

CAPITOLO 2

La tecnica delle funzioni modulanti.

2.1. Introduzione.

La tecnica delle funzioni modulanti è una tecnica di identificazione che permette di identificare un processo in T.C. a partire da una misura sufficientemente lunga degli ingressi e delle uscite, senza necessitare delle loro derivate. Inoltre si tratta di una tecnica di identificazione che opera direttamente in tempo continuo. Questa tecnica permette di identificare sistemi tempo-invarianti sia lineari che non lineari; risultati particolarmente apprezzabili si hanno nel caso di sistemi di tipo Hammerstein, caratterizzati da una non linearità statica seguita da una parte lineare.

Verrà, di seguito, illustrata brevemente la teoria delle funzioni modulanti e la sua applicazione all'identificazioni di sistemi lineari (con o senza ritardo) e non lineari di tipo Hammerstein (vedere anche [15]).

2.2. Le funzioni modulanti.

Questa tecnica, che risale agli anni '50, si basa sull'utilizzo di particolari funzioni per modulare le equazioni differenziali che caratterizzano il sistema, ottenendo dei consistenti vantaggi dal punto di vista dell'identificazione dei parametri.

Si descrive il comportamento del sistema in esame mediante una funzione di trasferimento nel dominio della variabile complessa s del tipo:

$$G(s) = \frac{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n}{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m}, m \geq n \quad (2.1)$$

che, nel dominio del tempo, corrisponde al seguente sistema di equazioni differenziali lineari (in cui y è l'uscita del sistema, mentre u è l'ingresso):

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i u}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \cdot \frac{d^i y}{dt^i}. \quad (2.2)$$

Si definisce funzione modulante una funzione $\Phi(t)$ che gode delle seguenti proprietà (T è una opportuna costante detta *finestra di identificazione*):

$$1. \quad \Phi(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \notin [0, T] \quad (2.3)$$

$$2. \quad \exists \frac{d^i \Phi}{dt^i}, \forall i \leq m \quad (2.4)$$

$$3. \quad \left. \frac{d^i \Phi}{dt^i} \right|_{t=0} = \mathbf{0}, \left. \frac{d^i \Phi}{dt^i} \right|_{t=T} = \mathbf{0}, \forall i \leq m \quad (2.5)$$

Esistono diverse famiglie di funzioni che soddisfano queste condizioni, tra le quali le cosiddette funzioni *spline* (vedi paragrafo 2.3).

Integrando nel tempo, su una finestra T , il sistema di equazioni differenziali che caratterizza il comportamento del sistema fisico (dopo aver moltiplicato entrambi i membri per $\Phi(t)$), si ottiene:

$$\int_0^T \sum_{i=0}^n a_i \cdot u^{(i)} \cdot \Phi(t) \cdot dt = \int_0^T \sum_{i=0}^m b_i \cdot y^{(i)} \cdot \Phi(t) \cdot dt \quad (2.6)$$

In particolare, integrando ripetutamente per parti e sfruttando la proprietà (2.5) della funzione $\Phi(t)$, si può dire che la relazione (2.6) equivale a:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot (-1)^i \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot u(t) \cdot dt = \sum_{i=0}^m b_i \cdot (-1)^i \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot y(t) \cdot dt \quad (2.7)$$

In questa espressione non compaiono più le derivate dell'ingresso e dell'uscita, ma quelle della $\Phi(t)$.

Definendo i coefficienti:

$$\begin{cases} \alpha_i \triangleq (-1)^i \cdot \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot u(t) \cdot dt \\ \beta_i \triangleq (-1)^i \cdot \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot y(t) \cdot dt \end{cases} \quad (2.8)$$

che si possono calcolare a partire dall'andamento dell'ingresso e dell'uscita del sistema e dalle derivate delle $\Phi(t)$ (che sono note, essendo note le $\Phi(t)$), si ottiene un'equazione lineare algebrica le cui incognite sono i parametri del sistema, che si vogliono identificare:

$$\sum_{i=0}^m b_i \cdot \beta_{ji} = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \alpha_{ji} \quad (2.9)$$

Le incognite di queste equazione, ovvero i parametri a_i e b_i , sono $n+m+2$. Senza perdita di generalità possiamo imporre il valore di uno di questi parametri, riducendo di una unità le incognite; supponiamo dunque che $a_0 = 1$. In ogni caso sono necessarie almeno $n+m+1$ equazioni linearmente indipendenti per determinare univocamente i parametri.

