

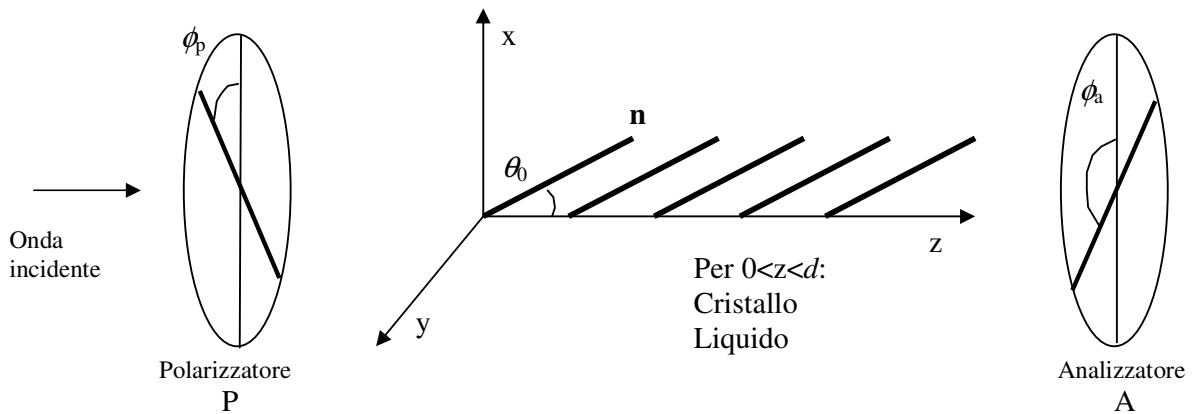
## Capitolo 2

# Riflessione e Trasmissione attraverso una lamina anisotropa uniassiale

In questo capitolo, richiameremo brevemente l'ottica dei materiali anisotropi uniassiali. Nel nostro caso si tratta dei cristalli liquidi nematici il cui direttore coincide con l'asse ottico. Parleremo, in seguito, dei principi ottici alla base dei metodi di misura di ancoraggi azimutali, in riflessione e in trasmissione, usati in questo lavoro di tesi.

### 2.1 Breve introduzione ai materiali anisotropi uniassiali

Consideriamo un raggio monocromatico, di lunghezza d'onda  $\lambda_0$ , che incide normalmente su una lamina anisotropa *uniassiale* di spessore  $d$ . Un mezzo si dice uniassiale quando ogni proprietà ottica è simmetrica per rotazione attorno all'asse ottico. Scegliamo un sistema di assi cartesiani in cui una superficie della lamina sia nel piano  $xy$  e l'asse ottico giaccia nel piano  $xz$ , con angolo  $\theta_0$  rispetto all'asse  $z$ .



**Figura 2.1:** La radiazione incidente è polarizzata linearmente da un polarizzatore  $P$ , con un angolo  $\phi_p$  rispetto l'asse  $x$ . L'onda, poi, incide normalmente su una lamina di materiale birifrangente uniassiale, di spessore  $d$ , il cui asse ottico forma un angolo  $\theta_0$  rispetto all'asse  $z$ . Dopo il mezzo è posto un analizzatore  $A$ , caratterizzato da un angolo  $\phi_a$ .

Nel nostro caso, il materiale anisotropo è il cristallo liquido 5CB e l'asse ottico coincide con la direzione del direttore. Assumiamo che il direttore

sia orientato uniformemente nel campione. Il suo orientamento è descritto dal versore:

$$\mathbf{n} = (\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0) \quad (2.1)$$

Inviando il fascio di luce attraverso un polarizzatore P che lo polarizza linearmente. L'asse di P forma un angolo  $\phi_p$  rispetto a  $x$ . Scomponiamo il campo elettrico dell'onda incidente in due componenti (nel seguito, per semplificare le notazioni, eviteremo di esplicitare la dipendenza spaziale e temporale del campo):

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos \phi_p \\ E_y = E_0 \sin \phi_p \end{cases} \quad (2.2)$$

dove  $E_0$  è l'ampiezza dell'onda incidente. Consideriamo separatamente le due componenti.

- 1)  $E_x = E_0 \cos \phi_p$  è la componente del campo lungo la proiezione del direttore sul piano della lamina. Questa componente si dice *onda straordinaria* e, all'interno del materiale, 'vede' un indice di rifrazione  $n(\theta_0)$ . Essa si propaga con una velocità di fase  $c/n(\theta_0)$ , dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto.
- 2)  $E_y = E_0 \sin \phi_p$  è la componente del campo perpendicolare alla proiezione del direttore sul piano della lamina. Tale componente si dice *onda ordinaria* e 'vede' un indice di rifrazione  $n_{\perp}$ , detto indice *ordinario*. La velocità di fase è  $c/n_{\perp}$ .

Distinguiamo due casi:

- 1)  $\phi_p = 0^\circ, 180^\circ$ : il campo incidente ha solamente la componente straordinaria. La polarizzazione incidente è, quindi, interamente parallela all'asse  $x$ . Quando il direttore è orientato uniformemente come in questo caso, l'onda si propaga nel materiale con velocità di fase  $c/n(\theta_0)$  e la sua polarizzazione si mantiene inalterata, come vedremo in seguito (§2.3).
- 2)  $\phi_p = \pm 90^\circ$ : il campo incidente ha solamente la componente ordinaria. La polarizzazione incidente è interamente lungo l'asse  $y$ . Quando il direttore è orientato uniformemente, l'onda si propaga nel materiale con la velocità di fase  $c/n_{\perp}$  e la sua polarizzazione si mantiene perpendicolare alla proiezione del direttore.

L'indice  $n(\theta_0)$ , visto dalla polarizzazione straordinaria, è compreso tra l'indice  $n_{\perp}$  e l'indice  $n_{\parallel}$ . Quest'ultimo è detto indice *straordinario* ed è l'indice visto dalla componente straordinaria nel caso particolare in cui  $\theta_0$  è  $\pi/2$ , cioè nel caso in cui  $\mathbf{n}$  giace proprio nel piano della lamina lungo l'asse  $x$ . Al contrario, se  $\theta_0$  è zero, cioè  $\mathbf{n}$  è ortogonale alla lamina, qualunque polarizzazione dell'onda incidente sarà sempre perpendicolare all'asse ottico e vedrà l'indice ordinario  $n_{\perp}$ .

Per un  $\theta_0$  generico, la relazione che lega  $n(\theta_0)$  a  $n_{\parallel}$  e  $n_{\perp}$  è [1]:

$$\frac{\sin^2 \theta_0}{n_{\parallel}^2} + \frac{\cos^2 \theta_0}{n_{\perp}^2} = \frac{1}{n(\theta_0)^2} \quad (2.3)$$

Per il 5CB, abbiamo, a 21°C,  $n_{\parallel} = 1.717$  e  $n_{\perp} = 1.528$  [2].

### 2.1.1 Trasmissione attraverso una lamina birifrangente uniassiale

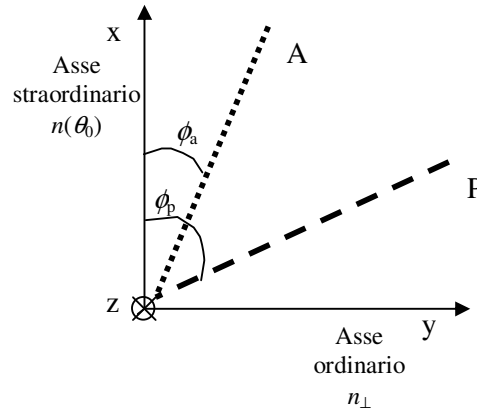
Adesso consideriamo il caso in cui l'onda incidente sulla lamina sia polarizzata linearmente con un angolo  $\phi_p$  qualsiasi. In uscita dalla lamina, di spessore  $d$ , l'onda straordinaria e l'onda ordinaria risultano sfasate di una quantità  $\delta$  a causa delle velocità di fase diverse con cui si propagano nel mezzo birifrangente:

$$\begin{cases} E_x' = E_0 \cos \phi_p \\ E_y' = E_0 \sin \phi_p e^{-i\delta} \end{cases} \quad (2.4)$$

Lo sfasamento  $\delta$ , fra l'onda straordinaria e quella ordinaria, è pari a:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} [n(\theta_0) - n_{\perp}] d \quad (2.5)$$

Generalmente, il campo trasmesso dalla lamina ha una polarizzazione ellittica. Per  $\phi_p = 45^\circ$ , si verificano due casi interessanti: quando  $\delta = 90^\circ$  il mezzo si comporta come una lamina *a quarto d'onda*, cioè la polarizzazione dell'onda uscente è divenuta da lineare a circolare; quando  $\delta = 180^\circ$  il mezzo si comporta come una lamina *a semi-onda*, cioè la polarizzazione dell'onda trasmessa è ancora lineare, ma risulta perpendicolare rispetto alla polarizzazione dell'onda incidente.



**Figura 2.2:** Rappresentazione schematica degli assi del polarizzatore P e dell'analizzatore A. Il direttore del nematico, non rappresentato in figura, giace nel piano xz e la sua proiezione sul piano della lamina è lungo x.

Un modo per determinare sperimentalmente lo sfasamento  $\delta$ , introdotto dalla birifrangenza della lamina, è quello di porla tra due polarizzatori incrociati. Il secondo polarizzatore è detto *analizzatore* (Figura 2.1). Consideriamo il caso generale in cui il polarizzatore P formi un angolo  $\phi_p$

con l'asse  $x$  e l'analizzatore A formi un angolo  $\phi_a$ . La Figura 2.2 rappresenta la posizione reciproca degli assi dei due polarizzatori. La proiezione del direttore del nematico sul piano dell'interfaccia è lungo  $x$ .

