazione di ρ

Consideriamo il processo di iterazione. Ad ogni passo il valore di m duplica e quello di ρ diminuisce di $\gamma m^{-2/m}$ volte. Poniamo, esplicitando la dipendenza da k, $m_k := 2^k$ e $\gamma_k := (c_2\omega_{k+1}^{-a})^{-1/m_k}$. Allora

$$\rho_{k+1} = \gamma_k m_k^{-\frac{2}{m_k}} \rho_k.$$

Dunque

$$\rho_{k+1} = \rho_s \prod_{l=s}^{k} \gamma_l m_l^{-\frac{2}{m_l}},$$

Pioché $\gamma_k < 1$, si ha

$$\rho_k > \rho_s \prod_{l=s}^{\infty} \gamma_l m_l^{-\frac{2}{m_l}}, \qquad k > s.$$

Comunque il prodotto infinito

$$\prod_{l=1}^{\infty} \gamma_l m_l^{-\frac{2}{m_l}} > 0,$$

i.e., converge. Infatti, il suo logaritmo è dato dalla serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \gamma_k - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log m_k}{m_k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(c_2\omega_{k+1}^{-a})}{m_k} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \log 2}{2^k}$$
$$= a\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log \omega_{k+1}}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log c_2}{2^k} - 2\log 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

La convergenza delle ultime due serie è ovvia e la prima serie converge per la condizione ω. Quindi il prodotto infinito converge e dunque esiste s tale che

$$\prod_{l=s}^{\infty} \gamma_l m_l^{-\frac{2}{m_l}} > \frac{1}{2},$$

ma allora $\rho_k > \rho_s/2$ per $k > s$.

3°. L'inizio delle iterazioni

Sia $m_0 = 2^{k_0}$ abbastanza grande affinché

$$m_0 > \max\left[c_{10} + 4,\ \frac{8n}{c_1},\ 3, 2^s\right]$$

Utilizzando il lemma base 4.23, riduciamo il sistema (4.10) con $m = m_0$ tramite un numero finito di iterazioni del sistema (4.12). Poiché ad ogni passo dell'iterazione il corrispondente cambio di variabili è polinomiale, in particolare è analitico. Per le ipotesi del teorema, il membro destro nel sistema (4.10) è analitico; dunque il membro destro nel sistema (4.12) è anche analitico nell'origine. Per definizione la matrice della parte lineare di una forma normale è una matrice di Jordan. Dunque in (4.12)

$$\psi_j = \varepsilon_j z_{j-1} + \eta_j, \qquad j = 1, \dots, n$$

dove le η_j non contengono termini costanti né lineari. Sostituiamo in (4.12) $z_j = \beta^j u_j$, $j = 1, \dots, n$; allora (4.12) implica

$$\dot{u}_j = \lambda u_j + \beta^{-1} \varepsilon_j u_{j-1} + \cdots .$$

Sia $\beta \in \mathbb{R}_+$ un numero positivo tale che

$$\beta^{-1} \sum_{j=2}^{n} |\varepsilon_j| < \frac{\alpha}{2}, \quad \text{dove } \alpha = c_1 - \frac{8n}{m_0} > 0.$$

Sostituiamo $u_j = \delta v_j$, $j = 1, \dots, n$, dove $\delta \leq 1$ è scelto in modo che nel sistema risultante (4.12) valga

$$\sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_1 < 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \|\eta_j\|_1 < \frac{\alpha}{2}, \qquad \sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial \eta_j}{\partial w_k} \right\|_1 < \frac{\alpha}{2}.$$

Questo può sempre esser fatto perché φ_j e η_j non contengono termini costanti e lineari. Quindi in queste nuove variabili valgono le disuguaglianze (4.41) con $\rho = 1$, e dunque vale (4.22).

In accordo con la prima parte della dimostrazione, valgono analoghe condizioni per il sistema (4.14) con $\rho_{k+1} = \gamma_k m_k^{-2/m}$ e $m_{k+1} = 2^{k+1}$. Poiché per ogni k vale che $\frac{1}{2}\rho_k \leq 1$ per la scelta di m_0, le ultime condizioni sono soddisfatte ad ogni passo dell'iterazione.

4°. Convergenza delle approssimazioni successive

Per $m = 2^k$ la trasformazione (4.11) sarà denotata con

$$\mathfrak{U}_k : \mathbf{w} \mapsto \mathbf{z}.$$

Se $|w_j| < \rho_{k+1}$, la (4.34) ci dà $\sum |w_j - z_j| < m_m^{-2}$. Poniamo

$$\mathfrak{V}_k = \mathfrak{U}_{k_s} \circ \mathfrak{U}_{k_s+1} \circ \cdots \circ \mathfrak{U}_k.$$

Allora la mappa $\mathfrak{V}_k : \mathbf{w} \mapsto \mathbf{z}$ è tale che per $|w_j| < 1/2$

$$\sum_{j=1}^{n} |w_j - z_j| < \sum_{j=k_0}^{k} m_j^{-2}.$$

Poiché la serie $\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{-2}$ converge, la successione di mappe $\mathfrak{V}_k$ convergono per $|w_j| < 1/2$. Perciò la trasformazione limite è analitica nell'origine. Inoltre, questo cambio di variabili era stato costruito in modo che portasse il sistema (4.12) in forma normale. Dunque abbiamo ottenuto un cambio di variabili analitico del sistema (4.12) con $m = m_0$ in forma normale. Comunque il sistema (4.12) era stato ottenuto dal sistema (4.10) tramite un biolomorfismo. La dimostrazione è conclusa.

$\square$

Capitolo 5

Ancora sulla normalizzazione di mappe

Nel seguito vogliamo cercare di utilizzare il fatto che in $\mathbb{C}^n$ vi sono delle coordinate standard con le quali è più facile fare stime e conti. Comunque, essendo i nostri oggetti in esame locali, non si perderà di generalità.

5.1 Normalizzazione diretta di mappe olomorfe

Proveremo in maniera diretta che ogni mappa può essere ridotta formalmente in forma normale tramite un adeguato cambio di variabili e poi studieremo proprietà di tali cambi di coordinate.

Nel seguito useremo le seguenti notazioni. Data una mappa analitica con punto fisso nell'origine $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, riscriviamola nella forma [1]

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}).$$

Se

$$\hat{\mathbf{f}} = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}_j e_j,$$

sviluppiamo in serie di potenze le coordinate

$$\hat{f}_j(\mathbf{z}) = z_j F_j(\mathbf{z}) = z_j \sum_Q F_Q^j \mathbf{z}^Q \qquad \text{dove } Q \in N_j, Q \neq 0.$$

Sia $\mathbf{g}(\mathbf{w})$ una sua forma normale; scriviamo anch'essa nello stesso modo:

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}) = L\mathbf{w} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{w})$$

[1] Non stiamo facendo nessuna assunzione sulla linearizzabilità della parte lineare; per questo motivo la chiameremo L e non Λ se non quando sarà diagonale.

con $\hat{\mathbf{g}} = \sum_{j=1}^{n} \hat{g}_j e_j$ e

$$\hat{g}_j(\mathbf{w}) = w_j G_j(\mathbf{w}) = w_j \sum_Q G_Q^j \mathbf{w}^Q \qquad \text{dove } Q \in N_j, Q \neq 0, \lambda^Q = 1.$$

Dato invece un cambio di variabili tangente all'identità $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w})$, avremo

$$\mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

con $\hat{\mathbf{h}} = \sum_{j=1}^{n} \hat{h}_j \mathbf{e}_j$ e

$$\hat{h}_j(\mathbf{w}) = w_j H_j(\mathbf{w}) = w_j \sum_Q H_Q^j \mathbf{w}^Q \qquad \text{dove } Q \in N_j, Q \neq 0$$

e indichiamo la serie dei soli termini risonanti di $\mathbf{h}$ così:

$$\mathbf{h}_\diamondsuit(\mathbf{w}) = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{\lambda^Q = 1} H_Q^j \mathbf{w}^Q \mathbf{e}_j.$$

$\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{g}}$, $\hat{\mathbf{h}}$ sono serie di potenze che non contengono termini di grado minore di due.

Inoltre useremo le notazioni:

$$\mathbf{F}_Q := (F_Q^1, \dots, F_Q^n) \ \in \mathbb{C}^n$$

in modo che

$$\mathbf{F} := (F_1, \dots, F_n) \equiv \sum_Q \mathbf{F}_Q \mathbf{z}^Q.$$

5.1.1 Esistenza

Teorema 5.1 *Per ogni mappa olomorfa*

$$L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z})$$

esiste un cambio di coordinate formale

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

che riduce la mappa ad una forma normale

$$L\mathbf{w} + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{w}),$$

In altre parole, in $\mathbf{g}$ *è nullo ogni termine non risonante, cioè, con le notazioni precedenti,* $\mathbf{G}_Q = 0$ *se* $\lambda^Q \neq 1$.

Inoltre, per $\lambda^Q = 1$, $\mathbf{H}_Q$ *può essere scelto in modo arbitrario; i rimanenti* $\mathbf{H}_Q$ *e* $\mathbf{G}_Q$ *sono univocamente determinati.*

Notare che $\mathbf{H}_Q$ con $\lambda^Q = 1$ sono proprio i coefficienti di $\mathbf{h}_\diamondsuit$.

Dimostrazione. Basta considerare l'equazione del coniugio

$$\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \mathbf{h} = \mathbf{g}$$

e sostituire secondo le notazioni. Fissate le $\mathbf{H}_Q$, con $\lambda^Q = 1$, in modo arbitrario, si avrà un sistema risolvibile nelle incognite $\mathbf{H}_Q$, con $\lambda^Q \neq 1$, e $\mathbf{G}_Q$, con $\lambda^Q = 1$.

Ecco il calcolo esplicito:

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \mathbf{g}$$

Sostituendo $\mathbf{h} = \mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}$, $\mathbf{f} = L + \hat{\mathbf{f}}$ e $\mathbf{g} = L + \hat{\mathbf{g}}$ si ha

$$\begin{aligned} (L + \hat{\mathbf{f}}) \circ (\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}) &= (\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}) \circ (L + \hat{\mathbf{g}}) \\ L + L\hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{f}} \circ (\mathrm{id} + \hat{\mathbf{h}}) &= L + \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{h}} \circ (L + \hat{\mathbf{g}}) \\ L\hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{f}} \circ \mathbf{h} &= \hat{\mathbf{g}} + \hat{\mathbf{h}} \circ (L + \hat{\mathbf{g}}). \end{aligned}$$

Consideriamo la coordinata j-esima,

$$\lambda_j \hat{h}_j + \varepsilon_j \hat{h}_{j-1} + \hat{f}_j \circ h = \hat{g}_j + \hat{h}_j \circ (L + \hat{g}).$$

Sostituisco lo sviluppo in serie di potenze:

$$\lambda_j \sum_{|Q| \geq 2} h_{jQ} \mathbf{w}^Q + \varepsilon_j \sum_{|Q| \geq 2} h_{j-1,Q} \mathbf{w}^Q + \sum_{|R| \geq 2} f_{jR} \prod_{k=1}^{n} \left[w_k + \sum_{|P| \geq 2} h_{kP} \mathbf{w}^P \right]^{r_k}$$

$$= \sum_{|Q| \geq 2} g_{jQ} \mathbf{w}^Q + \sum_{|R| \geq 2} h_{jR} \prod_{k=1}^{n} \left[\lambda_k w_k + \varepsilon_k w_{k-1} + \sum_{|P| \geq 2} g_{kP} \mathbf{w}^P \right]^{r_k}.$$