Per ottenere il numero di equazioni necessario ci sono due possibilità: la prima consiste nell'usare diverse funzioni modulanti sullo stesso intervallo di dati misurato; con la seconda si usa la stessa funzione modulante traslando l'intervallo di integrazione lungo il vettore dei dati (è anche possibile usare intervalli di integrazione parzialmente sovrapposti, a patto che il sistema sia sufficientemente eccitato da determinare equazioni indipendenti). Nel secondo caso si ottiene un sistema algebrico le cui equazioni sono omogenee, ma è necessario un vettore dati molto lungo se si vuol produrre un numero di equazioni indipendenti sufficiente.

E' chiaro che, nella pratica, sarà opportuno avere un sistema sovradeterminato, per ovviare alla presenza di disturbi e rumori che sicuramente altereranno le misurazioni. In questo caso si può risolvere il sistema trovandone la soluzione migliore nel senso dei minimi quadrati, ad esempio per mezzo della pseudoinversa; dato il sistema:

$$A \cdot x = b , \quad (2.10)$$

la sua soluzione con il metodo dei minimi quadrati è:

$$x = (A^T A)^{-1} A^T \cdot b . \quad (2.11)$$

Alcuni vantaggi del metodo delle funzioni modulanti sono evidenti. Anzitutto non è necessario, come per altre tecniche, conoscere le derivate dei segnali di ingresso e di uscita del sistema. In effetti queste, di norma, non sono disponibili direttamente ed il loro calcolo attraverso la derivazione dei rispettivi segnali amplifica il rumore da cui sono affetti, inficiando spesso l'esito dell'identificazione. Un altro chiaro vantaggio è

che si riduce il problema dell'identificazione dei parametri del sistema alla risoluzione di un sistema lineare di equazioni algebriche. Inoltre l'identificazione avviene totalmente in tempo continuo: l'uso di tecniche in tempo discreto comporta spesso alcuni problemi, come la scelta di un tempo di campionamento corretto, la difficoltà nel passaggio ad un modello tempo continuo equivalente o la difficoltà nel dare ai coefficienti del modello un significato fisico. Esiste anche un altro vantaggio di questa tecnica, cioè la sua intrinseca robustezza al rumore. Difatti l'operazione di integrazione vista sopra è, in sostanza, una convoluzione tra i segnali di ingresso o di uscita e la funzione modulante (o una sua derivata):

$$\tilde{y}(T) = \int_0^T \Phi(\tau) \cdot y^{(n)}(\tau) \cdot d\tau = (-1)^n \cdot \int_0^T \Phi^{(n)}(\tau) \cdot y(\tau) \cdot d\tau \quad (2.12)$$

per le proprietà delle funzioni modulanti:

$$\Phi^{(n)}(\tau) = \begin{cases} \Phi^{(n)}(T - \tau), & n \text{ pari} \\ -\Phi^{(n)}(T - \tau), & n \text{ dispari} \end{cases} \quad (2.13)$$

e quindi:

$$\tilde{y}(T) = \int_0^T \Phi^{(n)}(T - \tau) \cdot y(\tau) \cdot d\tau \quad (2.14)$$

In frequenza questo equivale ad un filtraggio di questi segnali attraverso un filtro avente come risposta impulsiva $\Phi^{(n)}(t)$:

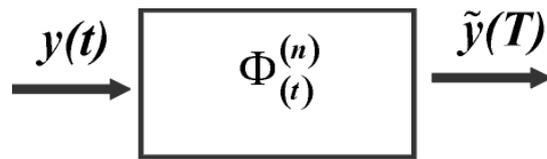


Figura 2.1. Proprietà di filtraggio delle funzioni modulanti

Questo filtro è di tipo passa-basso e la sua frequenza di taglio dipende sia da quale funzione modulante si è scelta sia dall'ampiezza della finestra di integrazione.

