III.2 Modellazione analitica del comportamento della membrana esterna

Sia dato un tratto di membrana tubolare di raggio $\mathbf{R_0}$ e lunghezza **L** e si consideri un sistema di riferimento cilindrico con l'origine O in corrispondenza di una delle sezioni trasversali di estremità e l'asse **x** coincidente con quello del tubo, positivo nel verso entrante nello stesso.
Si applichi quindi uno spostamento assialsimmetrico in direzione radiale in **x**=0 che deformi la sezione fino ad un valore $\mathbf{R_1}$ del raggio. L'estremo opposto si trovi invece a distanza sufficiente da non risentire degli effetti dello spostamento applicato. Si abbia cioè $\mathbf{r}=\mathbf{R_0}$ in **x**=**L**:

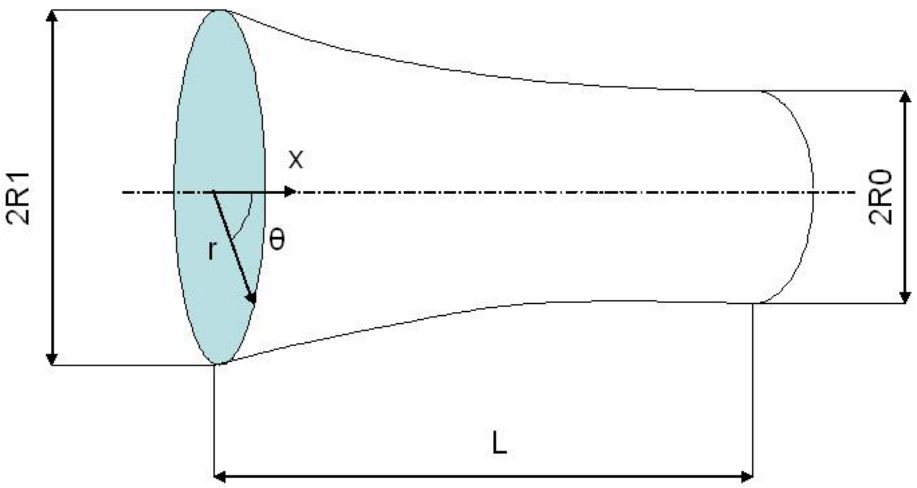

Fig. III.2 Tubo deformato assialsimmetricamente in **x**=0

Si noti che l'assialsimmetria del sistema permette di ricondursi allo studio di un problema piano.
Si tagli quindi il tratto di tubo con un piano contenente l'asse **x** e si prenda in esame una delle due metà della sezione così ottenuta.
Si esamini quindi un elemento di lunghezza infinitesima tra le ascisse **x** e **x**+**dx** e per questo si impongano le condizioni di equilibrio in direzione assiale e in quella radiale.