Vogliamo ora calcolare il coefficiente di $\mathbf{w}^Q$. Consideriamo il primo membro; abbiamo le componenti $\lambda_j h_{jQ}$ e $\varepsilon_j h_{j-1,Q}$ dalle prime due somme e poi un altro contributo che non siamo interessati a calcolare ma che dipende polinomialmente dai coefficienti di $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$. Però i termini h_{kP} con $|P| \geq |Q|$ non danno contributo poiché $\hat{\mathbf{f}}$ è del secondo ordine. Infatti, nel prodotto $\left[w_k + \sum_{|P| \geq 2} h_{kP} \mathbf{w}^P \right]^{r_k}$ le potenze a cui appartiene h_{kP} hanno ordine maggiore o uguale di P; la serie $\hat{\mathbf{f}}$ ha indici $|P| \geq 2$ quindi $h_{kP}\mathbf{w}^P$ verrà moltiplicato per qualche altro w_s. Dunque si ha dipendenza da h_{kP} solo per $|P| < |Q|$. Per quanto riguarda il secondo membro, la prima somma dà contributo g_{jQ} e per il resto dobbiamo fare un ragionamento simile al precedente ma con una stima un po' più precisa sulla dipendenza dalle variabili. Come prima $|P| < |Q|$. Inoltre $R \leq Q$, nel senso dell'ordinamento lessicografico introdotto per i campi vettoriali. Sia nel caso in cui $R > Q$ sia in quello in cui $R = Q$ e nel prodotto $\left[\lambda_k w_k + \varepsilon_k w_{k-1} + \sum_{|P| \geq 2} g_{kP} \mathbf{w}^P \right]^{r_k}$

contribuiscono gli ε_k otteniamo un indice che è preceduto da Q; dunque l'unico termine significativo è $\lambda^Q h_{jQ}$. Riassumendo

$$\begin{aligned}&\lambda_j h_{jQ} + \varepsilon_j h_{j-1,Q} + \text{Pol.}(f_{jR}, h_{kP} : |P| < |Q|)\\ &= g_{jQ} + \lambda^Q h_{jQ} + \text{Pol.}\,(h_{jR}, g_{kP} : |P| < |Q|, R < Q)\,.\end{aligned}$$

Dunque abbiamo ottenuto la formula:

$$\begin{aligned}&g_{jQ} + (\lambda^Q - \lambda_j)h_{jQ} \\ &= \varepsilon_j h_{j-1,Q} + \text{Pol.}(f_{jR}, h_{kP} : |P| < |Q|) - \text{Pol.}\,(h_{jR}, g_{kP} : |P| < |Q|, R < Q)\,.\end{aligned} \tag{5.1}$$

Abbiamo già imposto che i termini lineari degli oggetti considerati fossero uguali. Infatti nei passaggi si sono semplificati automaticamente. Per quanto riguarda i termini successivi, detto C_{jQ} il membro di destra nella (5.1), possiamo porre

$$g_{jQ} = 0 \quad , \quad h_{jQ} = (\lambda^Q - \lambda_j)^{-1} C_{jQ}, \quad \text{se } \lambda^Q - \lambda_j \neq 0 \tag{5.2}$$

$$g_{jQ} = C_{jQ}, \qquad h_{jQ} \quad \text{arbitrario}, \qquad \text{se } \lambda^Q - \lambda_j = 0 \tag{5.3}$$

Notare il problema dovuto all'annullamento dei piccoli divisori.
Dunque, seguendo l'ordine lessicografico degli indici si possono determinare induttivamente i coefficienti g_{jQ} e h_{jQ} con le proprietà volute.

□

Dal teorema segue che dato un sistema iniziale non è sempre unicamente determinata la forma normale. Ipotizziamo che un qualche sistema può essere ridotto in due modi diversi in forma normale (vedi Rüssmann [34]), nel senso che ci sono due diverse forme normali ad esso coniugate. Per la proprietà transitiva del coniugio siamo quindi in presenza di due diverse forme normali coniugate. Cerchiamo di vedere la struttura dei cambi di variabili che mandano forme normali in forme normali; in modo da poter conoscere tutte le riduzioni del sistema originale in forma normale appena conosciamo una sua riduzione.

Teorema 5.2 *Se il cambio di variabili*

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

coniuga una forma normale di una mappa ad un'altra forma normale, allora $\mathbf{H}_Q = 0$ *se* $\lambda^Q \neq 1$.

5.1.2 Trasformazioni speciali

C'è una la relazione di convergenza tra i vari cambi che portano la mappa in una forma normale, detti brevemente trasformazioni normalizzanti.

Teorema 5.3 *Se esiste una trasformazione normalizzante convergente del sistema*

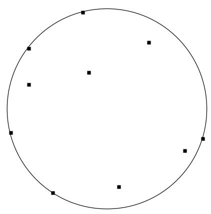
$$L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}),$$

allora ogni altra trasformazione normalizzante $\boldsymbol{h}$ *del sistema converge non appena* $\boldsymbol{h}_\diamondsuit$ *converge. Quindi, se il sistema ha almeno una trasformazione normalizzante* $\boldsymbol{h}$ *divergente tale che* $\boldsymbol{h}_\diamondsuit$ *converge, allora ogni altra trasformazione normalizzante diverge.*

5.2 Classificazione di base

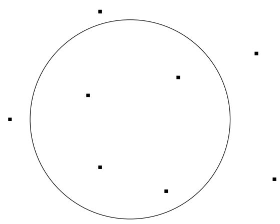
Data una matrice L o anche solamente la sua parte semisemplice Λ, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori. Sia $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Abbiamo la dicotomia

Caso 1 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartiene al *dominio chiuso di Poincaré*: i punti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono in modulo o tutti minori o uguali a 1 o tutti maggiori o uguali a 1. In altre parole, ce ne saranno alcuni in $\mathbb{S}^1$ e altri in una delle due regioni aperte che $\mathbb{S}^1$ individua. A meno di rinumerare le variabili possiamo supporre che $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{S}^1$ mentre $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ appartengono tutti ad una stessa regione delle due individuate: $|z| < 1$ o $|z| > 1$.



Caso 1

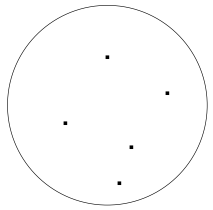
Caso 2 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ appartiene al *dominio di Siegel*: esiste un punto con modulo minore stretto di 1 ed un altro di modulo maggiore stretto di 1. In altre parole, ci sono almeno due punti ciascuno in una delle due regioni, $|z| < 1$ o $|z| > 1$, che $\mathbb{S}^1$ individua.



Caso 2

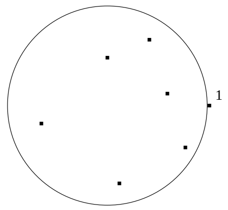
Dividiamo il caso 1 in quattro ulteriori sottocasi:

1.a $\min\left\{\max_j |\lambda_j|, \max_j |\lambda_j^{-1}|\right\} < 1$; i punti sono o tutti dentro o tutti fuori la circonferenza unitaria (dominio di Poincaré).



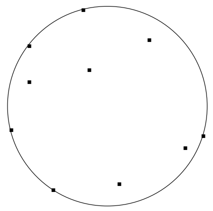
Caso 1.a

1.b 1 è un autovalore di L e i restanti sono nel dominio di Poincaré. Quindi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 1$ (con $0 < l < n$), e i rimanenti $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n$ sono tutti o modulo < 1 o > 1. In pratica 1 è un autovalore di molteplicità l.



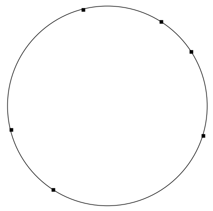
Caso 1.b

1.c O $|\lambda_j| \leq 1$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ oppure $|\lambda_j^{-1}| \leq 1$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ ed esiste un j tale che $|\lambda_j| = 1$ ma $\lambda_j \neq 1$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ (con $1 < l < n$) i punti che giacciono su $\mathbb{S}^1$.



Caso 1.c

1.d $\lambda_j \in \mathbb{S}^1$ per ogni $j = 1, \ldots, n$. In questo caso $l = n$.



Caso 1.d

Quindi, per come abbiamo scelto l, è sempre vero che $\lambda_1, \ldots, \lambda_l \in \mathbb{S}^1$ mentre $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_n \notin \mathbb{S}^1$ e sono tutti da una stessa parte di $\mathbb{S}^1$. Nel caso 1, per semplicità di esposizione ci limiteremo allo studio del caso semiattrattivo, i.e., $|\lambda_j| \leq 1$, poiché comunque dal caso semirepulsivo ($|\lambda_j| \geq 1$) ci si riconduce considerando la mappa inversa. Consideriamo i moduli ρ_j, la distanza tra λ_j e 0; possiamo rinumerare le variabili in modo che

$$1 = \rho_1 = \cdots = \rho_l > \rho_{l+1} \geq \cdots \geq \rho_n \geq 0.$$

Poniamo

$$\begin{aligned} \rho_j &:= && \left(\lambda_j \bar{\lambda}_j\right)^{1/2} && = \text{distanza}(\lambda_j, 0) \\ e^{2\pi i \theta_j} &:= && \frac{\lambda_j}{\rho_j} = \lambda_j \left(\lambda_j \bar{\lambda}_j\right)^{-1/2} && = \text{l'angolo di fase tra } \lambda_j \text{ e } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se $\rho := (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}_+^n$ e $e^{2\pi i \Theta} := (e^{2\pi i \theta_1}, \ldots, e^{2\pi i \theta_n}) \in \left(\mathbb{S}^1\right)^n$ ($\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$), abbiamo la scomposizione

$$\lambda = \text{Diag}(L) = \rho * e^{2\pi i \Theta},$$

con il simbolo $*$ intendiamo il prodotto componente per componente.

Abbiamo così ricondotto una combinazione di vettori complessi a due di vettori reali.

$$\lambda^Q = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^Q = 1 \\ (e^{2\pi i \Theta})^Q = 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Ovviamente $(e^{2\pi i \Theta})^Q = e^{2\pi i \langle \Theta | Q \rangle}$.

Nel seguito, dato un qualsiasi vettore $V = (v_1, \ldots, v_n)$, indicheremo con V' il vettore $(v_1, \ldots, v_l)$ di lunghezza l e con V'' il vettore restante $(v_{l+1}, \ldots, v_n)$ di lunghezza $n - l$. La disuguaglianza $V \leq 0$ significa $v_1 \leq 0, \ldots, v_n \leq 0$. Per esempio, si ha che $\rho' = 1$ e $\rho'' < 1$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &:= \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \lambda^Q = 1\right\} \\ &= \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \rho * (e^{2\pi i \Theta})^Q = 1\right\} \\ &= \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \rho^Q = 1\right\} \cap \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ (e^{2\pi i \Theta})^Q = 1\right\} \\ &= \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \rho^Q = 1\right\} \cap \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \langle \Theta | Q \rangle \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \rho^Q = 1\right\} \cap \cup_{m \in \mathbb{Z}} \left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \langle \Theta | Q \rangle = m\right\}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo, ovviamente libero, sottomodulo di $\mathbb{Z}^n$. Usiamo il fatto che ogni sottomodulo di un modulo libero e finitamente generato su un anello a ideali principali è libero e finitamente generato. Dunque $\mathfrak{M}$ è un reticolo isomorfo a $\mathbb{Z}^k$, per qualche k. $\mathfrak{M} = \text{Span}_{\mathbb{Z}} \{r_1, \ldots, r_k\}$ con $k \leq n$. Sarebbe più comodo se il reticolo non fosse altro che l'intersezione tra $\mathbb{Z}^n$ ed un iperpiano. Ciò non sarà vero in generale; ma mostriamo che ci possiamo ricondurre a quel caso.

$$\left\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \rho^Q = 1\right\} = \left\{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ \rho^Q = 1\right\} \cap \mathbb{Z}^n$$
$$\{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \langle \Theta | Q \rangle = m\} = \{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \Theta | Q \rangle = m\} \cap \mathbb{Z}^n$$

e $\left\{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ \rho^Q = 1\right\}$ è uno spazio vettoriale e $\{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle \Theta | Q \rangle = m\}$ è uno spazio affine.