Dopo l'attraversamento di A, il segnale risulta polarizzato linearmente lungo A ed ha ampiezza:

$$E' = E_x' \cos \phi_a + E_y' \sin \phi_a = E_0 (\cos \phi_p \cos \phi_a + \sin \phi_p \sin \phi_a e^{-i\delta}) \quad (2.6)$$

Ora, quello che interessa è l'intensità dell'onda trasmessa  $I = \gamma [E' \cdot (E')^*]$  dove  $\gamma$  è un opportuno coefficiente. A partire dalla (2.6), dopo alcuni passaggi, ricaviamo l'espressione per l'intensità:

$$I = I_0 \left[ \cos^2(\phi_a - \phi_p) - \sin 2\phi_p \sin 2\phi_a \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \right] \quad (2.7)$$

dove  $I_0$  è l'intensità misurata per  $\phi_p = \phi_a = 0^\circ$ .

Quando i due polarizzatori sono incrociati, cioè  $\phi_a = \phi_p - 90^\circ$ , l'intensità risulta:

$$I = I_0 \sin^2(2\phi_p) \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad (2.8)$$

Osserviamo che  $I = 0$  per  $\phi_p = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ . Ciò significa che, tra polarizzatori incrociati, non abbiamo segnale trasmesso ogni volta che l'asse del polarizzatore P è parallelo od ortogonale alla proiezione del direttore sul piano della lamina. In altre parole, se la polarizzazione del campo incidente ha solamente la componente straordinaria o solamente la componente ordinaria, la sua polarizzazione non cambia durante l'attraversamento della lamina e la radiazione è interamente assorbita dall'analizzatore A. Inoltre, l'intensità (2.8) è nulla anche per uno sfasamento  $\delta$  pari ad un multiplo intero di  $360^\circ$ . Il caso  $\delta = 0^\circ$  si presenta, ad esempio, se  $n(\theta_0) = n_\perp$ . Ciò si verifica quando  $\theta_0 = 0^\circ$  (cfr (2.3)), cioè quando l'asse ottico è ortogonale all'interfaccia della lamina. Per i cristalli liquidi nematici si parla di allineamento omeotropico (cfr §1.4). Tuttavia, l'intensità si annulla anche quando  $\delta$  è un multiplo intero *non nullo* di  $360^\circ$ . In quest'ultimo caso entrano in gioco gli indici di rifrazione della lamina, il suo spessore  $d$  e anche la lunghezza d'onda della radiazione incidente. Se, ad esempio, abbiamo  $\delta = 360^\circ$  in corrispondenza della radiazione rossa, questa sarà bloccata dall'analizzatore A e non avremo nessuna radiazione trasmessa. Tuttavia, per altre lunghezze d'onda,  $\delta$  assumerà valori diversi da  $360^\circ$  e, quindi, non è detto che l'intensità del fascio trasmesso sia zero. Se inviamo radiazione incidente bianca, che è la sovrapposizione di onde monocromatiche di lunghezze d'onda diverse, in trasmissione si avranno colori complementari al rosso, perché la componente rossa viene assorbita.

## 2.1.2 Riflessione all'interfaccia tra un mezzo isotropo e il cristallo liquido

Consideriamo, adesso, il caso in cui, a contatto con il materiale anisotropo (cristallo liquido), è posta una lamina di materiale isotropo trasparente (come ad esempio il vetro) di indice di rifrazione  $n_m$  e di spessore  $d_m$ , con facce otticamente piane e parallele (Figura 2.3).

Si può dimostrare [1] che i coefficienti di riflessione per il raggio n. 3 di Figura 2.3, nel caso di incidenza normale, sono:

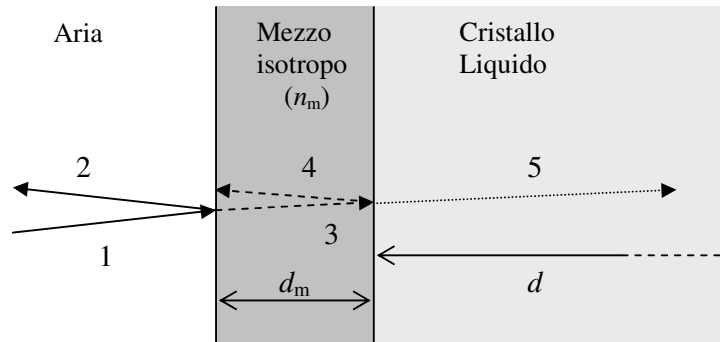
$$r_{\perp} = \frac{n_m - n_{\perp}}{n_m + n_{\perp}}; \quad r_{\parallel} = \frac{n_m - n(\theta_0)}{n_m + n(\theta_0)} \quad (2.9)$$

dove  $r_{\perp}$  è il coefficiente di riflessione per la polarizzazione ordinaria e  $r_{\parallel}$  è il coefficiente di riflessione per la polarizzazione straordinaria.

I raggi n. 2 e 4 di Figura 2.3 hanno un cammino ottico diverso e, fuori dal materiale, fanno interferenza. Sia  $r_{am}$  il coefficiente di riflessione per l'interfaccia aria-mezzo isotropo. Un'onda che incide normalmente sul sistema rappresentato in Figura 2.3 ha i seguenti coefficienti di riflessione, rispettivamente per la componente ordinaria e quella straordinaria:

$$\begin{aligned} r_{\perp}^{tot} &= r_{am} + r_{\perp} e^{i\delta_m} \\ r_{\parallel}^{tot} &= r_{am} + r_{\parallel} e^{i\delta_m} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove  $\delta_m$  è lo sfasamento tra il raggio n. 4 e il raggio n. 2 e vale  $\delta_m = (4\pi n_m d_m) / \lambda_0$ . Le relazioni (2.10) valgono nel caso in cui le riflessioni multiple siano trascurabili.



**Figura 2.3:** Un materiale isotropo, di spessore  $d_m$  e indice di rifrazione  $n_m$ , è posto a contatto con il cristallo liquido. In figura sono visibili l'onda incidente (1) e l'onda riflessa sull'interfaccia aria-mezzo isotropo (2), l'onda trasmessa nel mezzo isotropo (3) e quella riflessa dall'interfaccia mezzo isotropo-CL (4) e, infine, l'onda trasmessa nel CL (5). Sono state omesse le riflessioni multiple.

È importante sottolineare che, nelle ordinarie condizioni sperimentali, la struttura dell'interfaccia fra la lamina isotropa e il cristallo liquido è più

complicata. In particolare, sottili strati di materiali isotropi (ITO, polyimide...) sono presenti sulla superficie della lamina isotropa che è in contatto con il cristallo liquido. In questo caso, i coefficienti di riflessione  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  non sono più espressi dalle semplici relazioni (2.9), ma dipendono dalle caratteristiche degli strati sottili. Inoltre,  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  sono, generalmente, grandezze complesse. Per tale motivo, nel seguito, scriveremo tutte le relazioni nel caso generale in cui  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  sono numeri complessi.

Il fatto che l'onda straordinaria e quella ordinaria abbiano due coefficienti di riflessione diversi suggerisce un modo semplice per misurare l'angolo azimutale  $\phi_s$  del direttore in superficie, come sarà descritto nel §2.2.1.

## 2.2 Metodo di misura del coefficiente di energia dell'ancoraggio azimutale in luce riflessa [3-6]

Supponiamo di aver misurato l'angolo azimutale  $\phi_s$  del direttore sulla superficie individuata dall'interfaccia substrato-CLN, senza aver applicato campi elettrici o magnetici. In tali condizioni, il direttore coincide con l'asse facile (cfr §1.4). Il coefficiente  $W_a$  di energia dell'ancoraggio azimutale (cfr (1.19)) può essere determinato utilizzando la procedura descritta qui di seguito:

- Applichiamo, sul campione, un campo magnetico (o elettrico) noto. Esso genera un momento di forza che crea una distorsione di *twist* nel volume, generando, sull'interfaccia, un momento di forza elastico che ruota il direttore sulla superficie finché il momento elastico non è bilanciato dal momento di forza dovuto all'ancoraggio. Se abbiamo applicato un campo magnetico  $H$  ad un angolo  $\beta$  con l'asse facile, l'equilibrio tra i due momenti di forza è (cfr (1.32)):

$$\sqrt{K_{22}\mu_0\chi_a}H \sin(\beta) = W_a \delta\phi_s \quad (2.11)$$

da cui otteniamo la rotazione  $\delta\phi_s$  del direttore in superficie (cfr (1.35)):

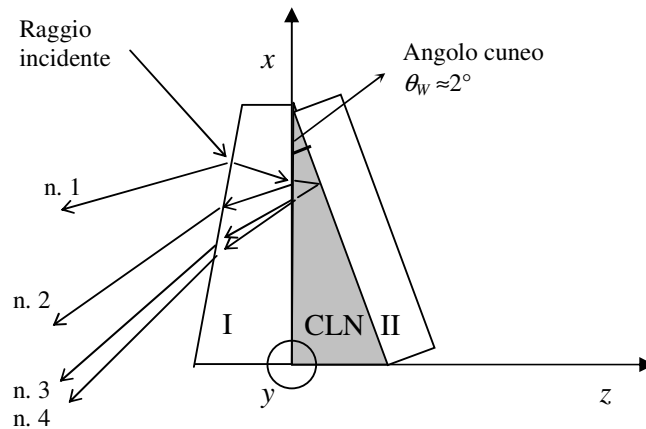
$$\delta\phi_s = \frac{\sqrt{K_{22}\mu_0\chi_a}H \sin(\beta)}{W_a} = \frac{d_e}{\xi_H} \sin(\beta) \quad (2.12)$$

dove  $K_{22}$  è la costante elastica di *twist*,  $\chi_a$  è l'anisotropia della suscettività magnetica e  $W_a$  è il coefficiente di energia di ancoraggio azimutale. Nell'ultimo termine a destra nell'equazione (2.12), la rotazione  $\delta\phi_s$  è espressa in funzione della *lunghezza di estrapolazione*  $d_e$  (definita in (1.31)) e della *lunghezza coerenza magnetica*  $\xi_H$  (definita in (1.26)).