2.3. Le funzioni spline.

Nel corso degli anni sono stati proposti diversi tipi di funzioni modulanti, di cui riportiamo alcuni esempi:

- Shinbrot (1954):

$$\Phi_m(t) = \sin^m\left(\frac{m \cdot \pi}{T} \cdot t\right) \quad (2.15)$$

- Loeb e Cahen (1963):

$$\Phi_m(t) = t^n (T - t)^n \cdot F(t), F(t) \in C^{n-1} \quad (2.16)$$

- Puchov e Chinayev (1973):

$$\Phi_m(t) = \frac{(t - T)^3}{6 \cdot \lambda^4} \cdot e^{-\frac{(t-T)}{\lambda}} \quad (2.17)$$

In questo lavoro si è utilizzato un particolare genere di funzioni modulanti: le funzioni spline, introdotte da Maletinsky nel 1978.

Si consideri il seguente gruppo di $n+1$ funzioni modulanti:

$$\Phi_n = \{\Phi_{nj}\}, j = 0, 1, \dots, n \quad (2.18)$$

dove

$$\Phi_{nj} = \frac{\partial^j \Phi_{n0}}{\partial t^j}. \tag{2.19}$$

Nel caso delle spline si definisce:

$$\Phi_{nm}(t) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \cdot \delta(i\hat{T} - t) \tag{2.20}$$

$\delta(t)$ indica la funzione delta di Dirac, n è l'ordine della famiglia di funzioni spline, mentre \hat{T} è detto *tempo caratteristico* della funzione spline. A partire dalla (2.20) le altre funzioni del gruppo si ottengono per integrazioni successive:

$$\Phi_{nj}(t) = \int_0^{\hat{T}} \dots \int_0^{\hat{T}} \Phi_{nm}(t) \cdot dt^k, \quad k = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, n, \quad t \in [\mathbf{0}, n\hat{T}] \tag{2.21}$$

Dalla (2.21) si può ricavare l'espressione analitica delle funzioni spline, cioè:

$$\Phi_{ni}(\hat{T} - t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot g_{ji}(j \cdot \hat{T} - t), & i = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, n - \mathbf{1} \\ \sum_{j=0}^n (-1)^j \cdot \binom{n}{j} \cdot \delta_{ji}(j \cdot \hat{T} - t), & i = n \end{cases} \tag{2.22}$$

$$g_{ji}(j \cdot \hat{T} - t) \triangleq \begin{cases} \frac{\mathbf{1}}{(n - i - \mathbf{1})!} (j \cdot \hat{T} - t)^{n-i-1}, & t \in [j\hat{T}, n\hat{T}] \\ \mathbf{0} & , \text{ altrove} \end{cases}$$