Esistono numeri reali $l_1^*, \ldots, l_n^*$ tali che $e^{l_j^*} = \rho_j$, i.e., l_j^* è il logaritmo (reale) di ρ_j. Se $\rho_j = 0$, poniamo $l_j^* = -\infty$. Per quanto riguarda le fasi, la prossima scelta non sarà unica. Abbiamo già utilizzato il fatto che esistono $\theta_1, \ldots, \theta_n$ numeri reali tali che la j-esima fase è $e^{2\pi i \theta_j}$. Se richiediamo che $2\pi i \theta_j \in (-\pi, \pi]$ allora la scelta è forzata e tali argomenti $\{2\pi i \theta_j\}_j$ sono detti classicamente logaritmi principali. Anche in questo caso se $\rho_j = 0$, poniamo $\theta_j = -\infty$.

Riassumendo abbiamo

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathbb{R}^n_{+,0} \tag{5.4}$$
$$l^* = (l_1^*, \ldots, l_n^*) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n \tag{5.5}$$
$$\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n \tag{5.6}$$

$$\lambda^Q = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho^Q = 1 \\ \mathsf{fasi}^Q = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle l^* | Q \rangle = 0 \\ \langle \Theta | Q \rangle \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \langle l^* + 2\pi i \Theta | Q \rangle \in 2\pi i \mathbb{Z} \tag{5.7}$$

$L_j := l_j^* + 2\pi i \theta_j$ verrà detto *logaritmo principale* di λ_j.

5.2.1 Torsione e determinazioni coerenti del logaritmo

Per le mappe si ha una complicazione che non è presente nel caso di campi vettoriali: la *torsione*.

Le proposizioni seguenti sono state ispirate dagli articoli [14] [15] di J. Ecalle e da [24] di R. Pérez-Marco. Inoltre, ringrazio il mio amico Giulio Genovese per le discussioni stimolanti.

Proposizione 5.4 *Dati qualsiasi $a_1, \dots a_n \in \mathbb{C}$, esiste un unico $\tau \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)\mathbb{Z} = \mathbb{Q} \cap \left\{\mathbb{Z} + \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{Z}\right\}.$$

Con la quale possiamo dare la definizione di torsione.

Definizione 5.5 *La torsione di un sistema dinamico olomorfo discreto, con autovalori della parte lineare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, è quel ben determinato τ naturale tale che*

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)2\pi i\mathbb{Z} = 2\pi i\mathbb{Q} \cap \left\{2\pi i\mathbb{Z} + \sum_{j=1}^{n} l_j \mathbb{Z}\right\}, \tag{5.8}$$

dove l_j è una determinazione del logaritmo di λ_j, i.e., $e^{l_j} = \lambda_j$ per ogni j.

Da notare che il membro di destra della (5.8) non dipende dalla determinazione del logaritmo scelta poiché si somma $2\pi i\mathbb{Z}$. L'esistenza e l'unicità sono date dalla proposizione precedente.

Dimostrazione della proposizione 5.4. Ovviamente

$$k_0 + \sum_{j=1}^{n} k_j a_j \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} k_j a_j \in \mathbb{Q}$$

$k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 0, \dots, n$. L'insieme

$$\mathfrak{G} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \ : \ x_1 a_1 + \dots + x_n a_n \in \mathbb{Q}\},$$

è uno $\mathbb{Z}$-sottomodulo di $\mathbb{Z}^n$ il quale è uno $\mathbb{Z}$-modulo libero e finitamente generato. Poiché $\mathbb{Z}$ è Noetheriano anche $\mathfrak{G}$ è finitamente generato, dunque $\mathfrak{G} = \operatorname{Span}\langle g_1, \dots, g_k\rangle$. Siano p_α/q_α (con p_α e q_α primi tra loro) i razionali dati da

$$\langle g_\alpha | (a_1, \dots, a_n)\rangle =: \frac{p_\alpha}{q_\alpha}.$$

Quindi

$$\mathbb{Q} \cap \left\{\mathbb{Z} + \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{Z}\right\} = \operatorname{Span}\left\langle 1, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_k}{q_k}\right\rangle.$$

Possiamo supporre che $p_\alpha = 1$ a meno di rimpiazzare p_α/q_α con

$$s_\alpha \frac{p_\alpha}{q_\alpha} - t_\alpha$$

dove s_α e t_α sono tali che $s_\alpha p_\alpha = 1 + t_\alpha q_\alpha$ ed esistono poiché p_α e q_α sono primi tra loro; qui, nel aggiungere $-t_\alpha$ stiamo usando il fatto che l'insieme in esame contiene $\mathbb{Z}$. È immediato che

$$\text{Span}\left\langle \frac{1}{q_{j_1}}, \frac{1}{q_{j_2}} \right\rangle = \frac{1}{q_{j_1}}\mathbb{Z} + \frac{1}{q_{j_2}}\mathbb{Z} = \frac{1}{m.c.m.\,\{q_{j_1}, q_{j_2}\}}\mathbb{Z}.$$

Dunque $\tau = m.c.m.\,\{q_1, \dots, q_k\}$.

$\square$

Osservazione 5.6 Dalla dimostrazione segue facilmente che l'elemento τ può essere anche caratterizzato come il più piccolo intero positivo tale che

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)\mathbb{Z} \supset \mathbb{Q} \cap \left\{\mathbb{Z} + \sum_{j=1}^{n} a_j\mathbb{Z}\right\}. \tag{5.9}$$

Definizione 5.7 *Se la torsione τ è 1, diciamo che la mappa non ha torsione o, anche, che la torsione è nulla.*

Se la torsione è nulla vuol dire che se abbiamo una combinazione lineare a coefficienti interi dei a_j che dà un razionale, in realtà il razionale è un intero.

Vediamo come ci si può sempre ricondurre al caso privo di torsione. Consideriamo un'iterata della mappa; gli autovalori del differenziale in 0 vengono elevati alla potenza del passo di iterazione ν, cioè i λ_j diventano λ_j^ν e quindi l_j diventano νl_j. Dunque dalla formula 5.9 o direttamente dalla dimostrazione della proposizione 5.4 si vede che se τ' è la torsione associata ai $a_j' = \tau l_j$ e τ è quella associata a $a_j = l_j$ si ha che τ' è proprio τ divisa per τ, dunque $\tau' = 1$. Abbiamo concluso che, a meno di passare all'iterata f^τ, possiamo supporre che la torsione sia 1.

Definizione 5.8 *Dato $\lambda \in \mathbb{C}^n$, una sua determinazione coerente del logaritmo è un vettore $L \in \mathbb{C}^n$ tale che ho una risonanza moltiplicativa se e solo se ne ho una additiva, vale a dire*

$$\langle L|Q\rangle = 0 \Longleftrightarrow \lambda^Q = 1.$$

Notare che si richiede solo per $Q \in \mathbb{Z}^n$.

D'ora in avanti supporremo che L sia una determinazione coerente il che non lederà la generalità poiché si ha la seguente

Proposizione 5.9 *Se una mappa è priva di torsione ($\tau = 1$) esiste (non unica) una determinazione coerente del logaritmo L.*

Dimostrazione. Siano λ e $\Theta \in \mathbb{C}^n$ tali che $e^{2\pi i \theta_j} = \lambda_j$. Se abbiamo che $\lambda^Q = 1$ a priori sappiamo solo dire che $\langle \Theta | Q \rangle \in \mathbb{Z}$. Consideriamo l'insieme

$$\mathfrak{M}' := \{Q \in \mathbb{Z}^n \ : \ \langle \Theta | Q \rangle \in \mathbb{Z}\} .$$

1. $\mathfrak{M}'$ non dipende dalla scelta di Θ.

2. $\mathfrak{M}'$ è un modulo su $\mathbb{Z}$ sottomodulo di $\mathbb{Z}^n$.

3. Ricordo che un modulo libero e finitamente generato su un dominio a ideali principali è tale che ogni suo sottomodulo è libero e finitamente generato. $\mathbb{Z}^n$ e dunque $\mathfrak{M}'$ sono liberi e finitamente generati.

4. Esistono $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}^n$ $(k \leq n)$ tali che
$$\mathfrak{M}' = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \{m_1, \ldots, m_k\} .$$

5. Mi basta trovare un $\tilde{\Theta}$ con $\tilde{\Theta} - \Theta \in \mathbb{Z}^n$ tale che
$$\left\langle \tilde{\Theta} | Q \right\rangle \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \left\langle \tilde{\Theta} | Q \right\rangle = 0.$$

6. Sia ancora Θ qualsiasi, sia $B = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix}$ la matrice formata dai k n-vettori generatori di $\mathfrak{M}'$. In questo modo, si ha
$$B.\Theta = \begin{pmatrix} \langle m_1 | \Theta \rangle \\ \vdots \\ \langle m_k | \Theta \rangle \end{pmatrix} .$$

7. Abbiamo, per costruzione di $\mathfrak{M}'$, $B.\Theta \in \mathbb{Z}^k$.

8. Voglio trovare $T = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ tale che $B. (\Theta - T) = \mathbf{0}$ e ottenere $\tilde{\Theta} = \Theta - T$.

9. Per il Teorema di Smith sulle forme normali di matrici a coefficienti interi, vedi [18, Teorema 3.8 pagina 176], esistono P, R, A matrici a coefficienti interi tali che
$$B = PAR$$
con P, R invertibili, $A = (D, 0)$ essendo D una matrice diagonale $k \times k$ e 0, in questo caso, è la matrice $k \times (n - k)$ nulla; inoltre il rango di A e quello di B sono massimi, i.e., k.

10. Abbiamo che $(PAR).\Theta \in \mathbb{Z}^k$ quindi $AR.\Theta \in \mathbb{Z}^k$ essendo P invertibile. Dunque cioè $(AR.\Theta)_j = a_j (R.\Theta)_j \in \mathbb{Z}$ per $j = 1, \ldots, k$ quindi, usando solo il fatto che la matrice A è a coefficienti interi, $(R.\Theta)_j \in \mathbb{Q}$.

11. Il fatto che non c'è torsione implica che $(R.\Theta)_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, k$

12. Usando il fatto che R è invertibile, scelgo $T \in \mathbb{Z}^k$ tale che

$$R.T = ((R.\Theta)_1, \ldots, (R.\Theta)_k, 0, \ldots, 0)$$

e ottengo $AR.(\Theta - T) = \mathbf{0}$.

$\square$

Notiamo che se λ ha determinazione coerente del logaritmo L allora $\overline{L}$ è una determinazione coerente del logaritmo per $\overline{\lambda}$.

Estendiamo quindi la definizione di elevazione a potenza.

Definizione 5.10 *Sia Λ la mappa lineare diagonale di un sistema dinamico continuo privo di torsione, e L una determinazione coerente del logaritmo di λ. Dato $R \in \mathbb{R}^n$ diciamo che $\lambda^R = 1$ se $\langle L|R \rangle = 0$.*

Proposizione 5.11 *Sia $R \in \mathbb{R}^n$ tale che $\lambda^R = 1$ (nel senso sopra). Allora la foliazione $\left\{\mathbf{z}^R = c\right\}$ è invariante per la dinamica della mappa*

$$\mathbf{z} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

con

$$f_j(\mathbf{z}) = z_j \exp(a(\mathbf{z})L_j + b(\mathbf{z})\overline{L}_j),$$

dove $a(\boldsymbol{z})$ e $b(\boldsymbol{z})$ sono serie di potenze (a valori in $\mathbb{C}$).

Dimostrazione. Sia $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ tale che $z^R = c$, mostriamo che $\mathbf{f}(\mathbf{z})^R = c$. Si hanno le seguenti implicazioni

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{z})^R = c \quad &\Longleftrightarrow \quad \prod_{j=1}^{n} \left(z_j \exp(a(\mathbf{z})L_j + b(\mathbf{z})\overline{L}_j)\right)^{r_j} = c \\
&\Longleftrightarrow \quad \prod_{j=1}^{n} z_j^{r_j} \exp\left(r_j(a(\mathbf{z})L_j + b(\mathbf{z})\overline{L}_j)\right) = c \\
&\Longleftrightarrow \quad \prod_{j=1}^{n} \exp\left(a(\mathbf{z})r_jL_j + b(\mathbf{z})r_j\overline{L}_j\right) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \exp\left(\sum_{j=1}^{n} a(\mathbf{z})r_jL_j + b(\mathbf{z})r_j\overline{L_j}\right) = 1 \\
&\Longleftarrow \quad a\left\langle L|R\right\rangle + b\left\langle \overline{L}|R\right\rangle = 0
\end{aligned}$$

questa ultima uguaglianza è vera perché si ha $\langle L|R \rangle = 0$ per ipotesi e $\left\langle \overline{L}|R \right\rangle = \overline{\langle L|R \rangle} = 0$.