- Misurando la rotazione  $\delta\phi_s$  e conoscendo le costanti del cristallo liquido alla temperatura alla quale abbiamo operato e le altre grandezze in gioco ( $\beta$ ,  $H$ ), possiamo ricavare il coefficiente di ancoraggio azimutale  $W_a$ .

### 2.2.1 Metodo riflessometrico con un solo polarizzatore rotante [3-6]

Consideriamo un fascio monocromatico che si propaga lungo l'asse  $z$  e che è polarizzato linearmente. Il fascio incide su un sistema costituito da due lamine isotrope tra le quali viene inserito un cristallo liquido nematico. Una rappresentazione schematica della cella e dei fasci riflessi dalle varie interfacce è mostrata in Figura 2.4. Per convenienza di rappresentazione, tutti gli angoli rappresentati in Figura 2.4 sono stati esagerati e il raggio incidente è disegnato non parallelo all'asse  $z$ . A differenza del sistema rappresentato in Figura 2.3, in cui la lamina isotropa aveva le facce parallele, ne utilizziamo una con facce non parallele. In questo modo il fascio riflesso dall'interfaccia aria-mezzo isotropo è separato da quello riflesso dall'interfaccia mezzo isotropo-CLN (in Figura 2.4, sono rispettivamente i fasci n. 1 e n. 2). Inoltre, il cristallo liquido è contenuto fra due piastre isotrope che formano, fra di loro, un angolo  $\theta_w$  di circa  $2^\circ$ . In tal modo, i fasci riflessi dalla seconda interfaccia CLN-mezzo isotropo (raggi n. 3 e n. 4 in Figura 2.4) sono anch'essi separati dai fasci n. 1 e n. 2. Denotiamo con  $x$  e  $y$  gli assi ortogonali nel piano dell'interfaccia e assumiamo che il direttore sia orientato uniformemente ovunque, con orientamento descritto dagli angoli zenitale  $\theta_s$  e azimutale  $\phi_s$ . Le superfici interne delle due piastre isotrope sono trattate in modo da indurre un ancoraggio dello stesso tipo e allineamenti del direttore tra loro paralleli. Nei metodi riflessometrici solo l'interfaccia tra la lamina I in Figura 2.4 e il cristallo liquido è rilevante.



**Figura 2.4:** *Visione schematica della cella del CLN e dei raggi ottici riflessi dalle varie interfacce. Un cuneo di CLN è posto tra due lamine solide, trasparenti e isotrope (I e II). La lamina I ha le facce non parallele, così da separare i fasci riflessi alle sue due superfici (raggi n.1 e n.2). Gli angoli sono stati volutamente esagerati e il fascio incidente è stato disegnato non parallelo all'asse  $z$  per rendere più chiara la figura.*

Grazie all'uso della lamina con facce non parallele e della forma a cuneo della cella, siamo in grado di prelevare direttamente il fascio riflesso dall'interfaccia mezzo isotropo-CLN (raggio n. 2 di Figura 2.4), che contiene l'informazione sull'angolo azimutale del direttore.

A rigore, anche se la radiazione incidente si propaga lungo l'asse  $z$  (perpendicolare all'interfaccia lamina I-cristallo liquido), i fasci 1 e 2 di Figura 2.4 formano angoli diversi da zero con l'interfaccia aria-lamina I. Di conseguenza, i coefficienti di riflessione e di trasmissione da questa interfaccia isotropa non sono isotropi. Ne consegue che questa interfaccia produce una piccola modifica delle polarizzazioni dei fasci trasmessi o riflessi. Utilizzando le note espressioni dei coefficienti di riflessione e trasmissione nell'interfaccia fra i due dielettrici isotropi [1], è possibile, però, dimostrare che gli effetti di anisotropia dei coefficienti di riflessione e trasmissione sono del tutto trascurabili quando, come nel caso in esame, gli angoli di incidenza sono tutti inferiori a pochi gradi. Per tale motivo, nel seguito trascureremo questi piccoli effetti e assumeremo che i coefficienti di trasmissione attraverso l'interfaccia aria-lamina I sono isotropi.

Sia  $\phi_p$  l'angolo tra l'asse del polarizzatore P e l'asse  $x$ . Come descritto precedentemente, possiamo scomporre il campo elettrico incidente nella componente straordinaria ( $E_{||}$ ) e in quella ordinaria ( $E_{\perp}$ ). Dopo la riflessione dall'interfaccia mezzo isotropo-CLN, le componenti diventano [7]:

$$\begin{aligned} E_{||}^r &= r_{||} E_0' \cos(\phi_p - \phi_s) \\ E_{\perp}^r &= r_{\perp} E_0' \sin(\phi_p - \phi_s) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove  $E_0'$  è l'ampiezza del campo trasmesso all'interno della lamina trasparente e  $r_{||}$  e  $r_{\perp}$  sono i coefficienti di riflessione. Un metodo molto semplice e diretto per misurare l'angolo azimutale  $\phi_s$  del direttore in superficie consiste nel far ruotare il polarizzatore P con velocità angolare costante  $\omega$ . L'angolo di polarizzazione  $\phi_p$  diventa una funzione lineare del tempo:  $\phi_p = \phi_{iniz} + \omega t$ , dove  $\phi_{iniz}$  è l'angolo dell'asse ottico del polarizzatore rispetto l'asse  $x$ , all'istante  $t = 0$ . Con semplici passaggi algebrici, si dimostra che l'intensità del fascio riflesso ( $I^r = \gamma E^r E^{r*}$ ) è una funzione periodica con frequenza angolare  $2\omega$  [7]:

$$I^r(t) = I_0 \left[ a_0 + b_0 \cos 2(\omega t + \phi_{iniz} - \phi_s) \right] \quad (2.14)$$

dove  $I_0$  è l'intensità del fascio incidente<sup>1</sup> e:

$$\begin{aligned} a_0 &= (|r_{\perp}|^2 + |r_{||}|^2) / 2 \\ b_0 &= (|r_{||}|^2 - |r_{\perp}|^2) / 2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Quindi, l'angolo azimutale  $\phi_s$  del direttore può essere ottenuto dalla misura della costante di fase del segnale oscillante dell'equazione (2.14).

L'intensità (2.14) vale per il caso in cui il direttore sia orientato uniformemente nel campione. In queste condizioni, il direttore è dovunque parallelo all'asse facile e, perciò,  $\phi_s = \phi_0$  in (2.14). Quando è applicato un campo esterno per misurare l'energia di ancoraggio, compare una

---

<sup>1</sup> A rigore  $I_0$  è uguale all'intensità del fascio incidente moltiplicata per il prodotto dei coefficienti di trasmissione  $t$  (aria-lamina I) e  $t'$  (lamina I-aria).



distorsione del direttore nel volume. In questo caso, il calcolo dell'intensità riflessa non può essere più fatto in modo analitico ma è necessario utilizzare una complessa procedura numerica sviluppata da Berreman [8]. Tali calcoli sono stati eseguiti recentemente dal nostro gruppo [7]. È stato dimostrato che, quando è applicato un campo magnetico  $H$  lungo l'asse  $x$ , la (2.14) diventa:

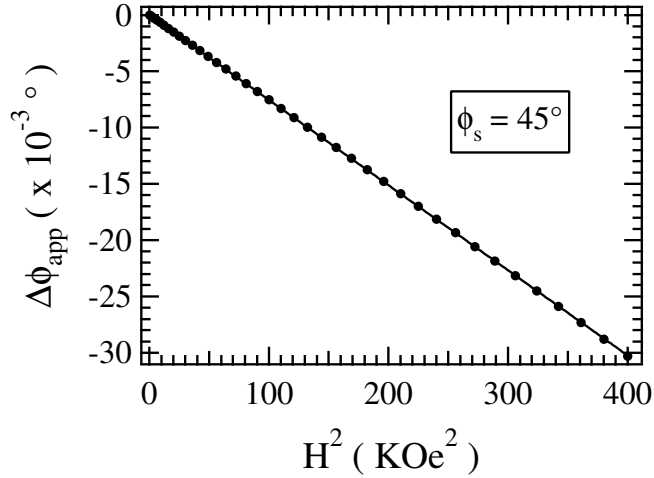
$$I^r(t) = I_0 [a_0' + b_0' \cos 2(\omega t + \phi_{iniz} - \phi_s - \Delta\phi_{app})] \quad (2.14')$$

dove  $a_0'$  e  $b_0'$  sono coefficienti il cui valore dipende dall'intensità del campo applicato,  $\phi_s$  rappresenta il nuovo valore dell'angolo del direttore in superficie dopo la rotazione  $\delta\phi_s$  ( $\phi_s = \phi_0 - \delta\phi_s$ ) e  $\Delta\phi_{app}$  è il principale effetto spurio della distorsione indotta dal campo. Come si deduce dall'analisi della (2.14'),  $\Delta\phi_{app}$  simula una rotazione apparente del direttore sull'interfaccia che si va ad aggiungere alla rotazione effettiva  $\delta\phi_s$ . Un'espressione analitica approssimata di  $\Delta\phi_{app}$  è [7]:

$$\Delta\phi_{app} = \frac{\lambda_0^2}{(\bar{n})^2 \xi_H^2} (b_1 \sin 2\phi_s) \quad (2.16)$$

dove  $b_1$  è un coefficiente adimensionale, dipendente soltanto dagli indici di rifrazione del CLN e della lamina e  $\bar{n} = (n_{||} + n_{\perp})/2$ . Tipicamente,  $b_1 \approx 29$ . Osserviamo, dalla (2.16), che  $\Delta\phi_{app}$  è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza di coerenza magnetica  $\xi_H$  e che, per la definizione di  $\xi_H$ , è proporzionale al quadrato del campo magnetico  $H$ . L'andamento della rotazione apparente  $\Delta\phi_{app}$ , in funzione del quadrato del campo magnetico, è riportato in Figura 2.5. Osservando la Figura 2.5, possiamo fare le seguenti considerazioni:

- 1) La rotazione apparente  $\Delta\phi_{app}$  del direttore dipende quadraticamente dal campo  $H$  e, perciò, è *ben distinguibile* dalla rotazione reale del direttore (cfr (2.12)), che è lineare in  $H$ .
- 2)  $\Delta\phi_{app}$  si mantiene inferiore a  $0.01^\circ$  per campi magnetici sotto i 10 kOe ( $\equiv 7.958 \cdot 10^5$  As/m, corrispondente ad un campo di induzione magnetica  $B = 1$  T). I valori di  $\Delta\phi_{app}$  riportati in Figura 2.5 corrispondono alla massima rotazione apparente, perché calcolati con un angolo di  $45^\circ$  tra asse facile e campo. Dalla espressione analitica approssimata di  $\Delta\phi_{app}$  (2.16), possiamo vedere che l'angolo di  $45^\circ$  dà il massimo effetto spurio. Come vedremo nel prossimo capitolo, nelle nostre condizioni sperimentali  $H$  raggiunge, al più,  $6.179 \cdot 10^5$  As/m ( $B = 0.776$  T) e l'asse facile forma un angolo di circa  $80^\circ$  rispetto al campo. In queste condizioni la rotazione apparente  $\Delta\phi_{app}$  del direttore, dovuta alla distorsione, risulta inferiore a  $0.002^\circ$  ed è del tutto trascurabile rispetto ai tipici rumori sperimentali presenti in questo tipo di misure.



**Figura 2.5:** In questa figura è riportato l'andamento di  $\Delta\phi_{app}$  in funzione di  $H^2$  quando l'angolo del direttore in superficie, rispetto all'asse  $x$  (direzione del campo magnetico), è  $\phi_s = 45^\circ$ . I parametri per il CLN (5CB, a temperatura  $T=21^\circ\text{C}$ ) utilizzati nel calcolo numerico sono  $n_{||} = 1.717$ ,  $n_{\perp} = 1.528$ ,  $K_{22} = 3.93 \cdot 10^{-12}$  N e  $\chi_a = 1.34 \cdot 10^{-6}$ . Assumiamo che l'angolo tra l'asse facile e il campo sia di  $45^\circ$ . L'indice di rifrazione del mezzo isotropo è  $n_m = 1.51$  e la lunghezza d'onda del fascio incidente è  $\lambda_0 = 632.8$  nm.

Nel seguito considereremo sempre trascurabile la rotazione apparente  $\Delta\phi_{app}$  dovuta alla distorsione di twist. In queste condizioni, l'intensità del fascio riflesso in presenza della distorsione di twist è data da un segnale oscillante di pulsazione  $2\omega$ , con una costante di fase che dipende solamente dal valore dell'angolo del direttore in superficie  $\phi_s$  (eq. (2.14')) con  $\Delta\phi_{app} = 0$ ). Dunque, l'angolo azimutale del direttore in superficie, in presenza del campo magnetico, può essere ottenuto dalla misura diretta della costante di fase del segnale oscillante.

Il metodo riflessometrico descritto fino ad ora è stato proposto dal nostro gruppo alcuni anni fa [5]. Il metodo è estremamente semplice e diretto. Infatti, la misura dell'angolo azimutale  $\phi_s$  del direttore si riduce alla semplice misura della fase di un segnale oscillante (2.14'). Inoltre, per la misura di  $\phi_s$ , non è necessaria la conoscenza dei parametri caratteristici del substrato isotropo e del cristallo liquido, che influenzano solamente l'ampiezza  $b_0$  del segnale oscillante in (2.14'). Infine, gli effetti spuri dovuti alla distorsione del direttore ( $\Delta\phi_{app} < 0.002^\circ$ ) sono almeno tre ordini di grandezza inferiori a quelli presenti nei metodi convenzionali utilizzati in altri laboratori, che sfruttano le proprietà della radiazione trasmessa dal cristallo liquido (ad esempio, cfr [9-11]).

Questo metodo, però, ha alcuni inconvenienti:

- L'intensità (2.14') della radiazione riflessa dall'interfaccia lamina isotropa-CLN è normalmente molto piccola. Questo fa sì che rumori dovuti alla presenza di luce diffusa possono dare un contributo non sempre trascurabile.
- I raggi riflessi dalle varie interfacce della cella devono essere separati spazialmente per misurare solamente l'intensità del raggio riflesso dall'interfaccia mezzo isotropo-CLN (raggio n. 2 di Figura

2.4). Ciò è ottenuto utilizzando due lamine isotrope di cui una, quella dalla parte del fascio incidente, sia con le facce non parallele. Questo tipo di lamina non è facilmente reperibile ed è piuttosto costosa.

- A causa degli inevitabili effetti spuri (diffusione di luce, disomogeneità del polarizzatore rotante, anisotropia residua, seppur minima, della lamina trasparente...), l'accuratezza di questo metodo di misura dell'angolo azimutale dipende fortemente dal contrasto  $\delta_c = b_0'/a_0' \approx b_0/a_0$  (cfr (2.14')) ed è molto ridotta nel caso che  $|\delta_c|$  sia molto minore di 1. Perciò, l'accuratezza del metodo dipende pesantemente dalle caratteristiche ottiche della lamina isotropa e, quindi, limita il tipo di mezzi che possono essere utilizzati. Ad esempio, se la lamina ha un indice di rifrazione pari a  $n_m = (n_{\perp} \cdot n(\theta_0))^{1/2}$ , la quantità  $b_0$  in equazione (2.14) diviene nulla e non è possibile alcuna misura di angolo azimutale con questo metodo riflessometrico.

Per una discussione accurata di questi aspetti, rimandiamo alla referenza [7].

### 2.2.2 Metodo riflessometrico con due polarizzatori incrociati rotanti

Recentemente [7], è stato proposto un metodo alternativo per evitare l'uso di lamine con facce non parallele ed assicurare il massimo contrasto ( $|\delta_c|=1$ ) indipendentemente dal tipo di lamina usato.

Come prima, facciamo incidere un fascio monocromatico sul campione dopo avergli fatto attraversare un polarizzatore P. Le piastre che racchiudono il nematico sono entrambe con superfici parallele e formano tra di loro un cuneo con un angolo di apertura  $\theta_w \approx 2^\circ$ . Nel caso di incidenza normale, i due raggi, riflessi rispettivamente dall'interfaccia aria-mezzo isotropo e mezzo isotropo-CLN, si sovrappongono, ma il fascio riflesso dalla interfaccia aria-mezzo isotropo (n. 1 in Figura 2.4) mantiene la stessa polarizzazione del fascio incidente, a causa dell'isotropia dell'interfaccia. Se, quindi, facciamo passare i raggi riflessi attraverso un analizzatore A, incrociato con P, sarà possibile bloccare il raggio n. 1. Poiché, come nel metodo precedente, il polarizzatore P ruota ( $\phi_p = \phi_{niz} + \omega t$ ), anche A dovrà ruotare solidalmente con P per mantenersi ad esso incrociato.

Osserviamo che l'analizzatore bloccherà anche il fascio riflesso dall'interfaccia mezzo isotropo-CLN (raggio n. 2 di Figura 2.4) solo quando la polarizzazione del fascio riflesso sarà uguale a quella del fascio incidente data da P. Questo avviene quattro volte su un angolo giro e cioè quando l'asse di P si trova parallelo o ortogonale alla proiezione del direttore sull'interfaccia (cfr §2.1). In ogni altro caso, questa onda riflessa ha una polarizzazione leggermente diversa da quella incidente a causa dei diversi coefficienti di riflessione ( $r_{\parallel}$  e  $r_{\perp}$ ) e sarà trasmessa attraverso l'analizzatore A.

Partendo dalle equazioni (2.13), ricaviamo l'intensità del raggio dopo l'analizzatore [7]:

$$I^r(t) = I_0 c_0 [1 - \cos 4(\omega t + \phi_{iniz} - \phi_s)] \quad (2.17)$$

dove  $c_0 = (|r_{\perp} - r_{\parallel}|^2) / 8$ .

Osserviamo che, adesso, l'intensità del fascio riflesso è una funzione periodica del tempo con frequenza angolare  $4\omega$ . Anche in questo caso l'angolo azimutale del direttore può essere ottenuto direttamente dalla misura della costante di fase del segnale oscillante.

Sottolineiamo che il contrasto  $|\delta_c|$  è sempre uguale ad 1 a prescindere dalle proprietà ottiche della lamina e non è più necessario l'uso di lamine a facce non parallele. Queste caratteristiche fanno sì che il metodo riflessometrico con polarizzatori incrociati sia più facilmente applicabile rispetto al metodo con un solo polarizzatore, descritto precedentemente (cfr §2.2.1). Possiamo, inoltre, dimostrare che la quantità  $|r_{\perp} - r_{\parallel}|^2$ , proporzionale all'ampiezza dell'intensità (2.17) del segnale dopo l'analizzatore, dipende poco dai parametri ottici della lamina isotropa e dipende, invece, dall'anisotropia degli indici di rifrazione del cristallo liquido.