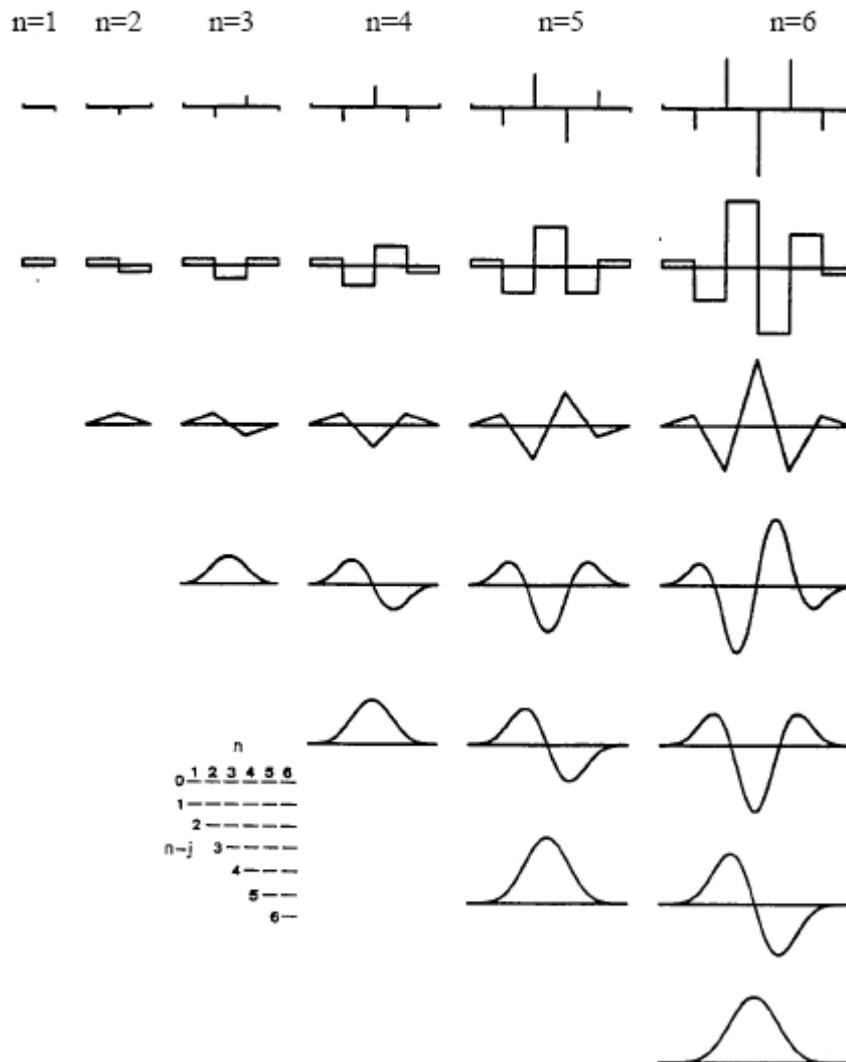


Figura 2.2. I primi 6 gruppi di funzioni modulanti di tipo spline.

Si noti che, fissati l'ordine e il tempo caratteristico, si determina completamente una famiglia di funzioni delle quali, per come sono definite, si conoscono le derivate successive in forma chiusa.

Le funzioni spline godono di due importanti proprietà:

1. in ogni sottointervallo $[(i-1) \hat{T}, i\hat{T}]$, per $i=0,1,2,\dots,n-1$, le funzioni sono polinomi di grado $n-1$ (vedi (2.22)).

2. si comportano come filtri passa-basso.

La seconda proprietà si può rilevare osservando i diagrammi di Bode delle funzioni modulanti. In Figura 2.3 è riportato il diagramma relativo all'ampiezza.