□

Un esempio facile di mappa della forma richiesta dalla proposizione è

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 e^{\theta a(\mathbf{z})} \\ z_2 e^{-\theta a(\mathbf{z})} \end{pmatrix}.$$

Se inoltre richiediamo che la mappa sia in forma normale allora, poiché in questo caso le risonanze generiche sono $z_1^r z_2^r$, la funzione a deve essere in realtà funzione nel prodotto $z_1 z_2$. Quindi possiamo tenere a mente l'esempio concreto

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z_1 e^{\theta + z_1 z_2} \\ z_2 e^{-\theta - z_1 z_2} \end{pmatrix}.$$

Osservazione 5.12 *Ricordo che*

$$a \in \mathbb{S}^1 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{\overline{a}}.$$

Nel caso 1 il vettore L' ha componenti immaginarie pure.

Lemma 5.13 *Se L è nel caso 1, allora l'equazione*

$$\rho^Q = 1$$

ha solo le seguenti soluzioni $Q \in N_i$:

- *se $i \leq l$,*
$$Q'' = 0;$$
- *se $i > l$,*
$$Q'' = \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i, \tag{5.10}$$
per qualche j tale che $\rho_i = \rho_j$; oppure
$$Q'' = \sum_{j=l+1}^{m} q_j \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_i, \qquad \text{dove } q_j \geq 0, m < i, \rho_m < \rho_i. \tag{5.11}$$

Cioè, se $i > l$, abbiamo i casi $Q'' = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ oppure $Q'' = (q_{l+1}, \ldots, q_m, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$.

In poche parole, non è possibile che $Q'' > 0$. Più precisamente, poiché $\rho = (1, \rho'')$ essendo $\rho' = 1$ e inoltre $\rho'' < 1$, si ha

$$1 = \rho^Q = \rho'^{Q'} \rho''^{Q''} = \rho''^{Q''},$$

e se moltiplico un po' di moduli poi, per ottenere 1, devo dividere per uno più grande di tutti quelli tolti. Per la dimostrazione precisa rileggere in maniera moltiplicativa ciò che si è provato per campi nel capitolo 4.

Da (5.7) è automatico:

Corollario 5.14 *Se L è nel caso 1, allora l'equazione*

$$\lambda^Q = 1$$

ha solo le soluzioni descritte nel lemma precedente.

Un risultato immediato a questo punto è il seguente

Teorema 5.15 *Se L è nel caso 1, allora la forma normale è data da*

$$\begin{cases} \psi_j(\boldsymbol{w}') & j = 1, \dots, l \\ \sum_{m=l+1}^{n} b_{jm}(\boldsymbol{w}')w_m + \eta_j(\boldsymbol{w}) & j = l+1, \dots, n, \end{cases}$$

dove la somma è fatta per le le $m > l$ per cui vale la (5.10) e

$$\eta_j(\boldsymbol{w}) = \sum b_{jq_{l+1}\cdots q_{j+1}}(\boldsymbol{w}')w_{l+1}^{q_{l+1}} \cdots w_{j+1}^{q_{j+1}}$$

in cui la somma è presa per quegli interi $q_{l+1} \cdots q_{j+1}$ per cui è soddisfatta la (5.11). In particolare quindi $\eta_j(\boldsymbol{w})$ non contengono né termini lineari in $w_1, \dots, w_l$ né termini indipendenti in queste variabili.

Interpretiamo geometricamente in $\mathbb{R}^n$ i vari casi della classificazione di L. Siano

$$\mathfrak{O} := \{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ Q \geq 0\}\,,$$

l'ortante (quadrante, ottante, etc.) non negativo e $\mathfrak{R}$ il sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$ formato dalle soluzioni reali dell'equazione di risonanza $\lambda^Q = 1$, i.e.,

$$\mathfrak{R} := \left\{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda^Q = 1\right\} := \{Q \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle L|Q\rangle = 0\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\,\{l^*, \Theta\}^{\perp}\,.$$

1.a $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} = 0$
$\rho < 1$

Infatti, se moltiplico un numero positivo di moduli tutti minori (o tutti maggiori) di 1 non posso ottenere 1.

1.b $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ è la faccia l-dimensionale del cono $\mathfrak{O}$ definita da $Q'' = 0$.
$\lambda' = 1$
$\rho' = 1$ e $L' = 0$

Infatti, ovviamente $\{Q'' = 0\} \subseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ poiché $\langle Q|L\rangle = \langle Q'|L'\rangle + \langle Q''|L''\rangle = 0$ (poiché nel caso 1.b si ha $L' = 0$); viceversa λ'' è nel caso 1.a quindi non ci sono soluzioni non banali.

1.c $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ è un sottoinsieme $(l-1)$-dimensionale contenuto nella faccia $\{Q'' = 0\}$.
$\rho'' < 1$

Infatti, $\{Q'' = 0\} \supseteq \mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$; poiché siccome i λ_j con $j > l$ stanno tutti da una stessa parte di $\mathbb{S}^1$, nessuno di essi può dare contributo positivo ($q_j > 0$). Quindi la condizione si riduce a $\langle Q'|L'\rangle = 0$ e λ' rientra nel caso 1.d con dimensione l; si vedrà che la dimensione sarà quella dell'ambiente -1 (in questo caso $l-1$).

1.d $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ ha dimensione $n-1$.
$\rho = 1$, $l^* = 0$ e $L = 2\pi i\Theta \in i\mathbb{R}^n$

Infatti, in questo caso gli L_j sono immaginari puri, quindi $\mathfrak{R}$ è l'ortogonale di Θ

$$\mathfrak{R} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\,\{\Theta\}^{\perp}\,,$$

e dunque ha dimensione $n-1$. Inoltre $\mathfrak{R}$ contiene un punto interno di $\mathfrak{O}$. Infatti, in questo caso l'inviluppo convesso degli L_j contiene lo 0 all'interno, dunque, per come fatto nel caso di campi vettoriali, per ogni $j = 1, \ldots, n$ esiste $\varepsilon_j > 0$ tale che $-\varepsilon_j L_j \in \mathrm{Conv}(L)$; per cui

$$-\varepsilon_j L_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} L_i$$

con $\beta_{ij} \geq 0$.

Sommando otteniamo

$$0 = \sum_j \varepsilon_j L_j + \sum_{ij} \beta_{ij} L_i = \sum_i (\varepsilon_i + \sum_j \beta_{ij}) L_i$$

con $\varepsilon_i + \sum_j \beta_{ij} \geq \varepsilon_i > 0$.

2 In questo caso non c'è una caratterizzazione chiara dei casi in cui l^*, Θ siano linearmente indipendenti, per cui $\mathfrak{R} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{l^*, \Theta\}^{\perp}$ ha dimensione $n-2$ oppure $n-1$. Poiché anche qui $\mathfrak{R}$ contiene un punto interno di $\mathfrak{O}$ come nel caso 1.d, $\mathfrak{R}$ e $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ hanno la stessa dimensione. In particolare hanno lo stesso ortogonale.

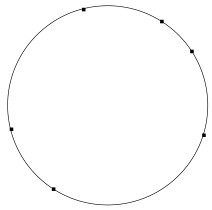
5.3 Condizione A & normalizzazione olomorfa di mappe

Supponiamo che Λ abbia torsione nulla e sia L un vettore di logaritmi coerenti dei suoi autovalori. Se a è un numero complesso, definiamo $\lambda_j^a := \exp(aL_j)$ e $\bar{\lambda}_j^a := \exp(a\bar{L}_j)$.

5.3.1 Formulazione

Vogliamo classificare le forme normali $\mathbf{g}(\mathbf{w})$. Nel seguito non isoleremo la parte lineare come in precedenza.

Considereremo per semplicità solo il caso in cui $0 \in \text{Int Conv}(L)$, per esempio il caso 1.d.



Definizione 5.16 *Diremo che una forma normale $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})$ soddisfa la condizione A se Λ è tale che $0 \in \text{Int Conv}(L)$ ed esistono due serie di potenze $a(\boldsymbol{w})$ e $b(\boldsymbol{w})$ tali che la forma normale abbia coordinate*

$$g_j(\boldsymbol{w}) = w_j \lambda_j^{a(\boldsymbol{w})} \bar{\lambda}_j^{b(\boldsymbol{w})}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

La seguente proposizione dà un'interpretazione geometrica della condizione.

Con in mente ciò che è stato provato nel caso di campi vettoriali da Martinet in [21], abbiamo dimostrato la seguente equivalenza.

Proposizione 5.17 *Se* $0 \in \text{Int Conv}(L)$. *(Nel caso in cui* $\text{Conv}(L)$ *è ridotto ad un segmento l'interno è il segmento meno i suoi estremi)*

Un mappa f con punto fisso nell'origine e con parte lineare Λ è tangente ad ogni foliazione

$$\{\boldsymbol{z}^R = costante\}$$

per ogni R tale che $\Lambda^R = 1$, con $r_j \geq 0$, $r_j \in \mathbb{R}$ se e solo se f è della forma

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j^{a(z)} \bar{\lambda}_j^{b(z)} z_j \right) e_j.$$

Dimostrazione. L'implicazione facile è già stata provata con la proposizione (5.11). Sia $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ tale che $z^R = c$, studiamo quando si ha $\mathbf{f}(\mathbf{z})^R = c$ per ogni R della forma richiesta. Scriviamo $f = \sum_j F_j z_j e_j$ con $F_j = \sum_{Q \in N_j} f_Q^j \mathbf{z}^Q$.

Si hanno le seguenti equivalenze

$$f(\mathbf{z})^R = c \Longleftrightarrow \prod_{j=1}^{n} (F_j z_j)^{r_j} = c \Longleftrightarrow F(\mathbf{z})^R = 1 \Longleftrightarrow \langle \log F(\mathbf{z}) | R \rangle = 2\pi i \mathbb{Z}$$

poiché, come abbiamo visto, $\mathfrak{R}$ ha un punto interno a $\mathfrak{O}$ si ha $\dim(\mathfrak{R}) = \dim(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O})$ e in particolare hanno lo stesso ortogonale; $\mathfrak{R} := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{l^*, \Theta\}^{\perp}$

$$\langle \log F(\mathbf{z}) | R \rangle = 0 \qquad \forall R \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} \Longleftrightarrow \log F(\mathbf{z}) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{l^*, \Theta\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{L, \bar{L}\}$$

$$\Longleftrightarrow \log F(\mathbf{z}) = a(\mathbf{z}) L + b(\mathbf{z}) \bar{L} \Longleftrightarrow F = \lambda^a \bar{\lambda}^b.$$

□

5.4 Teorema generale di Brjuno per mappe

Poniamo $\omega_k := \min |\lambda^Q - 1|$, dove il minimo è preso sui Q per cui $\lambda^Q \neq 1$, $\|Q\| \leq 2^k$, $Q \in N$.

Condizione ω:

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2^k} \log \omega_k \ < \ +\infty.$$

(**Congettura**) *Se un sistema dinamico olomorfo discreto* $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ *ha parte lineare* Λ *che soddisfa la condizione* ω *e una forma normale del sistema soddisfa la condizione A, allora esiste un cambio di coordinate olomorfo che riduce il sistema alla forma normale.*

5.5 L'equazione omologica ricavata in coordinate

Notazioni:

Sia $\mathbf{h}(\mathbf{w}) = (h_1(\mathbf{w}), \ldots, h_n(\mathbf{w}))$ una serie (vettoriale) di potenze in $\mathbf{w}$. Per ogni numero complesso δ, l'espressione $\{h_j\}_\delta$ denota la serie che consiste solo di quei termini $cw_j\mathbf{w}^Q$ della serie h_j per cui $\lambda^Q = \delta$; quindi per una forma normale $\mathbf{g}$ abbiamo $\{g_j\}_1 = g_j$ e $\{g_j\}_\delta = 0$ per $\delta \neq 1$.