Analogamente al metodo con un solo polarizzatore, l'applicazione di un campo esterno, che determina una distorsione di *twist* nel volume e una rotazione del direttore sull'interfaccia, altera leggermente i coefficienti di riflessione, cosicché l'espressione (2.17) per l'intensità del segnale dopo l'analizzatore incrociato non è più esatta. Il principale effetto della distorsione di *twist* consiste, come nell'altro metodo, in una rotazione superficiale apparente  $\Delta\phi_{app}$  del direttore che si va ad aggiungere alla rotazione reale  $\delta\phi_s$ . Possiamo dimostrare [7] che le differenze relative tra la rotazione spuria nel metodo con un solo polarizzatore e la rotazione spuria nel metodo con due polarizzatori incrociati sono inferiori a  $10^{-3}$ . Perciò, anche per questo secondo metodo, valgono le stesse considerazioni riguardanti  $\Delta\phi_{app}$ . In particolare, nelle nostre condizioni sperimentali, il valore di  $\Delta\phi_{app}$  è inferiore a  $0.002^\circ$  ed è, quindi, del tutto trascurabile.

### 2.3 Metodo di misura dell'angolo azimutale in superficie in luce trasmessa

I metodi standard per la misura dell'angolo azimutale sfruttano le proprietà di trasmissione di un fascio da una lamina twistata e si basano sul *teorema adiabatico*. Esso afferma che, nel caso la lunghezza di coerenza magnetica  $\xi_H$  (o elettrica  $\xi_E$ ) sia molto maggiore della quantità  $\lambda_0 / (n(\theta_0) - n_{\perp})$  (per il cristallo liquido 5CB a temperatura ambiente, ciò equivale a  $\xi_H \gg 5\lambda_0$ ), un'onda incidente straordinaria, cioè polarizzata parallelamente alla proiezione del direttore sull'interfaccia, si propaga con velocità di fase  $c/n(\theta_0)$  all'interno del materiale e il suo vettore polarizzazione mantiene la sua posizione rispetto al direttore, ruotando eventualmente con esso in modo adiabatico. Analogamente, se incide un'onda ordinaria, cioè polarizzata perpendicolarmente alla proiezione del direttore sull'interfaccia, essa si propaga nel materiale con velocità di fase  $c/n_{\perp}$  e il

suo vettore polarizzazione si mantiene ortogonale, punto per punto, all'orientazione ortogonale del direttore. Il teorema adiabatico vale quando il direttore è orientato uniformemente nel campione o ha piccole distorsioni con lunghezza caratteristica  $\xi_H$  molto più grande della lunghezza d'onda  $\lambda_0$  del fascio incidente. Viceversa, quando applichiamo campi troppo elevati che inducono una distorsione con lunghezza caratteristica  $\xi_H$  confrontabile con  $\lambda_0$ , si avranno deviazioni sensibili dal teorema adiabatico. Il teorema adiabatico suggerisce un metodo sperimentale semplice per misurare l'angolo azimutale di superficie, quando l'ancoraggio è sufficientemente debole:

- 1) Poniamo un polarizzatore P e un analizzatore A prima e dopo il campione in assenza di campi esterni (Figura 2.1). Ruotiamo P finché il suo asse non sia parallelo al direttore. Ruotiamo A in modo che il suo asse sia incrociato perpendicolarmente con quello di P. In queste condizioni, l'intensità del raggio trasmesso dopo l'analizzatore A è nulla (cfr equazione (2.8) con  $\phi_p = 0$ ).
- 2) Applichiamo un campo, ad esempio magnetico, di bassa intensità ( $\xi_H \gg \lambda_0$ ). Il direttore nel volume subisce una distorsione di *twist* e, su entrambe le superfici, ruota di un angolo  $\delta\phi_s$  (2.12). In tali condizioni, la polarizzazione incidente non è più straordinaria e, quindi, l'intensità del raggio trasmesso dopo A non è più nulla (cfr (2.8) con  $\phi_p \neq 0$ ).
- 3) Ruotiamo la cella o, equivalentemente, i due polarizzatori P ed A mantenendoli incrociati, finché l'intensità trasmessa non ritorni nulla. Siamo tornati nelle condizioni in cui l'onda incidente è solo straordinaria. Questa, propagandosi all'interno del cristallo liquido, mantiene la polarizzazione parallela al direttore per il teorema adiabatico; in particolare, l'onda esce con la polarizzazione parallela al direttore sulla seconda interfaccia (CLN-piastra isotropa). Poiché, per simmetria, il direttore sulla seconda interfaccia è parallelo al direttore sulla prima interfaccia (piastra isotropa-CLN), la polarizzazione dell'onda uscente dal cristallo liquido è ancora parallela alla direzione dell'asse del polarizzatore P e, quindi, è ortogonale all'analizzatore. L'angolo di cui abbiamo ruotato la cella (o i polarizzatori) è proprio  $\delta\phi_s$ .

Questo metodo in trasmissione, apparentemente molto semplice, diviene impraticabile per ancoraggi forti ( $W_a \geq 10^{-5} \text{J/m}^2$ ). Infatti, per alti ancoraggi la lunghezza di estrapolazione  $d_e$  è piccola e, quindi, per poter provocare una rotazione apprezzabile  $\delta\phi_s$  del direttore in superficie, dovremmo applicare campi elevati in modo da rendere la lunghezza di coerenza magnetica  $\xi_H$  confrontabile con  $d_e$  (cfr (2.12)). Tuttavia, se  $\xi_H$  è troppo piccola cade l'ipotesi del teorema adiabatico, che prevede  $\xi_H \gg 5\lambda_0$ .

Ad esempio, se per un campione abbiamo una lunghezza di estrapolazione  $d_e$  di circa  $0.1 \mu\text{m}$ , vorremmo che  $\xi_H$  fosse, al più,  $1 \mu\text{m}$ , altrimenti il loro rapporto, proporzionale alla rotazione  $\delta\phi_s$ , comincerebbe ad essere troppo piccolo per essere misurato. Se, però, la lunghezza d'onda  $\lambda_0$  del raggio

incidente è circa  $0.6 \mu\text{m}$  (intorno al rosso), abbiamo che la quantità  $5\lambda_0 = 3\mu\text{m}$  diventa maggiore di  $\xi_H$ . In tal caso, l'ipotesi adiabatica non è più verificata e il metodo in trasmissione non può essere utilizzato.

Oldano e altri [12-14] hanno dimostrato che il teorema adiabatico corrisponde all'*ordine zero* dello sviluppo in serie della matrice di trasmissione di Berreman [8], nel parametro perturbativo  $\alpha = \lambda_0 / (2\pi \cdot \Delta n \cdot \xi_H)$ , dove  $\Delta n = n_{||} - n_{\perp}$  è l'anisotropia degli indici di rifrazione del CLN. Gli ordini successivi corrispondono a una deviazione sempre maggiore dal teorema adiabatico. Essi hanno dimostrato che la correzione al prim'ordine non è trascurabile nella maggior parte dei casi. Tale correzione simula una rotazione superficiale spuria del direttore che dipende fortemente dallo sfasamento  $\delta = (2\pi \cdot \Delta n \cdot d) / \lambda_0$  tra il raggio straordinario e ordinario trasmessi (ricordiamo che  $d$  è lo spessore della lamina).

Recentemente [15], il nostro gruppo ha proposto una particolare configurazione sperimentale che riduce considerevolmente gli effetti di deviazione dall'adiabaticità e che permette, in via di principio, di misurare ancoraggi anche molto forti con il metodo in trasmissione. Per comprendere il principio del metodo è, però, necessario rivedere gli aspetti teorici della propagazione di un'onda elettromagnetica in un cristallo liquido nematico twistato. Riporteremo di seguito le espressioni teoriche fondamentali, rimandando alla referenza [15] per una discussione più dettagliata.

### 2.3.1 Trasmissione di un raggio monocromatico in un CLN twistato. Cenni alla teoria di Berreman e alla teoria di Oldano

D'ora in avanti, per semplicità, supporremo che il direttore sia parallelo all'interfaccia, cioè  $\theta_0$  sia  $90^\circ$  nella (2.3). Un metodo matriciale per studiare la trasmissione e la riflessione su di un mezzo anisotropo è stato proposto, diversi anni fa, da Berreman [8]. Consideriamo un'onda elettromagnetica piana, di lunghezza d'onda  $\lambda_0$ , che si propaga lungo il verso positivo dell'asse  $z$  e incide normalmente su di una lamina nematica, racchiusa tra due superfici, una posta a  $z = -d/2$  e l'altra a  $z = d/2$ . Nel nostro caso c'è una distorsione di puro *twist*: il direttore giace ovunque nel piano  $xy$  ed il suo andamento, all'interno del campione, è descritto da  $\mathbf{n} = (\cos\phi(z), \sin\phi(z), 0)$ , dove  $\phi(z)$  è l'angolo locale del direttore rispetto all'asse  $x$  (angolo *azimutale*).

Indichiamo con  $E_x$  e  $E_y$  le componenti  $x$  e  $y$  delle ampiezze del campo elettrico e, analogamente, indichiamo con  $H_x$  e  $H_y$  le ampiezze del campo magnetico dell'onda incidente. Il campo elettromagnetico è così descritto, in ogni punto del nematico, dal vettore  $\Psi(z) = (E_x, H_y, E_y, -H_x)$ . Adesso dividiamo idealmente il campione in strati molto sottili di spessore  $h$ , con  $h$  molto più piccolo della lunghezza d'onda  $\lambda_0$ . Se  $h$  è sufficientemente piccolo, possiamo assumere che il direttore sia orientato uniformemente all'interno di tale strato. Berreman ha dimostrato che  $\Psi(z+h)$  è dato da:

$$\Psi(z+h) = \bar{\mathbf{P}}(z, h) \Psi(z) \quad (2.18)$$

dove  $\bar{\mathbf{P}}(z, h)$  è la matrice 4x4 che descrive la trasmissione attraverso lo strato di spessore  $h$  ed è data da:

$$\bar{\mathbf{P}}(z, h) = \exp(i2\pi h \bar{\mathbf{D}}(z) / \lambda_0) \quad (2.19)$$

La matrice  $\bar{\mathbf{D}}(z)$  dipende dagli indici di rifrazione  $n_{\parallel}$  e  $n_{\perp}$  del cristallo liquido nematico e dall'angolo azimutale  $\phi(z)$  del direttore [8].