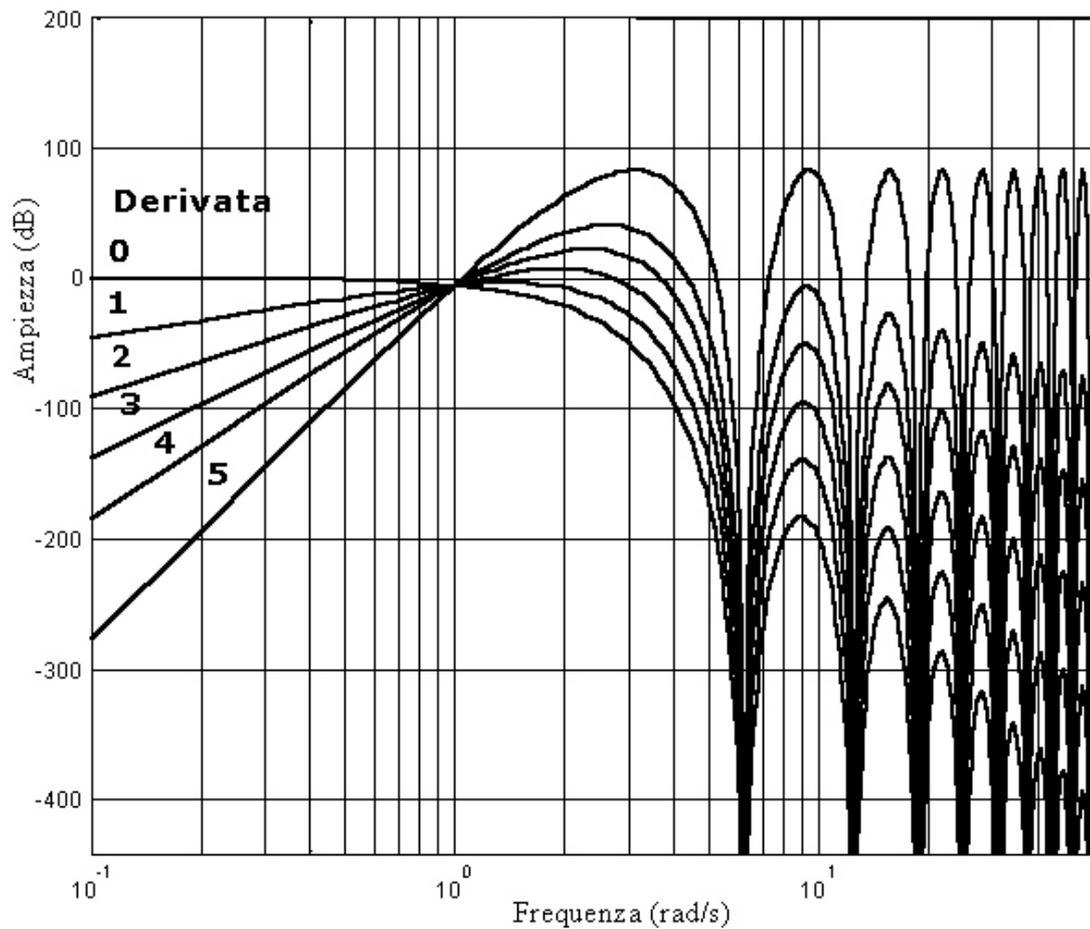


Figura 2.3. Diagramma di Bode dell'ampiezza delle funzioni spline

2.4. Scelta dei parametri.

2.4.1. Scelta del segnale di ingresso.

Nella procedura di identificazione è molto importante il segnale che viene fornito in ingresso al sistema. Infatti questo deve essere tale da eccitare sufficientemente il sistema stesso, allo scopo di evidenziarne tutte le caratteristiche; pertanto è necessario utilizzare un segnale che, da un lato abbia una estensione spettrale pari almeno alla banda caratteristica del sistema, dall'altro deve spaziare su tutto il range di possibili valori di ingresso (questo soprattutto nel caso di sistemi non lineari).

Tipicamente l'ingresso che viene scelto per effettuare l'identificazione è una sequenza di gradini di ampiezza casuale. La durata di ciascun gradino deve essere all'incirca uguale al tempo necessario al sistema per andare a regime, in modo da avere informazioni sia riguardo al suo comportamento transitorio che sul suo comportamento a regime. Il numero di gradini deve essere tale da garantire un numero di equazioni indipendenti sufficiente (vedi paragrafo 2.2).

2.4.2. Scelta dell'ordine delle funzioni spline.

Se il sistema da identificare è di ordine m , l'ordine delle funzioni modulanti non può essere inferiore ad m . Infatti in questo modo si ha la certezza che Φ_{m0} sia derivabile almeno m volte e che quindi siano ben definiti tutti i coefficienti del sistema lineare (2.9).

Occorre tenere anche presente che, dovendo poi implementare il metodo con un calcolatore, la funzione integranda non può essere discontinua. Si consideri per esempio una funzione che passa da A a $-A$ in corrispondenza del tempo t_0 ; chiaramente l'integrale della funzione dipende da t_0 . Tuttavia se l'integrale viene calcolato numericamente con la formula dei trapezi, per un intervallo di integrazione a cavallo di t_0 , il risultato è sempre nullo, indipendentemente dalla posizione di t_0 all'interno dell'intervallo: infatti conta solo il valore della funzione agli estremi dell'intervallo di integrazione. Da questo esempio si capisce che funzioni modulanti

discontinue possono condurre ad errori numerici considerevoli. Dalla Figura 2.2 si nota che indipendentemente dall'ordine le funzioni spline Φ_m e $\Phi_{n,n-1}$ sono discontinue, essendo l'una una sequenza di delta di Dirac, l'altra una sequenza di gradini, e pertanto non possono essere prese in considerazione. In conclusione l'ordine della famiglia di funzioni spline scelta deve essere almeno $n \geq m + 2$.

2.4.3. Scelta del tempo caratteristico.

La scelta del tempo caratteristico delle funzioni spline \hat{T} , e di conseguenza della finestra di integrazione $T=n\hat{T}$, influenza in maniera determinante le proprietà di filtraggio delle funzioni modulanti. Scegliere un tempo troppo piccolo implicherebbe avere un filtraggio a banda molto larga e quindi una insufficiente soppressione delle componenti di rumore. Al contrario, un tempo troppo grande comporta il rischio di un filtraggio talmente selettivo da eliminare parte delle componenti frequenziali del segnale. Un buon compromesso è scegliere una finestra di integrazione dello stesso ordine di grandezza della costante di tempo dominante del sistema.