Inoltre, per un arbitrario monomio $c\mathbf{w}^Q$ poniamo

$$\mathrm{ord}(c\mathbf{w}^Q) := \|Q\| \,;$$

per una serie di potenze h, $\mathrm{ord}(h)$ è l'insieme degli ordini di tutti i termini della serie. La notazione $m < \mathrm{ord}(h) \leq 2m$ significa che tutti i termini di h hanno ordine più grande di m ma non di $2m$.

$[h]_m$ denota l'm-jet di h, i.e., il polinomio definito dai termini di h il cui ordine non è più grande di m; quindi $\mathrm{ord}[h]_m \le m$. Per il vettore $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ poniamo $\mathrm{ord}(\mathbf{h}) = \cup_{j=1}^{n} \mathrm{ord}(h_j)$ e in modo simile per le matrici.

Consideriamo la mappa

$$\mathbf{z} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{z})$$

con

$$f_j(\mathbf{z}) = \lambda_j z_j + \psi_j(\mathbf{z}) + \varphi_j(\mathbf{z}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

che coincide con una forma normale nei termini di ordine $\le m$:

$$1 \le \mathrm{ord}(\psi_j) \le m, \qquad \{\psi_j\}_1 = \psi_j, \qquad m + 1 \le \mathrm{ord}(\varphi_j), \tag{5}$$

le serie ψ_j non contengono termini lineari a meno della parte nilpotente dello jacobiano.

Cerchiamo un cambio di variabili $\mathbf{z} = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$ con $\mathrm{ord}(\hat{h}_j) \ge m+1$, che porti il sistema dinamico in esame ad una mappa che coincida con una forma normale nei termini di ordine $\le 2m$, cioè, della forma

$$\mathbf{w} \longmapsto \mathbf{g}(\mathbf{w})$$

con

$$g_j(\mathbf{w}) = \lambda_j w_j + \psi_j(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_j(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_j(\mathbf{w}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

con

$$m + 1 \le \mathrm{ord}(\tilde{\psi}_j) \le 2m, \qquad \{\tilde{\psi}_j\}_1 = \tilde{\psi}_j, \qquad 2m + 1 \le \mathrm{ord}(\tilde{\varphi}_j).$$

Inoltre possiamo supporre $\mathrm{ord}(\hat{h}_j) \le 2m$.

A questo punto dobbiamo provare che tutto ciò è possibile:

Lemma 5.18 ***Lemma base per mappe.*** *Tale cambio di variabili* $\mathbf{z} = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$ *con* $m + 1 \le \mathit{ord}(\hat{h}_j) \le 2m$ *che trasforma*

$$f_j(\mathbf{z}) = \lambda_j z_j + \psi_j(\mathbf{z}) + \varphi_j(\mathbf{z})$$

in

$$g_j(\mathbf{w}) = \lambda_j w_j + \psi_j(\mathbf{w}) + \tilde{\psi}_j(\mathbf{w}) + \tilde{\varphi}_j(\mathbf{w}),$$

esiste ed è unicamente determinato dalla condizione

$$\{\hat{h}_j\}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \{\hat{h}_j\}_\delta = [\{\zeta_j\}_\delta]_{2m}$$

dove ζ_j *è la soluzione del sistema*

$$\delta\{\zeta_j\}_\delta + \sum_k \frac{\partial\{\zeta_j\}_\delta}{\partial w_k} \cdot \psi_k = \sum_k \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \cdot \{\zeta_k\}_\delta + \varphi_j$$

per ogni $\delta \neq 0$ e $j = 1, \ldots, n$. Inoltre

$$\tilde{\psi}_j = [\{\varphi_j\}_1]_{2m}\,.$$

Dimostrazione. Imponiamo il coniugio:

$$(\Lambda + \psi + \varphi) \circ h = h \circ (\Lambda + \psi + \tilde{\psi} + \tilde{\varphi})$$

$$\Lambda + \Lambda\hat{h} + \psi \circ h + \varphi \circ h = \Lambda + \psi + \tilde{\psi} + \tilde{\varphi} + \hat{h}(\Lambda + \psi + \tilde{\psi} + \tilde{\varphi})$$

$$\Lambda\hat{h} + \psi \circ (\mathrm{id} + \hat{h}) + \varphi \circ (\mathrm{id} + \hat{h}) = \psi + \tilde{\psi} + \tilde{\varphi} + \hat{h}\left((\Lambda + \psi) + (\tilde{\psi} + \tilde{\varphi})\right)$$

Vogliamo usare la formula di Taylor

$$\psi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}) = \psi_j(\mathbf{w}) + \sum_k \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \cdot \hat{h}_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial w_k \partial w_l} \cdot \hat{h}_k \hat{h}_l + \cdots$$

e, poiché $m + 1 \leq \mathrm{ord}(\hat{h}_j) \leq 2m$ la seconda somma e i puntini sono termini di grado più grande di $2m + 1$.
Analogamente,

$$\varphi_j(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}) = \varphi_j(\mathbf{w}) + \sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial w_k} \cdot \hat{h}_k + \cdots$$

e $\mathrm{ord}(\sum_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial w_k} \cdot \hat{h}_k + \cdots) \geq (m+1-1) + (m+1) = 2m+1$ dunque la somma e i puntini sono trascurabili modulo $2m$.
Inoltre

$$\hat{h}\left((\Lambda + \psi) + (\tilde{\psi} + \tilde{\varphi})\right) = \hat{h} \circ (\Lambda + \psi) + d\hat{h} \circ (\Lambda + \psi).(\tilde{\psi} + \tilde{\varphi}) + \cdots$$

e $\mathrm{ord}(d\hat{h} \circ (\Lambda + \psi).(\tilde{\psi} + \tilde{\varphi}) + \cdots \geq (m + 1 - 1)1 + (m + 1) = 2m + 1$.
Sostituendo sopra

$$\Lambda\hat{h} + \psi + d\psi.\hat{h} + \cdots + \varphi + \cdots = \psi + \tilde{\psi} + \tilde{\varphi} + \hat{h} \circ (\Lambda + \psi) + \cdots\,.$$

Dunque

$$(\Lambda + d\psi).\hat{h} - \hat{h} \circ (\Lambda + \psi) + \varphi \equiv 0$$

modulo $2m$ piatti.

La risolubilità unica del sistema può esser provata come il Teorema di Esistenza 5.1.

□

Capitolo 6

Divergenza del cambio di variabile normalizzante per campi vettoriali

6.1 Principi per la costruzione di esempi di divergenza

In questo paragrafo daremo un metodo per la costruzione di esempi di campi olomorfi non olomorficamente normalizzabili. È notevole che tutte queste costruzioni poggiano su alcune proprietà relativamente semplici della normalizzazione.

In tutto il seguito, si designerà con $X_0 = S + N$ una forma normale fissata, dove $S = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \partial_j$. Ricordo che indichiamo con $\mathcal{S}$ lo spettro di $\mathcal{L}_S$ e con E_α l'autospazio relativo a $\alpha \in \mathcal{S}$.

Definizione 6.1 *Se $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$, poniamo $E_{\mathcal{P}} := \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{P}} E_\alpha$. Diremo che $\mathcal{P}$ soddisfa le proprietà*

(π) $0 \notin \bar{\mathcal{P}} := \left\{ \sum_j n_j\alpha_j \ : \ \alpha_j \in \mathcal{P},\ n_j \in \mathbb{N},\ \sum_j n_j \geq 1 \right\}$.

(π') *nessuna combinazione $\sum_j n_j\alpha_j$ ($\alpha_j \in \mathcal{P},\ n_j \in \mathbb{N},\ \sum_j n_j \geq 2$) è in $\mathcal{P}$.*

Chiaramente la proprietà (π') è più forte di quella (π).

Teorema 6.2 *Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ un sottoinsieme avente la proprietà (π). Sia $Y \in E_{\mathcal{P}}$ un campo 1-piatto. Allora*

1. *il campo $X_0 + Y$ è formalmente coniugato a X_0.*
2. *la parte semi-semplice della decomposizione di Jordan di $X_0 + Y$ è $S + U$, dove $U = \sum_{k=0}^\infty U_k$ è definito dall'equazione:*

$$[X_0 + tY, \sum_{k=0}^{\infty} t^k U_k] = [S, Y].$$

Dimostrazione. L'idea consiste nell'applicare il metodo "dei cammini". Consideriamo le equazioni:

$$\begin{aligned}
[X_0 + tY, Z(t)] &= Y \\
[X_0 + tY, U(t)] &= [S, Y].
\end{aligned}$$

con $Z = Z_0 + tZ_1 + \cdots + t^k Z_k + \cdots$ e $U = U_0 + tU_1 + \cdots + t^k U_k + \cdots$, che definiscono unicamente $Z(t)$ e $U(t)$.

Risolviamo il sistema d'equazioni differenziali (formale):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Z(t, x(t)), \\ x(0, x_0) = x_0. \end{cases}$$

Possiamo quindi considerare il flusso formale associato φ_t, che per ogni t è un diffeomorfismo formale di $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Magicamente si ha

$$(\varphi_t)_* X_0 = X_0 + tY$$

per ogni $t \in \mathbb{C}$ e dunque per $t = 1$ si ha il punto (1).

Motiviamo la magia.

Possiamo vedere l'equazione differenziale che dipende dal tempo come l'equazione differenziale data da un campo vettoriale di $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, cioè vedendo il tempo come una nuova coordinata; siano

$$\tilde{x} = (x, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C},$$

$$\tilde{Z}(x, t) = Z(x, t) + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Risolviamo l' equazione

$$\frac{d\tilde{x}}{ds}(s) = \tilde{Z}(\tilde{x}(s)),$$

che equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}(s) = Z(x(s), t(s)), \\ \\ \dfrac{dt}{ds}(s) = 1; \end{cases}$$

otteniamo il flusso

$$\tilde{\varphi}_s(p, t) = (\varphi_s(p), t + s).$$

Usando la formula

$$[\tilde{Z}, \tilde{W}]_{(\tilde{p})} = \frac{d}{ds}(\tilde{\varphi}_{-s})_* \tilde{W}_{\tilde{\varphi}_s(\tilde{p})}|_{s=0}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\tilde{\varphi}_{-s})_* \tilde{W}_{\tilde{\varphi}_s(\tilde{p})}|_{s=s_0} &= \frac{d}{du}(\tilde{\varphi}_{-u-s_0})_* \tilde{W}_{\tilde{\varphi}_{u+s_0}(\tilde{p})}|_{u=0} \\
&= \frac{d}{du}(\tilde{\varphi}_{-s_0})_*(\tilde{\varphi}_{-u})_* \tilde{W}_{\tilde{\varphi}_u(\tilde{\varphi}_{s_0}(\tilde{p}))}|_{u=0} \\
&= (\tilde{\varphi}_{-s_0})_* \frac{d}{du}(\tilde{\varphi}_{-u})_* \tilde{W}_{\tilde{\varphi}_u(\tilde{\varphi}_{s_0}(\tilde{p}))}|_{u=0} \\
&= (\tilde{\varphi}_{-s_0})_*[\tilde{Z}, \tilde{W}]_{(\tilde{\varphi}_{s_0}\tilde{p})}
\end{aligned}$$

Con un cambio di variabili $s = u + s_0$ nella prima uguaglianza; sfruttando il fatto che il flusso (di un sistema autonomo) è un (semi)gruppo rispetto al tempo nella seconda uguaglianza; si è usata la linearità del differenziale nella terza uguaglianza; e, infine, nell'ultima la formula sopra.