Per il calcolo numerico di  $\bar{\mathbf{P}}(z, h)$ , risulta conveniente esprimere  $\bar{\mathbf{P}}(z, h)$  con lo sviluppo troncato di Taylor:

$$\bar{\mathbf{P}}(z, h) = \mathbf{1} + i(2\pi h / \lambda_0) \bar{\mathbf{D}}(z) - (2\pi h / \lambda_0)^2 \bar{\mathbf{D}}(z) \bar{\mathbf{D}}(z) / 2 + \dots \quad (2.20)$$

Partendo da  $z = -d/2$  e iterando la (2.18) per ogni strato  $h$  all'interno del campione, otteniamo il vettore  $\Psi(d/2)$  dell'onda uscente dal nematico in funzione del vettore che descrive l'onda incidente  $\Psi(-d/2)$ :

$$\Psi(d/2) = \underbrace{\bar{\mathbf{P}}(d/2-h, h) \bar{\mathbf{P}}(d/2-2h, h) \dots \bar{\mathbf{P}}(-d/2, h)}_{= \bar{\mathbf{F}}(d/2, -d/2)} \Psi(-d/2) \quad (2.21)$$

Una volta calcolata la matrice di trasmissione  $\bar{\mathbf{F}}(d/2, -d/2)$ , le ampiezze del raggio trasmesso e riflesso possono essere scritte esplicitamente in funzione degli elementi della matrice  $\bar{\mathbf{F}}(d/2, -d/2)$ , secondo le procedure esposte nella referenza [8].

In genere, il calcolo dei coefficienti di riflessione e trasmissione non può essere effettuato analiticamente. Tuttavia, la procedura di Berreman permette un semplice approccio numerico. In primo luogo, si calcola la matrice  $\bar{\mathbf{D}}(z)$ , dopodiché si calcola la matrice  $\bar{\mathbf{P}}(z, h)$  sfruttando lo sviluppo troncato di Taylor (2.20) fermandosi al termine del sesto ordine. Quindi, si calcola numericamente la matrice di trasmissione  $\bar{\mathbf{F}}(d/2, -d/2)$ . Con questa procedura si ottiene una rapida convergenza e risultati numerici molto accurati (precisione relativa superiore a  $10^{-9}$ ).

Alcuni anni fa, Oldano e altri [12-14] hanno proposto un approccio perturbativo per descrivere la trasmissione di luce in un materiale nematico twistato, soggetto ad un campo magnetico  $H$ . Il parametro perturbativo è:

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{2\pi\Delta n} \frac{1}{\xi_H} \equiv \frac{1}{\Delta k} \frac{1}{\xi_H} \quad (2.22)$$

dove abbiamo chiamato, per semplicità,  $\Delta k = (2\pi\Delta n) / \lambda_0 = 2\pi(n_{\parallel} - n_{\perp}) / \lambda_0$ , che esprime l'anisotropia del vettore d'onda.

Trascurando l'accoppiamento tra le riflessioni e le trasmissioni multiple, il campo elettrico trasmesso può essere descritto usando le matrici di Jones 2x2 [16]. Le equazioni per il campo trasmesso sono scritte in un sistema di riferimento che ruota solidalmente con il direttore. Scegliamo come vettori di base  $\mathbf{b}_{||} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$  e  $\mathbf{b}_{\perp} \left( \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$  in modo che rappresentino, rispettivamente, i campi elettrici straordinario e ordinario che ruotano solidalmente con il direttore durante la loro propagazione all'interno del cristallo liquido. Le ampiezze di tali campi non sono unitarie, ma sono scelte in modo tale che i raggi straordinario e ordinario abbiano la stessa intensità. Ciò significa che i moduli di  $\mathbf{b}_{||}$  e  $\mathbf{b}_{\perp}$  sono proporzionali a  $1/\sqrt{n_{||}}$  e  $1/\sqrt{n_{\perp}}$ .

Trascurando le riflessioni alle due interfacce che delimitano il CLN, la matrice di trasmissione di Jones, indicata con  $\bar{\mathbf{T}}(d/2, -d/2)$ , espressa al prim'ordine nel parametro  $\alpha$ , è [12-14]:

$$\bar{\mathbf{T}}(d/2, -d/2) = \exp(ik_a d) \begin{bmatrix} \exp(i\delta/2) & it \\ it^* & \exp(-i\delta/2) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

dove il simbolo \* indica il complesso coniugato,  $k_a = \pi(n_{||} + n_{\perp})/\lambda_0$  è il vettore d'onda medio,  $\delta$  è lo sfasamento tra il raggio straordinario e quello ordinario (cfr (2.5) con  $n(\theta_0) = n_{||}$ ) e  $t$  è un parametro perturbativo così definito:

$$t = -i\eta_1 \int_{-d/2}^{d/2} \exp(-iz\Delta k) \frac{d\phi}{dz} dz \quad (2.24)$$

dove  $\eta_1 = \left[ \sqrt{(n_{||}/n_{\perp})} + \sqrt{(n_{\perp}/n_{||})} \right] / 2 \approx 1$ .

Integrando per parti la (2.24), essa diviene:

$$t = \frac{\eta_1}{\Delta k} \left[ \exp(-iz\Delta k) \frac{d\phi}{dz} \Big|_1^2 - \frac{i}{\Delta k} \exp(-iz\Delta k) \frac{d^2\phi}{dz^2} \Big|_1^2 + \dots \right] \quad (2.25)$$

dove i numeri 1 e 2 indicano le superfici delle due pareti che delimitano il cristallo liquido, poste, rispettivamente, a  $z = -d/2$  e  $z = d/2$ .

Poiché  $\frac{d\phi}{dz} \approx \frac{\Delta\phi}{\xi_H}$  e  $\frac{d^2\phi}{dz^2} \approx \frac{\Delta\phi}{\xi_H^2}$ , solo il primo contributo della (2.25) è proporzionale a  $\frac{1}{\Delta k \xi_H}$  e, quindi, è del prim'ordine nel parametro  $\alpha$  (cfr (2.22)). Perciò, trascurando gli ordini successivi al primo,  $t$  diventa:

$$t \approx \frac{\eta_1}{\Delta k} \left[ \exp\left(-\frac{id\Delta k}{2}\right) \frac{d\phi}{dz} \Big|_2 - \exp\left(\frac{id\Delta k}{2}\right) \frac{d\phi}{dz} \Big|_1 \right] \quad (2.26)$$

Osserviamo che  $d \cdot \Delta k = \delta$ , cioè  $d \cdot \Delta k$  è proprio lo sfasamento tra il raggio straordinario e quello ordinario in uscita dalla lamina di CLN.

Dalle equazioni (2.23) e (2.26), dopo semplici passaggi, otteniamo:



$$\bar{\mathbf{T}}(d/2, -d/2) = \begin{bmatrix} \exp(i\delta_{\parallel}) & i[a \exp(i\delta_{\parallel}) + b \exp(i\delta_{\perp})] \\ i[a \exp(i\delta_{\perp}) + b \exp(i\delta_{\parallel})] & \exp(i\delta_{\perp}) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

dove  $\delta_{\parallel} = (2\pi n_{\parallel} d)/\lambda_0$  e  $\delta_{\perp} = (2\pi n_{\perp} d)/\lambda_0$  sono gli sfasamenti del raggio straordinario e ordinario rispetto all'onda incidente;  $a$  e  $b$  sono due parametri così definiti:

$$a = -\frac{\eta_{\parallel}}{\Delta k} \frac{d\phi}{dz} \Big|_1 \quad e \quad b = \frac{\eta_{\perp}}{\Delta k} \frac{d\phi}{dz} \Big|_2 \quad (2.28)$$

Nel caso del limite adiabatico ( $a \rightarrow 0$  e  $b \rightarrow 0$ , poiché  $\frac{d\phi}{dz} \Big|_1$  e  $\frac{d\phi}{dz} \Big|_2 \rightarrow 0$ ), la matrice di trasmissione (2.27) si riduce alla matrice diagonale:

$$\bar{\mathbf{T}}(d/2, -d/2) = \begin{bmatrix} \exp(i\delta_{\parallel}) & 0 \\ 0 & \exp(i\delta_{\perp}) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Ciò significa che un'onda incidente straordinaria  $\mathbf{E}^{\text{inc}} \left( = \begin{bmatrix} E^{\text{inc}} \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ , propagandosi all'interno del CLN, si mantiene sempre straordinaria (il campo elettrico resta parallelo al direttore) ed esce dal campione con lo sfasamento  $\delta_{\parallel}$  rispetto all'onda incidente. Analogamente, un'onda incidente ordinaria  $\mathbf{E}^{\text{inc}} \left( = \begin{bmatrix} 0 \\ E^{\text{inc}} \end{bmatrix} \right)$  resta ordinaria durante la propagazione ed esce con uno sfasamento  $\delta_{\perp}$ . Questo è proprio quanto affermato dal teorema adiabatico.