2.5. Sistemi con ritardo.

Se prendiamo in considerazione un sistema lineare con un ritardo τ , la sua equazione caratteristica nel dominio del tempo è:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i u}{dt^i} + A \cdot u(t - \tau) = \sum_{i=0}^m b_i \cdot \frac{d^i y}{dt^i} \quad (2.23)$$

dove $u(t)$ rappresenta la funzione a gradino. Se si applicasse direttamente la tecnica delle funzioni modulanti, a partire da questa equazione, il sistema algebrico che si otterrebbe sarebbe non lineare. Per ovviare a questo inconveniente sono stati proposti diversi approcci:

- Puchov e Chinayev (1973): uso dell'approssimazione di Padè
- Rao (1976): approccio *trial and error*, cercando di minimizzare l'errore sull'uscita del sistema
- Balestrino, Landi, Sani (2000): il ritardo è visto come combinazione lineare di un insieme di ritardi noti

Vediamo più nel dettaglio quest'ultimo approccio.

Una qualunque funzione $g(t)$, sotto opportune ipotesi, può essere scritta come combinazione lineare di una base di funzioni $\{f_i(t)\}$, cioè:

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot f_i(t). \quad (2.24)$$

In questa situazione è chiaro che la funzione è contraddistinta dai parametri h_i , pertanto per identificare $g(t)$ è sufficiente stimare questi parametri.

Consideriamo come funzione da stimare il termine della (2.23) contenente il ritardo:

$$g(t) = A \cdot u(t - \tau) \quad (2.25)$$

Una possibile base per la rappresentazione di questa funzione è data da un insieme di funzioni a gradino con ritardi noti:

$$f_i(t) = u(t - i \cdot \tau_d - T_0) \quad (2.26)$$

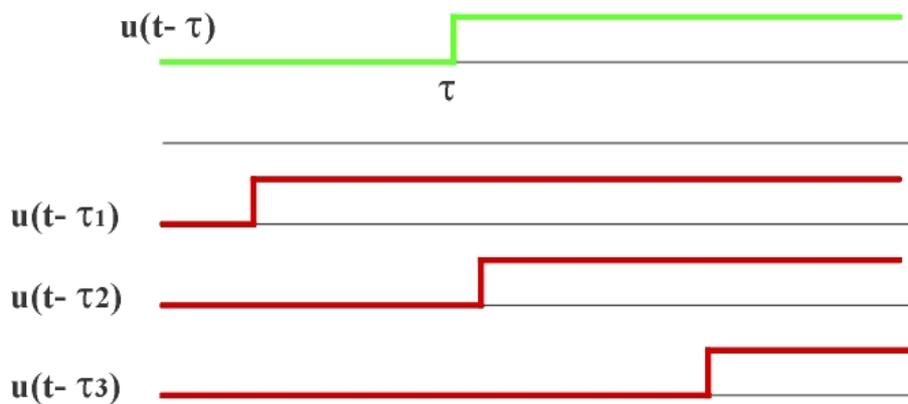


Figura 2.4. Base di funzioni per rappresentare un ritardo

La $g(t)$ può di conseguenza essere parametrizzata come:

$$g(t) = A \cdot u(t - \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot u(t - i \cdot \tau_d - T_0) \quad (2.27)$$

Il sistema descritto dalla (2.23) diventa, limitando la sommatoria (2.27) a q termini:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i u}{dt^i} + \sum_{i=0}^{q-1} h_i \cdot u(t - i \cdot \tau_d - T_0) = \sum_{i=0}^m b_i \cdot \frac{d^i y}{dt^i} \quad (2.28)$$

Adesso il vettore dei parametri incogniti (che chiamiamo λ) è costituito, oltre che dai coefficienti a_i e b_i , anche dai parametri che caratterizzano il ritardo, h_i :

$$\lambda = \{a_i, b_i, h_i\}, \quad \dim(\lambda) = n + m + \mathbf{2} + q \quad (2.29)$$

Il vettore λ può essere stimato applicando la stessa tecnica vista al paragrafo 2.2, cioè modulando l'equazione (2.28) con una funzione modulante $\Phi(t)$. Il sistema che si ottiene è un sistema lineare algebrico in λ , cioè in $n+m+q+2$ incognite; invece, se si fosse modulata direttamente la (2.23), si sarebbe ottenuto un sistema non lineare in $n+m+3$ incognite, cioè i coefficienti a_i e b_i ed il ritardo τ .