Vogliamo sostituire ora $\tilde{W} = X_0 + tY = X_0 + tY + 0\frac{\partial}{\partial t}$. Notiamo che

$$\begin{aligned}
[Z + \frac{\partial}{\partial t}, X_0 + tY] &= [Z, X_0 + tY] + [\frac{\partial}{\partial t}, X_0 + tY] \\
&= -Y + Y = 0
\end{aligned}$$

dal fatto che $\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$ per $j = 1, \ldots, n$. Quindi

$$\frac{d}{ds}(\tilde{\varphi}_{-s})_*(X_0 + tY)_{\tilde{\varphi}_s(\tilde{p})} = 0$$

vale a dire che $(\tilde{\varphi}_{-s})_*(X_0 + tY)_{\tilde{\varphi}_s(\tilde{p})}$ è costante,

$$(\tilde{\varphi}_{-s})_*(X_0 + tY)_{\tilde{\varphi}_s(\tilde{p})} = (X_0 + tY)_{\tilde{p}},$$

e quindi, ponendo $s = -t$,

$$(\tilde{\varphi}_t)_*(X_0 + tY)_{(\varphi_{-t}(p),0)} = (X_0 + tY)_p$$

cioè

$$(\varphi_t)_*(X_0)_{\varphi_{-t}(p)} = (X_0 + tY)_p.$$

Per la parte 2, il campo vettoriale $S + tU$ è, per ogni t, semisemplice poiché formalmente coniugato a S per il punto 1 (in effetti $\in E_{\tilde{\mathcal{P}}}$). Inoltre commuta con $X_0 + tY$; infatti,

$$\begin{aligned}
[S + tU, X_0 + tY] &= [S, X_0 + tY] + [tU, X_0 + tY] \\
&= [S, X_0] + t[S, Y] + t[U, X_0 + tY] \\
&= 0 + t[S, Y] - t[S, Y] = 0,
\end{aligned}$$

dove si è usata la (2) e il fatto che X_0 è una forma normale. Notiamo infine che

$$X_0 + tY - (S + tU) = N + t(Y - U)$$

è nilpotente. Dunque abbiamo trovato la decomposizione di Jordan del campo $X_0 + tY$ e in particolare la sua parte semi-semplice è $S + tU$.

□

Corollario 6.3 *Sia $X_0 = S + N$ una forma normale olomorfa. Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ un sottoinsieme avente la proprietà (π'). Sia $Y \in E_{\mathcal{P}}$ un campo olomorfo 1-piatto. Allora, se l'equazione in U_0*

$$[X_0, U_0] = [S, Y]$$

non ha soluzioni olomorfe, la decomposizione di Jordan di $X_0 + Y$ è divergente.

In effetti il teorema precedente si applica al campo $X = X_0 + Y$, dove la parte semi-semplice è fornita dal procedimento precedente. Siccome $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ soddisfa la proprietà (π') si vede che, U_0 è la componente del campo U lungo il sottospazio $E_{\mathcal{P}}$. Questa componente è formata da solo alcuni termini della serie di potenze di U, il quale è dunque divergente.

Con un altro po' di lavoro tayloriano, ma tutto abbastanza "elementare", Brjuno dimostra il risultato seguente più preciso

Teorema 6.4 *Sia $X_0 = S + N$ una forma normale olomorfa. Sia $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ un sottoinsieme avente la proprietà (π'). Sia $Y \in E_{\mathcal{P}}$ un campo olomorfo 1-piatto. Allora, se l'equazione $[X_0, Z] = Y$ non ha soluzioni Z convergenti, non esiste un diffeomorfismo olomorfo che trasforma $X = X_0 + Y$ in X_0.*

Osservazione 6.5 *La seconda parte del teorema 6.2 e il corollario non figurano in Brjuno, il quale non distingue chiaramente la decomposizione di Jordan e la forma normale.*

Sistemi speciali in coordinate

Riprendiamo tutto il discorso precedente, condotto in maniera intrinseca, tramite le coordinate standard di $\mathbb{C}^n$; in questo modo possiamo arrivare a dimostrazioni dirette dei teoremi.

Associamo a ogni serie di potenze (vettoriale o scalare) $F = \sum_Q F_Q X^Q$ l'insieme

$$D(F) := \{Q \ : \ F_Q \neq 0\} \subseteq \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n,$$

degli esponenti che veramente appaiono nello sviluppo in serie.

Se L è il differenziale in 0 di F, consideriamo la proiezione lungo λ dell'insieme $D(F)$ sul δ-piano complesso

$$\mathfrak{d}(F) := \{\delta \ : \ \langle Q|\lambda\rangle = \delta, \ F_Q \neq 0\}\,.$$

Quindi se Y è in forma normale $\mathfrak{d}(Y) = \{0\}$.

Definizione 6.6 *Se $\boldsymbol{Y}$ è una forma normale e φ una serie 1-piatta, il sistema, perturbazione di $\boldsymbol{Y}$,*

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{z}) + \varphi(\boldsymbol{z})$$

è detto π'-speciale se vale che per ogni $\delta_1, \dots, \delta_s \in \mathfrak{d}(F)$ $(s > 1)$ si ha

$$\delta_1 + \cdots + \delta_s \notin \mathfrak{d}(F);$$

è invece detto π-speciale se vale che per ogni $\delta_1, \dots, \delta_{s-1} \in \mathfrak{d}(F)$ $(s > 1)$ si ha

$$\delta_1 + \cdots + \delta_{s-1} \neq 0.$$

Chiaramente la proprietà π'-*speciale* è più forte di quella π-*speciale*.

Il teorema 6.2 in coordinate diventa:

Teorema 6.7 *Sia*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{X}(\mathbf{z}) = \mathbf{Y}(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{z})$$

un sistema π'-speciale con $\boldsymbol{Y}$ forma normale. Sia

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w})$$

la trasformazione normalizzante unicamente definita dalla condizione $\boldsymbol{h}_\diamondsuit = 0$.

Allora è vero che:

1. *la forma normale a cui viene coniugata $\mathbf{X}$ è proprio $\mathbf{Y}$,*
2. *per ogni $\delta \in \mathfrak{d}(F)$ le serie $\{\hat{h}_j\}_\delta$ sono l'unica soluzione formale ξ del sistema[1] lineare*

$$\sum_k \frac{\partial \{\xi_j\}_\delta}{\partial w_k} \cdot \psi_k(\boldsymbol{w}) = \sum_k \frac{\partial \psi_j}{\partial w_k} \cdot \{\xi_k\}_\delta + \{\varphi_j\}_\delta(\boldsymbol{w}) \qquad j = 1, \dots, n.$$

Osservazione 6.8 *Nella dimostrazione del primo punto del teorema non abbiamo fatto uso della proprietà π'-speciale ma di quella più debole π-speciale.*

6.2 Necessità della condizione $\bar{\omega}$

Il raggio di convergenza ρ di una serie di potenze $\phi = \sum_Q \phi_Q \mathbf{z}^Q$ è dato da

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{\|Q\| \to \infty} |\phi_Q|^{1/\|Q\|}.$$

É noto che la serie ϕ converge assolutamente nel polidisco di raggio ρ e non si può avere un ρ maggiore con questa proprietà. La serie è divergente se $\rho = 0$. $\mathbf{h}(\mathbf{w})$ è divergente se $\hat{h}_j(\mathbf{w})$ è divergente per qualche j. Il problema della divergenza del cambio di variabili ha senso solo per quelle forme normali che provengono da qualche sistema olomorfo. La dimostrazione sarà fatta

[1] $[\psi, \xi] = \varphi$

prima per forme normali convergenti e poi, con un semplice argomento, si generalizzerà a tutte le forme normali. Ricordiamo che

$$\Omega_\lambda(m) := \min\{|\langle Q|\lambda\rangle| \ : \ \langle Q|\lambda\rangle \neq 0,\ \|Q\| < m,\ Q \in N\}.$$

Condizione $\bar{\omega}$

$$\limsup_{m\to+\infty} -\frac{1}{2^k}\log\Omega_\lambda(2^k) \ < \ +\infty.$$

Se questa condizione non è verificata, allora esiste una sequenza di punti $Q \in N$ tali che il prodotto scalare $\langle Q|\lambda\rangle$ decresce a zero troppo velocemente; vale a dire, più velocemente di ogni esponenziale.

Teorema 6.9 *Se L, corrispondente ad una forma normale convergente*

$$\dot{\mathbf{z}} = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{z}),$$

non soddisfa la condizione $\bar{\omega}$, allora esiste un campo vettoriale olomorfo che può esser coniugato formalmente alla forma normale, però il coniugio è divergente.

Dimostrazione. Se la condizione $\bar{\omega}$ non è soddisfatta, allora

$$\limsup_{k\to+\infty} -\frac{1}{2^k}\log\Omega_\lambda(2^k) \ = \ +\infty.$$

Il minimo $\Omega_\lambda(2^k)$ è raggiunto in qualche punto $Q^{(k)} \in N$:

$$\left\langle Q^{(k)}|\lambda\right\rangle \neq 0,\ \left\|Q^{(k)}\right\| \leq 2^k,\ \omega_k := |\left\langle Q^{(k)}|\lambda\right\rangle|.$$

Perciò

$$\left\|Q^{(k)}\right\|^{-1}\log|\left\langle Q^{(k)}|\lambda\right\rangle|^{-1} \geq 2^{-k}\log\omega_k^{-1},$$

$$\limsup_{k\to+\infty}\left\|Q^{(k)}\right\|^{-1}\log|\left\langle Q^{(k)}|\lambda\right\rangle|^{-1} \ = \ +\infty.$$

Sia ora $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall Q \in \mathbb{Z}^n : \langle Q|\Re e\lambda\rangle + \alpha\langle Q|\Im m\lambda\rangle = 0 \Longrightarrow \langle Q|\lambda\rangle = 0.$$

Esiste per il seguente motivo. Dobbiamo escludere gli α_0 per cui esiste Q_0 tale che $\langle Q_0|\Re e\lambda\rangle + \alpha_0\langle Q_0|\Im m\lambda\rangle = 0$ e $\langle Q_0|\lambda\rangle = 0$. Abbiamo escluso un α_0 per ogni Q_0, e quindi al massimo una quantità numerabile.

Poniamo $L := \Re e\lambda + \alpha\Im m\lambda$, in modo che $\left\langle Q^{(k)}|L\right\rangle \neq 0$ poiché $\left\langle Q^{(k)}|\lambda\right\rangle \neq 0$. Dividiamo la successione $\{Q^{(k)}\}_k$ in $2n$ sottosuccessioni

$$\pi_j := \{Q^{(k)}\}_k \cap N_j \cap \{\langle Q|L\rangle > 0\} = \left\{Q^{(k)} \ : \ Q^{(k)} \in N_j\ ,\ \left\langle Q^{(k)}|L\right\rangle > 0\right\},$$

$$\pi_{n+j} := \{Q^{(k)}\}_k \cap N_j \cap \{\langle Q|L\rangle < 0\} = \left\{Q^{(k)} \ : \ Q^{(k)} \in N_j\ ,\ \left\langle Q^{(k)}|L\right\rangle < 0\right\},$$

$j = 1, \ldots, n$. Il fatto $\limsup \left\|Q^{(k)}\right\|^{-1} \log |\left\langle Q^{(k)}|\lambda\right\rangle|^{-1} = +\infty$ deve valere ancora per una delle sottosuccessioni, diciamo π_1, e poniamo $\pi_1 = \{S^{(m)}\}_m$.

Possiamo assumere che $\left\|S^{(1)}\right\| > 1$ (e che gli $S^{(m)}$ siano ordinati in maniera lessicografica). Riassumendo le proprietà, abbiamo

$$S^{(m)} \in N_1 \ , \ \left\langle S^{(m)}|L\right\rangle > 0 \ , \ \limsup \left\|S^{(m)}\right\|^{-1} \log |\left\langle S^{(m)}|\lambda\right\rangle|^{-1} = +\infty.$$

Vogliamo costruire un sistema speciale. La forma normale già l'abbiamo; per la variazione vogliamo definire

$$\varphi_1 = z_1 \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \mathbf{z}^{S^{(m)}} \ , \quad |\theta_m| = 1,$$

$$\varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0,$$

definiremo in seguito gli argomenti dei θ_m. Comunque il raggio di convergenza della serie è 1, quindi il sistema speciale sarà convergente. Il fatto che $\left\|S^{(1)}\right\| > 1$ ci dice che φ risulta 1-piatto.