Se, invece,  $a$  e  $b$  sono diversi da zero, la matrice di trasmissione (2.27) contiene anche i termini fuori diagonale. Ciò significa che, ad esempio, un'onda incidente straordinaria non resta più solamente straordinaria ma, durante la propagazione, appare una componente del campo perpendicolare al direttore. Dunque, gli elementi fuori diagonale della matrice  $\bar{\mathbf{T}}(d/2, -d/2)$  espressa in (2.27) rappresentano le deviazioni dal teorema adiabatico al primo ordine nel parametro  $\alpha$ , definito in (2.22).

Per rendere più generale la trattazione, introduciamo di nuovo un sistema cartesiano fisso, i cui piani paralleli al piano  $xy$  contengano il direttore nella sua distorsione di puro *twist*. Definiamo  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{h}$  i versori che ruotano *solidalmente* con il direttore e si mantengono rispettivamente parallelo e ortogonale al direttore stesso. In particolare, siano  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{h}_1$  i versori che si riferiscono al direttore sulla prima superficie ( $z = -d/2$ ) e, analogamente, indichiamo con  $\mathbf{n}_2$  e  $\mathbf{h}_2$  quelli che si riferiscono al direttore sulla seconda superficie ( $z = d/2$ ). Scomponiamo il campo incidente  $\mathbf{E}^{\text{inc}}$  sul piano  $z = -d/2$  nella componente straordinaria  $E_{\parallel}^{\text{inc}}$  e in quella ordinaria  $E_{\perp}^{\text{inc}}$  (cfr §2.1):

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = E_{\parallel}^{\text{inc}} \mathbf{n}_1 + E_{\perp}^{\text{inc}} \mathbf{h}_1 \quad (2.30)$$

Partendo dalla (2.27) e osservando che i due vettori di base  $\mathbf{b}_{||}$  e  $\mathbf{b}_{\perp}$  sono, rispettivamente, proporzionali a  $\mathbf{n}/\sqrt{n_{||}}$  ed a  $\mathbf{h}/\sqrt{n_{\perp}}$ , otteniamo il campo elettrico a  $z = d/2$ , uscente dal CLN:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\text{out}} &= \mathbf{E}_{||}^{\text{out}} \exp(i2\pi n_{||} d/\lambda_0) + \mathbf{E}_{\perp}^{\text{out}} \exp(i2\pi n_{\perp} d/\lambda_0) = \\ &= \mathbf{E}_{||}^{\text{out}} \exp(i\delta_{||}) + \mathbf{E}_{\perp}^{\text{out}} \exp(i\delta_{\perp})\end{aligned}\quad (2.31)$$

con:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{||}^{\text{out}} &= (E_{||}^{\text{inc}} + ia\sqrt{n_{\perp}/n_{||}} E_{\perp}^{\text{inc}}) \mathbf{n}_2 + ib\sqrt{n_{||}/n_{\perp}} E_{||}^{\text{inc}} \mathbf{h}_2 \quad (a) \\ \mathbf{E}_{\perp}^{\text{out}} &= ib\sqrt{n_{\perp}/n_{||}} E_{\perp}^{\text{inc}} \mathbf{n}_2 + (E_{\perp}^{\text{inc}} + ia\sqrt{n_{||}/n_{\perp}} E_{||}^{\text{inc}}) \mathbf{h}_2 \quad (b)\end{aligned}\quad (2.32)$$

Le equazioni (2.31) e (2.32) rappresentano il risultato principale della teoria perturbativa. In particolare, la (2.31) mostra che un segnale elettromagnetico che si propaga in un CLN twistato è la sovrapposizione di due onde, una straordinaria generalizzata  $\mathbf{E}_{||}^{\text{out}}$ , che si propaga con la velocità di fase straordinaria  $c/n_{||}$  (cfr (2.31)) e una ordinaria generalizzata  $\mathbf{E}_{\perp}^{\text{out}}$ , che si propaga con la velocità di fase ordinaria  $c/n_{\perp}$  (cfr (2.31)). Quando non c'è nessun campo esterno, oppure il campo applicato è poco intenso in modo che il limite adiabatico continui a valere, i valori di  $a$  e di  $b$  sono trascurabili ( $a \sim 0$  e  $b \sim 0$ ). In tal caso i campi elettrici straordinario e ordinario nella (2.32) si riducono al campo straordinario e ordinario standard, cioè a quelli che si mantengono rigorosamente parallelo e ortogonale al direttore locale. Quando, invece, applichiamo un campo di intensità tale che i parametri  $a$  e  $b$  non sono più trascurabili, una parte del raggio straordinario viaggia con la velocità di fase ordinaria e viceversa. Ne consegue che un'onda puramente straordinaria (o ordinaria), propagandosi all'interno del nematico, non si mantiene esattamente parallela (o perpendicolare) al direttore.

### 2.3.2 Descrizione del metodo di misura in luce trasmessa

In questo paragrafo dimostreremo che è possibile scegliere una particolare geometria in cui *svaniscono i contributi lineari in  $\alpha$* . In tal caso, la validità del teorema adiabatico è notevolmente estesa [15]. L'idea fondamentale consiste nel realizzare una situazione in cui i due contributi, straordinario e ordinario, presenti in (2.31), vengano separati spazialmente in modo da evitare la loro interferenza.

Un fascio di luce monocromatica, di lunghezza d'onda  $\lambda_0$ , attraversa un polarizzatore che ruota con velocità angolare costante  $\omega$  e incide normalmente sulla prima interfaccia della cella che racchiude il CLN (Figura 2.6). Applichiamo un campo magnetico  $H$  lungo l'asse  $x$ . Suddividiamo la polarizzazione del campo incidente nella componente straordinaria  $\mathbf{E}_{||}^{\text{inc}}$  e in quella ordinaria  $\mathbf{E}_{\perp}^{\text{inc}}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{||}^{\text{inc}} &= E_0 \cos(\omega t - \phi_1) \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{E}_{\perp}^{\text{inc}} &= E_0 \sin(\omega t - \phi_1) \mathbf{h}_1\end{aligned}\quad (2.33)$$

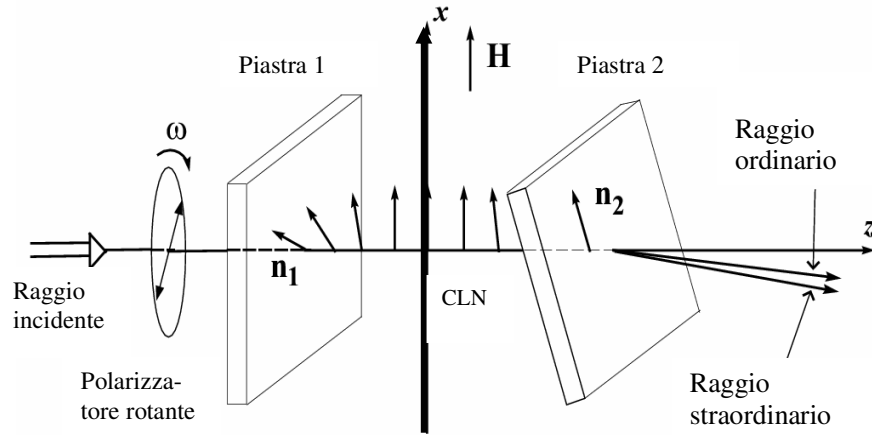
dove  $\phi_1$  è l'angolo azimutale del direttore sulla prima superficie. Abbiamo supposto che, all'istante  $t = 0$ , l'asse del polarizzatore fosse parallelo alla direzione del campo magnetico. Il campo elettrico dell'onda trasmessa dal CLN è rappresentato dall'equazione (2.31). Le piastre isotrope che racchiudono il nematico sono entrambe con le facce parallele e sono disposte in modo da formare un angolo  $\theta_W$  di circa  $2^\circ$  l'una rispetto all'altra. In questo caso, l'espressione (2.31) è ancora valida, ma lo spessore  $d$  del nematico è una funzione lineare della coordinata  $x$  lungo il cuneo:

$$d = d_0 + x (\tan\theta_W) \approx d_0 + x \theta_W \quad (2.34)$$

Allora, il campo elettrico uscente diviene:

$$\mathbf{E}^{\text{out}} = \mathbf{E}_{||}^{\text{out}} \exp[i 2\pi n_{||} (d_0 + x \theta_W) / \lambda_0] + \mathbf{E}_{\perp}^{\text{out}} \exp[i 2\pi n_{\perp} (d_0 + x \theta_W) / \lambda_0] \quad (2.35)$$

Il cuneo introduce, per il raggio straordinario ed il raggio ordinario, due diverse modulazioni di fase lungo l'asse  $x$ . Secondo l'ottica di Fourier [17], i due fasci sono rifratti a due diversi angoli, rispettivamente a  $(n_{||} - 1)\theta_W$  e  $(n_{\perp} - 1)\theta_W$ , come mostrato in Figura 2.6.



**Figura 2.6:** *Visione schematica della geometria del metodo in trasmissione. Il CLN è inserito in una cella a cuneo. Per rendere la figura più chiara, le due piastre isotrope sono state raffigurate molto distanti tra loro. Il campo magnetico  $H$  è applicato lungo l'asse  $x$ . Un fascio di luce monocromatica attraversa un polarizzatore rotante e incide normalmente sulla prima interfaccia. Per la birifrangenza del CLN e la particolare forma a cuneo della cella, i raggi ordinario e straordinario escono dal campione separati spazialmente.*

In questo caso, possiamo misurare separatamente le due intensità,  $I_{||}^{\text{out}}$  e  $I_{\perp}^{\text{out}}$ , corrispondenti ai due fasci. Se, ad esempio, prendiamo il raggio straordinario, la sua intensità risulta:

$$I_{||}^{\text{out}} = \gamma [(\mathbf{E}_{||}^{\text{out}}) \cdot (\mathbf{E}_{||}^{\text{out}})^*] \quad (2.36)$$

dove  $\mathbf{E}_{||}^{\text{out}}$  è data dalla (2.32 a). Sostituendo nella (2.36) l'espressione di  $\mathbf{E}_{||}^{\text{out}}$ , considerando le equazioni (2.33) e trascurando i contributi del secondo ordine in  $\alpha$ , otteniamo:

$$I_{\parallel}^{out}(t) = \frac{I_0}{2} [1 + \cos 2(\omega t - \phi_1)] \quad (2.37)$$

Quindi, entro l'approssimazione al prim'ordine, il fatto che il direttore abbia una distorsione di *twist* non introduce alcuna fase spuria nel segnale oscillante  $I_{\parallel}^{out}(t)$ . Ciò è valido per qualsiasi valore dell'angolo azimutale del direttore sulla seconda superficie.