Una volta stimati i coefficienti h_i , è possibile risalire al ritardo incognito τ a partire dalla (2.27), che nel dominio di Laplace diventa:

$$A \cdot e^{-\tau \cdot s} = \sum_{i=0}^{q-1} h_i \cdot e^{-(i \cdot \tau_d + T_0) \cdot s} \quad (2.30)$$

Da questa si ottengono le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sum_{i=0}^{q-1} h_i \\ \tau = \frac{\sum_{i=0}^{q-1} h_i \cdot (\tau_d \cdot i + T_0)}{\sum_{i=0}^{q-1} h_i} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

(la prima relazione è evidente se si considera il limite per $t \rightarrow \infty$ della (2.27), ovvero il limite per $s \rightarrow \mathbf{0}$ nella (2.30)).

E' possibile dimostrare (vedere [5]) che i coefficienti h_i sono i campioni di una funzione *sampling* centrata nel ritardo incognito τ :

$$h_i = A \cdot \text{sinc}\left(\frac{\tau - i \cdot \tau_d - T_0}{T}\right) \quad (2.32)$$

Più in generale si può considerare un sistema dinamico con ritardi multipli, cioè un sistema che sottostà alla seguente equazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i u}{dt^i} + \sum_{k=1}^p A_k \cdot u(t - \tau_k) = \sum_{i=0}^m b_i \cdot \frac{d^i y}{dt^i} \quad (2.33)$$

Il ritardo può, anche in questo caso, essere rappresentato sfruttando una base di ritardi noti:

$$g(t) = \sum_{k=1}^p A_k \cdot u(t - \tau_k) = \sum_{i=0}^{q-1} h_i \cdot u(t - i \cdot \tau_d - T_0), \quad (2.34)$$

e, anche in questa situazione, si può dimostrare che:

$$h_i = \sum_{k=1}^p A_k \cdot \text{sinc}(\tau_k - (i-1) \cdot \tau_d - T_0). \quad (2.35)$$

Per stimare i ritardi si utilizza il seguente algoritmo:

1. Viene fissato un intervallo di tempo in cui si immagina siano contenuti i ritardi incogniti τ_k , ovvero si definiscono T_0 , q e τ_d .
2. Si esegue l'identificazione mediante l'algoritmo delle funzioni modulanti.
3. Si analizza la distribuzione degli h_i per individuare il numero dei ritardi incogniti presenti e la loro posizione nell'intervallo.
4. Si assegnano nuovi valori a q e τ_d , in modo che le funzioni *sampling* non siano sovrapposte

5. Si ripete l'identificazione, migliorando la stima dei parametri.

2.6. Sistemi Hammerstein.

Vediamo ora come è possibile estendere la tecnica della funzioni modulanti al caso dell'identificazione di sistemi Hammerstein (vedi Capitolo 1), cioè sistemi costituiti da un blocco non lineare statico seguito da un blocco lineare dinamico, come illustrato in Figura 2.5.

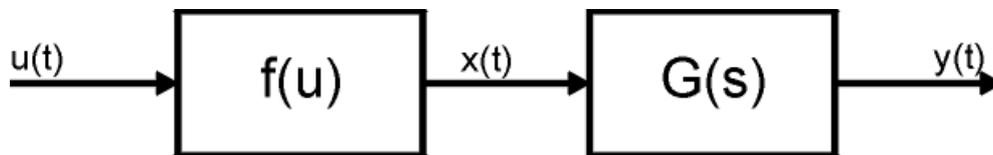


Figura 2.5. Sistema Hammerstein

Supponiamo anzitutto che la non linearità sia di tipo polinomiale (o approssimabile ad un polinomio):

$$f(u) = \sum_{i=0}^m c_i \cdot u^i. \quad (2.36)$$

Inoltre, come si è già detto, la non linearità deve essere statica, cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

La $G(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento del blocco lineare nel dominio della trasformata di Laplace:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) \quad (2.38)$$

Supponiamo che il blocco lineare sia caratterizzato da un numero di poli m e da un numero di zeri n e che quindi obbedisca alla seguente relazione:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{d^i x}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \cdot \frac{d^i y}{dt^i} \quad (2.39)$$

L'identificazione del sistema consiste nello stimare i coefficienti a_i e b_i della parte lineare ed i c_i della non linearità.