Proviamo che il sistema è π-speciale. Infatti, poniamo $\delta^{(m)} = \left\langle S^{(m)}|\lambda\right\rangle$ in modo che $\mathfrak{d}(\varphi) = \{\delta^{(m)}\}_1^{\infty}$. Abbiamo $\Re e\delta^{(m)} + \alpha\Im m\delta^{(m)} > 0$, dunque se $\delta_1, \ldots, \delta_{s-1} \in \mathfrak{d}(F)$ $(s > 1)$ si ha $\delta_1 + \ldots + \delta_{s-1} \neq 0$, poiché

$$\Re e(\delta_1+\ldots+\delta_{s-1})+\alpha\Im m(\delta_1+\ldots+\delta_{s-1}) = \Re e\delta_1+\alpha\Im m\delta_1+\ldots+\Re e\delta_{s-1}+\alpha\Im m\delta_{s-1} > 0.$$

Quindi possiamo applicare il teorema precedente; il cambio di variabili

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{w}) \ , \qquad \mathbf{h}_{\diamondsuit} = 0.$$

porta il sistema speciale nella forma normale.

Quando formalmente imponiamo il coniugio e ci troviamo a definire i H_Q^j nel Teorema di Esistenza (4.12) arriviamo alla formula (4.4) che in questo caso si legge (se $\mathbf{X} = \mathbf{Y} + \varphi$)

$$H_Q^j \left\langle Q|\lambda\right\rangle = F_Q^j + C_{jQ},$$

dove i C_{Qj} dipendono solo dai vettori di indice inferiore a Q. In particolare,

$$H_{S^{(m)}}^1 \left\langle S^{(m)}|\lambda\right\rangle = \theta_m + c_m.$$

Poiché i vettori $S^{(l)}$ con $l < m$ precedono il vettore $S^{(m)}$, il coefficiente c_m dipende solo da $\theta_1 \ldots, \theta_{m-1}$. Siamo pronti a definire esattamente i θ_m per ricorrenza:

$$|\theta_m| = 1 \qquad \text{e} \qquad \arg \theta_m = \begin{cases} \arg c_m & \text{per} \quad c_m \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad c_m = 0 \end{cases}$$

Quindi $|\theta_m + c_m| \geq |\theta_m| = 1$, dunque

$$|H^1_{S^{(m)}}| \geq |\left\langle S^{(m)}|\lambda\right\rangle|^{-1}$$

e

$$|H^1_{S^{(m)}}|^{1/\|S^{(m)}\|} \geq \exp \frac{\log|\left\langle S^{(m)}|\lambda\right\rangle|^{-1}}{\|S^{(m)}\|}.$$

Dunque si ha la divergenza

$$\limsup_{k\to+\infty} |H^1_{S^{(m)}}|^{1/\|S^{(m)}\|} = \infty.$$

□

6.3 Necessità della condizione A

6.3.1 Necessità della condizioni A_1' e A_2

Teorema 6.10 *Sia*

$$\dot{\mathbf{z}} = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{z}),$$

una forma normale convergente che non soddisfa la condizione A_1' se L è nel caso 1 o A_2 se L è nel caso 2. Allora esiste un campo vettoriale olomorfo che può esser coniugato formalmente alla forma normale, ma solo tramite un coniugio divergente.

Dimostrazione. (schema) Per quanto visto in precedenza l'ipotesi si può riformulare dicendo che non ci sono g_j con potenze negative e che

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{T},$$

dove

$$\mathfrak{O} := \{Q \in \mathbb{R}^n \;:\; Q \geq 0\} \quad , \quad \mathfrak{R} := \{Q \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle Q|\lambda\rangle = 0\}$$

e

$$\mathfrak{T} := \{Q \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle Q|G_R\rangle = 0 \;\forall R \in N\}.$$

Ricordo che $D(G) := \{Q \in \mathbb{Z}^n : G_Q \neq 0\}$. Quindi il fatto che g_j abbia potenze negative equivale all'esistenza di Q tale che $G_Q \neq 0$ e $q_j = -1$, dunque, equivale all'ipotesi che $D(G)$ non sia contenuto in $\mathfrak{O}$. L'insieme delle forme normali che non soddisfano l'ipotesi saranno divise in tre insiemi

(i) $D(G)$ non è contenuto in $\mathfrak{O}$;

(ii) $D(G) \subseteq \mathfrak{O}$, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} \cap \mathbb{Z}^n$ non è contenuto in $\mathfrak{T}$;

(iii) $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O} \cap \mathbb{Z}^n \subseteq \mathfrak{T}$, $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{O}$ non è contenuto in $\mathfrak{T}$.

La dimostrazione della divergenza avverrà nei differenti casi in modi diversi, con il seguente schema:

I. Lemma ausiliari 2, 3, 4, 5.

II. Insieme (i) teorema 3 e lemma 6

III. Sottocaso 1b) teorema 4; lemma 7 per $l \geq 2$; lemma 8 e 9 per $l = 1$;

IV. Insieme (ii) teorema 5 e lemma 10

V. Insieme (iii) teorema 6

VI. Dimostrazione del Teorema.

□

6.3.2 Necessità della condizione A_1''

Questo come al solito sarà più difficile.

Teorema 6.11 *Sia L il differenziale in* 0 *di una forma normale convergente*

$$\dot{\mathbf{z}} = L\mathbf{z} + \hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{z}).$$

*Se L è nel caso 1** e soddisfa la condizione A_1' ma non soddisfa la condizione A_1'', allora esiste un campo vettoriale olomorfo che può esser coniugato formalmente alla forma normale, ma solo tramite un coniugio divergente.*

Dimostrazione. Omessa

□

Capitolo 7

Divergenza del cambio di variabile normalizzante per mappe

7.1 Criteri di non linearizzabilità

7.1.1 Criterio di Il'yashenko

Definiamo

$$\mathcal{E}_n := \{g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0) \text{ germi olomorfi } : g(0) = Dg(0) = 0\}$$

Proposizione 7.1 Criterio di non-linearizzabilità (Il'yashenko). *Sia L l'operatore $L : \mathcal{E}_n^n \longrightarrow \mathcal{E}_n^n$ definito da*

$$L(g) := -D_2\mathcal{F}(\Lambda, \mathrm{id})g = g \circ \Lambda - \Lambda \circ g,$$

dove $\Lambda \in GL(n, \mathbb{C})$ non è risonante. Se L non è surgettivo, cioè c'è almeno una funzione $f \in \mathcal{E}_n^n \setminus L(\mathcal{E}_n^n)$, allora

$$\Lambda + tf : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$$

non è linearizzabile per quasi ogni valore di $t \in \mathbb{C}$.

Osservazione 7.2 *Se Λ non è risonante, allora L è iniettivo.* Infatti se $g \in \mathcal{E}_n^n$, $Lg = 0$ allora $g\Lambda = \Lambda g$, quindi $\mathrm{id} + g$ coniuga Λ a se stessa; poiché l'unica serie formale di un tale coniugio è l'identità, allora $g = 0$.

Osservazione 7.3 *L è in un certo senso la linearizzazione di $h^{-1}fh$.*

Prima della dimostrazione premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 7.4 *Sia $f \in \mathcal{E}_n^n$ e Λ non risonante; sia $H_t \in \mathbb{C}^n[[z]]$ la serie formale della linearizzazione di $\Lambda + tf$, cioè $H_t^{-1} \circ (\Lambda + tf) \circ H_t = \Lambda$. Scrivendo $H_t = \mathrm{id} + h_t$ e*

$$h_t(z) = \sum_{j=1,\dots,n,\ |k|\geq 2} h_k^j(t) z^k e_j,$$

allora si ha che gli $h_k^j(t)$ sono polinomi in t di grado minore di $|k|$.

Dimostrazione. Ponendo $h_k^j(t) = \delta_i^j$ se $k = e_i$, possiamo scrivere

$$H_t(z) = \sum_{j=1,\dots,n,\ |k|\geq 1} h_k^j(t) z^k e_j$$

.

La dimostrazione sarà per induzione su $s = |k|$, per $s \geq 1$.

La serie h_t soddisfa

$$L(h_t) = h_t\Lambda - \Lambda h_t = tf \circ (\mathrm{id} + h_t). \tag{7.1}$$

Per ogni $g \in \mathcal{E}_n^n$ ed $s \in \mathbb{N}$ indichiamo con $(g)_s$ la componente di g omogenea di grado s in z. Ovviamente

$$\deg_t(H_t)_s = \max\{\deg_t h_k^j(t) \ :\ |k| = s, j = 1, \dots, n\}.$$

Mostriamo che

$$(Lg)_s = L(g)_s \qquad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Per la linearità di L basta provarlo per $g(z) = z^k e_j$ per ogni $k \in \mathbb{N}^n$. Infatti, se $|k| = r$, allora $L(g)_r(z) = (Lg)(z) = (g\Lambda - \Lambda g)(z) = (\Lambda z)^k e_j - z^k(\Lambda e_j) = (Lg)_r(z)$, poiché $(\Lambda z)^k$ è un polinomio omogeneo di grado r in z. Quindi se $s = r$ è ok, se $s \neq r$ allora $(Lg)_s = 0 = L(g)_s = L0$.

Vale anche

$$\deg_t L(h_t)_s = \deg_t(h_t)_s \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Infatti $\deg_t L(g)_s = \deg_t(g)_s$ con $g \in \mathcal{E}_n^n[t]$, i polinomi in t a coefficienti in $\mathcal{E}_n^n$. Per la linearità di L basta provarlo per $g = t^m\tilde{g}$, con $\tilde{g} \neq 0$, $\tilde{g} \in \mathcal{E}_n^n$. Ma $Lg = t^m L\tilde{g}$ ha ancora grado m poiché $L\tilde{g} \neq 0$ per l'iniettività di L.

Passo iniziale dell'induzione: $s = 1$ è banale. Mostriamo anche per $s = 2$. Si ha che

$$L(h_t)_2 = (Lh_t)_2 = t(f)_2,$$

poiché $(f \circ (\mathrm{id} + h_t))_2 = (f)_2$. Quindi $deg_t(h_t)_2 = 1$.

Ipotesi induttiva: assumiamo di aver provato che $deg_t(H_t)_r \leq r - 1 \quad \forall r = 1, \dots, s-1$. Tesi: usando il fatto che $t(f \circ H_t)_s = L(h_t)_s$, basta provare che $deg_t(f \circ H_t)_s \leq s - 2$.

Abbiamo

$$f \circ H_t(z) = \sum_{|\alpha|\geq 2, j=1,\dots,n} f^j_\alpha \left(\sum_{|\beta|\geq 1, i=1,\dots,n} H^i_\beta(t) z^\beta e_i \right)^\alpha e_j$$

Quindi $(f \circ H(z))_s$ sarà combinazione lineare (a coefficienti vettoriali) di termini della forma

$$\prod_{l=1}^m H^{i_l}_{\beta(l)} z^{\beta(l)}$$

con $m \geq 2$, $\beta(l) \in \mathbb{N}^n$, $|\beta(l)| \geq 1$, $\sum_{l=1}^m |\beta(l)| = s$, (quindi $|\beta(l)| < s$ per ogni l). Da cui, usando l'ipotesi induttiva,

$$deg_t \prod_{l=1}^m H^{i_l}_{\beta(l)} z^{\beta(l)} = \sum_{l=1}^m deg_t H^{i_l}_{\beta(l)} \leq \sum_{l=1}^m (|\beta(l)| - 1) = s - m \leq s - 2.$$

□

Lemma 7.5 (N.S. Nadirashvili). *Sia P un polinomio di grado m. Sia D_R il disco di centro 0 e raggio R e sia $E \subseteq D_R \subseteq \mathbb{C}$ un insieme di misura positiva (secondo Lebesgue). Se esiste $q \in \mathbb{N}_+$*

$$|P(z)| \leq q^m \quad \forall z \in E,$$

allora esiste C, costante che dipende solo dalla misura di E e da R (e non da m o P o da q), tale che

$$|P(z)| \leq (Cq)^m \quad \forall z \in D_R.$$

La prova è un'applicazione della teoria del potenziale.