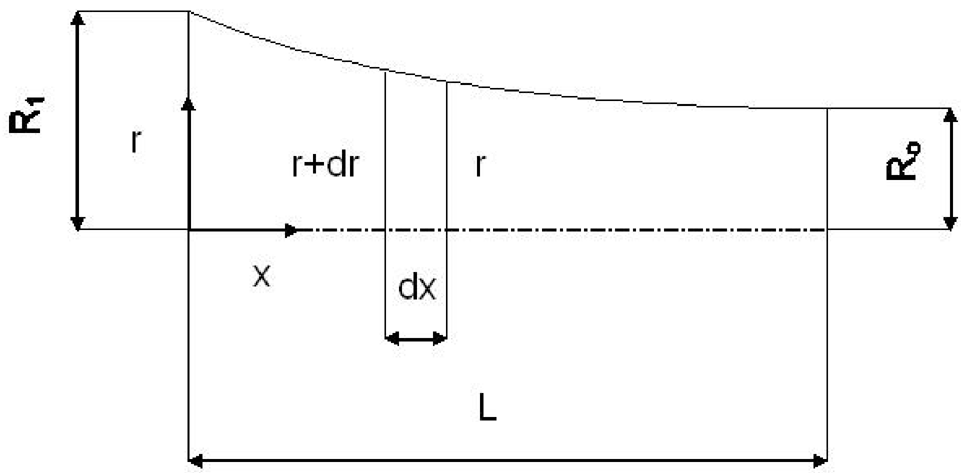

Fig. III.3 Modello del tratto di condotto in esame

Equazione di equilibrio in direzione assiale

Nei calcoli a seguire si prendono in considerazione anche le variazioni dell'angolo **θ** tra le due sezioni di estremità dell'elemento. Per brevità di rappresentazione si decide inoltre di non indicare esplicitamente la dipendenza di tale grandezza da **x**.
Si conduce per prima cosa una breve analisi trigonometrica.
Per la definizione del significato delle variabili utilizzate si faccia riferimento alla figura 2 che rappresenta un ingrandimento del tratto infinitesimo della membrana preso in esame:

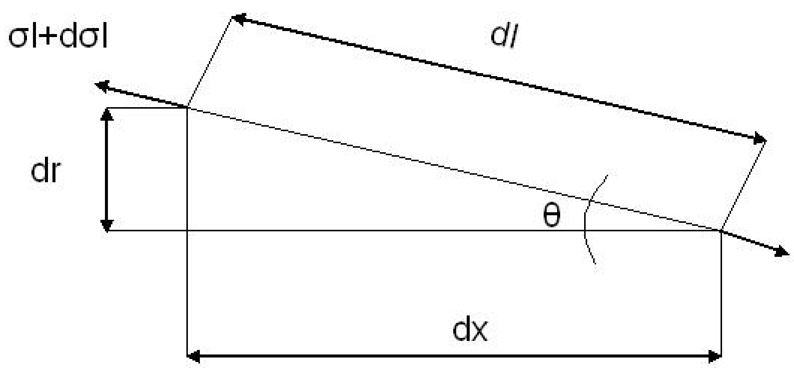

Fig. III.4 Definizione delle grandezze utilizzate nell'analisi

Da qui si possono dunque ricavare le relazioni:

$$tg(\vartheta) = -\frac{dr(x)}{dx}$$

$$1 + tg^2(\vartheta) = 1 + \left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2$$

$$1 + \frac{\sin^2(\vartheta)}{\cos^2(\vartheta)} = 1 + \left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2$$

$$\cos(\vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}$$

$$\sin(\vartheta) = -\frac{\frac{dr(x)}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}$$

Dove i segni negativi dipendono dalla scelta fatta per il sistema di riferimento.
L'equazione di equilibrio quindi è:

$$2 \cdot \pi \cdot (\sigma_l(x) + d\sigma_l(x)) \cdot (r(x) + dr(x)) \cdot [\cos(\vartheta)]_{x+dx} - 2 \cdot \pi \cdot (\sigma_l(x)) \cdot (r(x)) \cdot [\cos(\vartheta)]_x = 0$$

Il primo termine tra parentesi quadre rappresenta il coseno dell'angolo **θ** calcolato in **x**+**dx**, il secondo invece è il coseno dello stesso angolo valutato in **x**.
Sviluppando i calcoli:

$$[\cos(\vartheta)]_{x+dx} = \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta) \cdot d\vartheta$$

$$\vartheta = -a\tan\frac{dr(x)}{dx}$$

$$d\vartheta = \frac{\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}$$

Da cui sostituendo:

$$[\cos(\vartheta)]_{x+dx} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2} - \frac{\dfrac{dr(x)}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}}\cdot\frac{\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}dx$$

L'equazione di equilibrio assiale può essere scritta come:

$$(\sigma_l(x)+d\sigma_l(x))\cdot(r(x)+dr(x))\cdot\left[\frac{1}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2} - \frac{\dfrac{dr(x)}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}}\cdot\frac{\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}dx\right]+$$

$$\frac{r(x)\cdot\sigma_l(x)}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}} = 0$$