L'equazione (2.37) mostra che l'angolo azimutale in superficie  $\phi_1$  può essere ottenuto in modo molto diretto misurando la costante di fase dell'intensità del fascio straordinario. Analoghi risultati si ottengono considerando il fascio ordinario. Si noti che, come per i due metodi riflessometrici precedentemente descritti (§2.2.1 e §2.2.2), non è necessario conoscere alcun parametro caratteristico del cristallo liquido e del substrato per ottenere l'angolo in superficie.

È importante osservare che il metodo di misura in luce trasmessa da noi proposto permette di migliorare enormemente la precisione nella misura dell'angolo in superficie e dell'ancoraggio, rispetto alla misura ottenibile con altri metodi in trasmissione descritti in letteratura. Infatti, è solamente con la particolare geometria a cuneo che si riescono a rendere *nulli* i contributi non adiabatici al primo ordine nel parametro  $\alpha$ , definito in (2.22). A titolo d'esempio, per un campione sottoposto ad un campo di induzione magnetica di 1 T, i contributi non adiabatici, presenti nelle tecniche convenzionali [9-12], sono del *primo ordine* e possono simulare rotazioni apparenti  $\Delta\phi_{app}^{tr}$  del direttore in superficie dell'ordine di una decina di gradi. Con tali tecniche è, perciò, difficile misurare accuratamente rotazioni superficiali reali del direttore  $\delta\phi_s$  che siano minori, o molto minori, di una decina di gradi. Al contrario, come vedremo in seguito, nel nostro caso le rotazioni apparenti dovute ai contributi del *secondo ordine* in  $\alpha$ , che sono trascurati nella (2.37), possono essere ridotte al di sotto di pochi decimi di grado.

Per completezza, vogliamo ricordare che altri autori [18, 19] hanno proposto tecniche in luce trasmessa che riescono a ridurre gli effetti non adiabatici ma che, comunque, restano inapplicabili quando le rotazioni superficiali del direttore  $\delta\phi_s$ , indotte da un campo di 1 T, sono inferiori a 1°.

Per verificare la consistenza del metodo da noi proposto e per ottenere le correzioni di ordine superiore al primo, sono stati eseguiti calcoli numerici con il metodo di Berreman, usando una procedura numerica molto accurata (precisione relativa maggiore di  $10^{-9}$ ) [15]. In questo modo, abbiamo potuto ottenere i valori "esatti" dell'intensità dei raggi trasmessi. I calcoli hanno confermato completamente le predizioni ottenute precedentemente utilizzando la teoria di Oldano e hanno permesso di stimare quantitativamente i contributi non adiabatici. In particolare, questi calcoli numerici confermano pienamente che le deviazioni dall'espressione (2.37) sono di ordine *superiore al primo* nel parametro  $\alpha$ . È possibile dimostrare

[15] che tali deviazioni introducono uno sfasamento apparente  $\Delta\phi_{app}^{tr}$  nell'intensità del raggio straordinario. Dunque, nel caso generale, la (2.37) diventa:

$$I_{||}^{out}(t) = \frac{I_0}{2} \left[ a + b \cos 2(\omega t - \phi_1 - \Delta\phi_{app}^{tr}) \right] \quad (2.38)$$

$$\text{con } \Delta\phi_{app}^{tr} \approx \beta_0 \alpha^2 \frac{\sin 2\phi_1}{2} = \beta_0 \left( \frac{\lambda_0}{2\pi\xi_H \Delta n} \right)^2 \frac{\sin 2\phi_1}{2} \propto H^2 \sin 2\phi_1$$

dove  $a$  e  $b$  sono coefficienti dimensionali che dipendono dal valore del campo applicato (per  $H = 0$ ,  $a = b = 1$ ). La costante di proporzionalità  $\beta_0$  nell'espressione di  $\Delta\phi_{app}^{tr}$  dipende solo dagli indici di rifrazione  $n_{||}$  e  $n_{\perp}$  del CLN e dall'indice  $n_m$  della lamina isotropa.

Osserviamo che:

- 1) Dalla definizione del parametro perturbativo  $\alpha$  (2.22), si deduce che  $\Delta\phi_{app}^{tr}$  è proporzionale a  $1/(\xi_H)^2$  e, quindi, è proporzionale al *quadrato*  $H^2$  del campo applicato (cfr (1.26) per la definizione di  $\xi_H$ ). Al contrario, la rotazione  $\delta\phi_s$  del direttore sotto l'azione del campo orientante, bilanciata dal momento di forza dell'ancoraggio, è *lineare* in  $H$  (cfr (2.12)).
- 2) Ci sono due valori di  $\phi_1$  che annullano la rotazione spuria  $\Delta\phi_{app}^{tr}$ :  $\phi_1 = 0^\circ$ , che corrisponde ad avere il direttore parallelo al campo magnetico e  $\phi_1 = 90^\circ$ , che corrisponde ad avere il direttore ortogonale al campo. Nella realizzazione sperimentale metteremo il direttore in modo che formi un angolo di poco minore di  $90^\circ$ . Ad esempio, se  $\phi_1 = 88^\circ$  e  $H = 6.179 \cdot 10^5$  As/m (corrispondente a  $B = 0.776$  T), la rotazione apparente risulta  $|\Delta\phi_{app}^{tr}| < 0.2^\circ$ .

In conclusione, utilizzando il metodo in trasmissione da noi proposto recentemente, riusciamo a ridurre notevolmente il contributo delle deviazioni dal teorema adiabatico. In particolare, scegliendo orientazioni del campo magnetico vicino a  $90^\circ$  rispetto al direttore, è possibile ridurre le rotazioni apparenti ( $\Delta\phi_{app}^{tr}$ ) di circa cinquanta volte rispetto a quelle che caratterizzano le ordinarie tecniche in luce trasmessa.

Inoltre, le rotazioni spurie  $\Delta\phi_{app}^{tr}$  sono proporzionali ad  $H^2$ , mentre quelle reali  $\delta\phi_s$  che si vogliono misurare sono proporzionali al campo  $H$ . Questa importante differenza qualitativa permette un ulteriore incremento della precisione della misura. Infatti, per separare i contributi reali associati alla rotazione del direttore da quelli apparenti è sufficiente misurare la costante di fase del segnale oscillante (2.38) in funzione del campo magnetico e estrarre dai risultati sperimentali solamente i contributi lineari. Quest'ultimo aspetto rende, in via di principio, il metodo in trasmissione competitivo con le tecniche riflessometriche (cfr §2.2.1 e §2.2.2). Bisogna, infatti, osservare che l'intensità dei fasci trasmessi sono circa cento volte superiori a quella dei raggi riflessi. Ciò rende il metodo in

trasmissione molto meno sensibile ad effetti spuri dovuti a eventuali fonti luminose esterne e alla presenza di fasci diffusi dal cristallo liquido.

Ribadiamo che nei metodi in trasmissione proposti precedentemente in letteratura, invece, le rotazioni apparenti  $\Delta\phi_{app}^{tr}$ , oltre ad essere molto più grosse, sono del primo ordine in  $\alpha$  e, quindi, sono lineari nel campo magnetico  $H$ . La linearità con il campo le rende praticamente indistinguibili da una rotazione reale  $\delta\phi_s$  del direttore in superficie.

Nella Tabella 2.1 riassumiamo le caratteristiche principali dei metodi riflessometrici e in luce trasmessa. Ciò che accomuna questi tre metodi è la possibilità di conoscere l'angolo azimutale del direttore misurando la costante di fase del segnale oscillante, anche nel caso di ancoraggi molto forti. Nel prossimo capitolo descriveremo gli apparati sperimentali da noi realizzati per la misura di ancoraggio. I metodi da noi usati sono quello in riflessione con due polarizzatori incrociati e quello in trasmissione. Lo scopo di questa tesi è analizzare l'effettiva applicabilità dei due metodi nel caso particolarmente complesso di ancoraggi molto forti, dove tutti i metodi alternativi finora proposti in letteratura falliscono.

Metodo	Realizzazione sperimentale della cella
In riflessione. Un solo polarizzatore rotante (§2.2.1)	Una delle due lamine che delimitano il CLN deve avere le facce non parallele. La cella deve essere a cuneo per separare le riflessioni multiple all'interno del campione. (Figura 2.4)
In riflessione. Due polarizzatori rotanti incrociati (§2.2.2)	Le lamine possono essere entrambe con le facce parallele. La cella deve essere a cuneo per separare le riflessioni multiple all'interno del campione. Il polarizzatore e l'analizzatore ruotano solidalmente.
In trasmissione (§2.3.2)	Le lamine possono essere entrambe con le facce parallele. La forma a cuneo della cella permette di separare il raggio straordinario e il raggio ordinario trasmessi dal campione (Figura 2.6)

**Tabella 2.1:** Sono riassunte le caratteristiche dei vari metodi di misura della rotazione superficiale  $\delta\phi_s$  del direttore.