Dim.(criterio) Supponiamo per assurdo che esista un insieme $M \subseteq \mathbb{C}$ di misura positiva tale che per ogni $t \in M$, h_t converge in un intorno dell'origine. Allora per ogni $t \in M$ la funzione

$$q(t) := \inf\{q \ : \ q^{|k|} > |h^j_k(t)| \ \forall k \in \mathbb{N}^n, \ \forall j = 1, \dots, n\}$$

è ben definita e finita. poiché per il primo lemma le funzioni $h^j_k(t)$ sono polinomi, la funzione $q(t)$ è misurabile, essendo il sup di misurabili: $q(t) = \sup\{(|h^j_k(t)|)^{\frac{1}{|k|}} \ : \ k \in \mathbb{N}^n, \ j = 1, \dots, n\}$. Quindi possiamo trovare un intero q in modo che l'insieme $E := \{t \ : \ q(t) < q\}$ abbia misura positiva. Quindi su E si ha che $q^{|k|} > |h^j_k(t)|$. Per il secondo lemma la stima si estende su tutto un disco D_R, (tale che mis$(D_R \cap E) > 0$) e

$$|h^j_k(t)| < (Cq)^{|k|}$$

per una qualche C. poiché siamo riusciti a stimare i coefficienti di h_t con i coefficienti di una serie geometrica, possiamo affermare che le h_t sono convergenti in un intorno dell'origine. A questo punto possiamo considerare la funzione

$$\overline{h} := \frac{\partial}{\partial t} h_t|_{t=0}$$

olomorfa in un intorno dell'origine; tale funzione esiste poiché Differenziando l'equazione (7.1) rispetto a t in $t = 0$ otteniamo che $\overline{h}$ ha immagine f tramite L, e questo contraddice l'ipotesi.

$\square$

Caso Λ non diagonalizzabile

Teorema 7.6 (Il'yashenko - Yoccoz). *Sia Λ non risonante e non diagonalizzabile, con blocco di Jordan non banale proveniente da un autovalore di modulo unitario. Allora esiste un germe in G_Λ non linearizzabile.*

Prima di dimostrare il teorema abbiamo bisogno di un lemma preliminare

Definiamo

$$\mathcal{E} = \{g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0) \ : \ g(0) = Dg(0) = 0\}$$

e $A_{\lambda,t} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$

$$(A_{\lambda,t}g)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := g\left(\begin{pmatrix} \lambda & t\lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) - \lambda g\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = g(\lambda(z_1+tz_2), \lambda z_2) - \lambda g(z_1, z_2)$$

Lemma 7.7 *Per ogni $|\lambda| = 1$ e ogni $t \neq 0$, $A_{\lambda,t}$ non è invertibile.*

Dimostrazione. Si veda l'articolo sull'Asterisque.

Dim.(Teorema) Se Λ non è diagonalizzabile allora $n \geq 2$. Possiamo limitarci a $n = 2$, poiché comunque possiamo lavorare solo nelle prime due variabili e lasciare invariate le altre. Possiamo anche prendere $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Consideriamo l'operatore $L : \mathcal{E}^2 \longrightarrow \mathcal{E}^2$

$$L(g) := g \circ \Lambda - \Lambda \circ g.$$

Se si scrive $g = (g_1, g_2)$ si ha che la seconda componente di $L(g)$ è uguale a $A_{\lambda,1}(g_2)$. poiché $A_{\lambda,1}$ non è surgettiva, allora L non è surgettiva. Sia f in $\mathcal{E}^2$ ma non nell'immagine di L, allora secondo il criterio di non-diagonizzabilità di Il'yashenko $F_t = \Lambda + tf$ non è linearizzabile per quasi ogni valore di t.

$\square$

7.1.2 Dicotomia di Perez-Marco

Diamo riferimento a [32] per la definizione di Γ-capacità.

Teorema 7.8 (Perez-Marco). *Siano $n, m \geq 1$ e $d \geq 0$ interi. Per ogni multindice $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$ con $0 \leq |k| := k_1 + \cdots + k_m \leq d$, sia $\boldsymbol{f}_k$ un germe in 0 di una mappa olomorfa*

$$\boldsymbol{f}_k : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

con valutazione maggiore o uguale a 2 (i.e., $\boldsymbol{f}_k(z) = O(z^2)$). Per $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m$, consideriamo il germe di funzione olomorfa

$$\boldsymbol{f}_t(z) := \Lambda z + \sum_{|k| \leq d} t^k \boldsymbol{f}_k(z)$$

dove $\Lambda \in GL_n(\mathbb{C})$ è un'applicazione lineare fissata senza autovalori risonanti.

Allora si ha "totale convergenza per ogni valore del parametro oppure divergenza eccetto per un eventuale insieme eccezionale di valori del parametro molto piccolo".

Precisamente, ogni mappa $\boldsymbol{f}_t$ è formalmente linearizzabile, i.e., coniugata alla sua parte lineare, cioè esiste un'unica serie formale $\boldsymbol{h}_t$ tangente all'identità tale che

$$\boldsymbol{h}_t \circ \boldsymbol{f}_t = \Lambda \circ \boldsymbol{h}_t,$$

e si ha la seguente dicotomia:

1. *La famiglia olomorfa $\{\boldsymbol{f}_t\}_{t \in \mathbb{C}^m}$ è olomorficamente linearizzabile, cioè per ogni $t \in \mathbb{C}^m$ $\boldsymbol{h}_t$ definisce un germe di biolomorfismo. Inoltre il raggio di convergenza $R(t)$ della linearizzazione $\boldsymbol{h}_t$ è limitato dal basso sui compatti; più precisamente si ha*

$$R(t) \geq \frac{C_0}{1 + \|t\|}$$

   per qualche costante C_0 positiva.

2. *Eccetto per un insieme eccezionale $E \subset \mathbb{C}^m$ di Γ-capacità 0 di valori di t, $\boldsymbol{f}_t$ non è olomorficamente linearizzabile.*

Bibliografia

[1] M. Abate.
An introduction to hyperbolic dynamical systems.
I.E.P.I. Pisa, 2001

[2] M. Abate.
Discrete local holomorphic dynamics.
Preprint, arXiv: math.DS/0310089 2003

[3] V. Arnold.
Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations.
Springer-Verlag, 1983.

[4] J. Basto-Gonçalves.
Linearization of resonant vector fields.
Preprint 2003

[5] J. Basto-Gonçalves, I. Cruz.
Analytic linearizability of some resonant vector fields.
Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), no. 8, 2473–2481

[6] J. Basto-Gonçalves, A. C. Ferreira.
Normal forms and linearization of resonant vector fields with multiple eigenvalues.
Preprint 2003

[7] Брюно А. Д. . A. D. Brjuno. (o Bryuno o Bruno)
Analytical form of differential equations.
Trans. Moscow Math. Soc., 25 (1971),131-288.

[8] Брюно А. Д. .
Local methods in nonlinear differential equations.
Springer Series in Soviet Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1989

[9] C. Camacho, N. H. Kuiper, J. Palis.

The topology of holomorphic flows with singularity.

Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 48 (1978), 5–38.

[10] L. Carleson, T.W. Gamelin.

Complex dynamics.

Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993. x+175 pp. ISBN: 0-387-97942-5

[11] T.Carletti, S. Marmi.

Linearization of analytic and non-analytic germs of diffeomorphisms of $(C, 0)$.

Bull. Soc. Math. France 128 (2000)

[12] D. DeLatte, T. Gramchev.

Biholomorphic maps with linear parts having Jordan blocks: linearization and resonance type phenomena.

Math. Phys. Electron. J. 8 (2002)

[13] B.A. Dubrovin, S.P. Novikov, A.T. Fomenko

Geometria Contemporanea 1 - Geometria delle superfici, dei gruppi di trasformazioni e dei campi

Editori Riuniti, Edizioni MIR 1987

[14] J. Ecalle.

Singularités non abordables par la géométrie.

Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 42 (1992).

[15] J. Ecalle, B. Vallet.

Correction and linearization of resonant vector fields and diffeomorphisms.

Math. Z. 229, 249-318 (1998).

[16] M. Herman.

Recent results and some open questions on Siegel's linearization theorem of germs of complex analytic diffeomorphisms of $\mathbb{C}^n$ near a fixed point.

Proc. 8^{th} Int. Cong. Math. Phys. World Scientific, Singapore, 1986, pp. 138–198

[17] Yu.S. Il'yashenko.

Divergence of series reducing an analytic differential equation to linear normal form at a singular point.

Funct. Anal. Appl. 13 1979 227-229

[18] N. Jacobson.

Basic algebra. I. Second edition.

W. H. Freeman and Company, New York, 1985

[19] S. Marmi

An introduction to small divisors problems.

I.E.P.I. Pisa, 1999

[20] S. Marmi, J.-C. Yoccoz.

Some open problems related to small divisors.

Dynamical systems and small divisors (Cetraro, 1998), 175–191, Lecture Notes in Math., 1784, Springer, Berlin, 2002.

[21] J. Martinet.

Normalisation des champs de vecteurs holomorphes.

Séminaire Bourbaki, 33 (1980-1981), 564.

[22] J. Milnor.

Dynamics in one complex variable.

Vieweg, Braunschweig, 2000

[23] R. Pérez-Marco.

Convergence or generic divergence of the Birkhoff normal form.

Ann. of Math. (2) 157 (2003).

[24] R. Pérez-Marco.

Linearization of holomorphic germs with resonant linear part

Preprint, arXiv: math.DS/0009030 2000

[25] R. Pérez-Marco.

Total convergence or general divergence in small divisors

Comm. Math. Phys. 223 (2001), no. 3, 451–464.

[26] R. Pérez Marco, J:-C. Yoccoz.

Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite.

Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992). Astérisque No. 222 (1994), 7, 345–371.

[27] H. Poincaré.

Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles.

Oeuvres, 1, Gautheier-Villars, Paris (1929) (IX 7), pp. XCIX-CX.

[28] Pö J. Pöschel.

On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points.

Exp. Math. 4 1986 97-109

[29] L. Reich.

Biholomorphe Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt und analytische Differentialgleichungssysteme in Nähe einer Gleichgewichtslage.

Math. Ann. 181 1969 163–172.

[30] L. Reich.

Normalformen biholomorpher Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt.

Math. Ann. 180 1969 233–255.

[31] L. Reich.

Das Typenproblem bei formal-biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt.

Math. Ann. 179 1969 227–250.

[32] L.I. Ronkin.

Introduction to the theory of entire functions of several variables.

Translations of Mathematical Monographs, Vol. 44. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974

[33] H. Rüssmann.

Kleine Nenner II: Bemerkunger zur Newtonschen Methode.

Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. pp.1-20 1972.

[34] H. Rüssmann.

Stability of elliptic fixed points of analytic area-preserving mappings under the Bruno condition.

Ergodic Theory Dynam. Systems 22 (2002), no. 5, 1551–1573.

[35] E. Schröder.

Uber iterierte Funktionen.

Math. Ann. 3. (p.296-322) (1871).

[36] C. L. Siegel
Iteration of analytic functions.
Math. Ann. 43. 607-612 (1941).

[37] C. L. Siegel, J. K. Moser.
Lectures on Celestial Mechanics
Springer, 1970.

[38] J.-C. Yoccoz.
Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$.
C.R. Acad. Sci. Paris 306 1988 55-58

[39] J.-C. Yoccoz.
Théorème de Siegel, nombres de Bryuno et polynômes quadratiques.
Astérisque 231 1995 3-88

[40] E. Zehnder.
A simple proof of a generalization of a theorem by C. L. Siegel.
Geometry and topology (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976), pp. 855–866. Lecture Notes in Math., Vol. 597, Springer, Berlin, 1977.