Se consideriamo il primo membro della (2.7) (previa sostituzione di $u(t)$ con il nuovo ingresso della parte lineare $x(t)$) ed applichiamo la (2.36), otteniamo:

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot (-\mathbf{1})^i \cdot \int_0^T \Phi^{(i)}(t) \cdot \sum_{j=1}^l c_j \cdot u^j(t) \cdot dt = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^l a_i \cdot c_j \cdot (-\mathbf{1})^i \cdot \int_0^T \Phi^{(i)}(t) \cdot u^j(t) \cdot dt \quad (2.40)$$

Conseguentemente la (2.7) diventa:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^l a_i \cdot c_j \cdot (-\mathbf{1})^i \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot u^j(t) \cdot dt = \sum_{i=0}^m b_i \cdot (-\mathbf{1})^i \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot y(t) \cdot dt \quad (2.41)$$

Definendo i coefficienti:

$$\begin{cases} \alpha_{ij} \hat{=} (-\mathbf{1})^i \cdot \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot u^j(t) \cdot dt \\ \beta_i \hat{=} (-\mathbf{1})^i \cdot \int_0^T \Phi^{(i)} \cdot y(t) \cdot dt \end{cases} \quad (2.42)$$

si ottiene l'equazione lineare algebrica:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^l a_i \cdot c_j \cdot \alpha_{ij} = \sum_{i=0}^m b_i \cdot \beta_i \quad (2.43)$$

I coefficienti dell'equazione sono noti, dipendendo dall'ingresso e dall'uscita del sistema, dalla funzione modulante $\Phi(t)$ e della sue derivate, tutte grandezze note.

Per definire in modo univoco i parametri del sistema, imponiamo che la parte lineare abbia guadagno statico unitario ponendo:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

In questo modo l'equazione (2.43) è in $m + (n+1)l$ incognite (gli m b_i , gli l c_j e gli ml prodotti $a_i c_j$). Per ottenere più equazioni immaginiamo di traslare la finestra di integrazione T lungo l'asse dei tempi. In questo caso la misura degli ingressi non potrà durare meno di un tempo $(m + (n+1)l) T$; tuttavia, come evidenziato anche nel paragrafo 2.2, è opportuno avere delle misure di ingresso e uscita di durata superiore in modo da ottenere un sistema sovradeterminato; così, sfruttando il maggior numero di informazioni, e risolvendo il sistema nel senso dei minimi quadrati, è possibile ridurre l'effetto del rumore che sarà sicuramente presente.

I coefficienti possono essere calcolati con equazioni analoghe alle (2.10)-(2.11). Si noti che così si possono calcolare direttamente i b_i ed i c_j , mentre gli a_i sono inglobati nei prodotti $a_i c_j$. Quindi gli a_i devono essere calcolati esplicitamente dividendo questi prodotti per gli opportuni coefficienti della non linearità.

2.7. Software utilizzato.

In questo lavoro, l'identificazione con la tecnica delle funzioni modulanti, sarà usata una libreria di funzioni MATLAB realizzata da L.Sani ed estesa al caso di sistemi Hammerstein da D.Corsanini.

La funzione principale è la seguente:

- *fun_mod_ham*:

- Parametri di ingresso.

1. T : ampiezza della finestra di identificazione
2. np : numero di poli della $G(s)$
3. nz : numero di zeri della $G(s)$
4. g : grado della non linearità polinomiale
5. *nomefile* : nome di un file .mat in cui siano presenti tre variabili, denominate t , u e y . Queste dovranno contenere, rispettivamente, gli istanti di campionamento e le relative misure dell'ingresso e dell'uscita del sistema.

- Parametri di uscita.

1. num : vettore contenente i coefficienti stimati del numeratore della $G(s)$.
2. den : vettore contenente i coefficienti stimati del denominatore della $G(s)$
3. nlc : vettore contenente i coefficienti polinomiali della non linearità. Si noti che i coefficienti sono elencati in ordine crescente per grado e manca quello relativo al grado zero (perciò non sono espressi direttamente in formato MATLAB, ovvero in un formato compatibile con la funzione *polyval*).

- Funzionamento.

La funzione *fun_mod_ham* costruisce il sistema algebrico di (2.43), lo risolve con il metodo della pseudoinversa, come in (2.11), e restituisce i parametri del sistema così trovati.