Se si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore al primo:

$$-\sigma_l(x)\cdot r(x)\cdot\left[\frac{\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}\cdot\dfrac{dr(x)}{dx}}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}dx\right]+dr(x)\cdot\sigma_l(x)+r(x)\cdot d\sigma_l(x)=0$$

E dividendo tutto per **dx**:

$$-\sigma_l(x)\cdot r(x)\cdot\left[\frac{\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}\cdot\dfrac{dr(x)}{dx}}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}\right]+\frac{dr(x)}{dx}\cdot\sigma_l(x)+r(x)\cdot\frac{d\sigma_l(x)}{dx}=0$$

Si può raccogliere ed osservare che quella ottenuta è una equazione differenziale a variabili separabili:

$$\frac{d\sigma_l(x)}{dx}\cdot r(x)+\sigma_l(x)\cdot\frac{dr(x)}{dx}\cdot\left[1-\frac{\left(\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}\right)\cdot\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)\cdot r(x)}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}\right]=0$$

L'ultima equazione scritta ha una forma caratteristica:

$$\alpha\cdot f^{'}+\beta\cdot f=0$$

$$f^{'}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot f=g(x)\cdot f$$

$$\frac{\left(\frac{d\sigma_l(x)}{dx}\right)}{\sigma_l(x)} = -\frac{1}{r(x)}\cdot\frac{dr(x)}{dx}\cdot\left[1-\frac{\left(\frac{d^2r(x)}{dx^2}\right)\cdot\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)\cdot r(x)}{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}\right]$$

Quindi si può procedere all'integrazione:

$$\left[\log(\sigma_l(x))\right]_0^x = \int_0^x \frac{dr(x)}{dx}\cdot\left[\frac{1}{r(x)}-\frac{\left(\frac{d^2r(x)}{dx^2}\right)}{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}\right]dx$$

$$\log\left(\frac{\sigma_l(x)}{\sigma_l(0)}\right) = \int_0^x \frac{dr(x)}{dx}\cdot\frac{\left(\frac{d^2r(x)}{dx^2}\right)}{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}\,dx - \int_0^x \frac{1}{r(x)}dr$$

$$\log\left(\frac{\sigma_l(x)}{\sigma_l(0)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\log\left(1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2\right)\right]_0^x - \left[\log(r(x))\right]_0^x$$

$$\left(\frac{\sigma_l(x)}{\sigma_l(0)}\right) = \log\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dr(0)}{dx}\right)^2}}\cdot\left(\frac{r(0)}{r(x)}\right)\right)$$

Elevando:

$$\sigma_l(x) = \frac{r(0)\cdot\sigma_l(0)}{\sqrt{1+\left(\frac{dr(0)}{dx}\right)^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)}\right)$$

Cioè:

$$K = \frac{r(0)\cdot \sigma_l(0)}{\sqrt{1+\left(\frac{dr(0)}{dx}\right)^2}}$$

Equazione I

$$\sigma_l(x) = K \cdot \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)}\right)$$

Equazione di equilibrio in direzione radiale

Si faccia riferimento ancora alla figura 2.

L'equazione di equilibrio in direzione radiale è:

$$2\cdot \sigma_l(x)\cdot r(x)\cdot [\sin(\vartheta)]_x - 2\cdot(\sigma_l(x)+d\sigma_l(x))\cdot(r(x)+dr(x))\cdot[\sin(\vartheta)]_{x+dx} =$$

$$2\cdot \sigma_t(x)\cdot \sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)}$$

Il primo termine tra parentesi quadre è il seno dell'angolo **θ** calcolato in corrispondenza della coordinata assiale **x**, il secondo è lo stesso termine valutato in **x**+**dx**.

In particolare sviluppando quest'ultimo si trova:

$$[\sin(\vartheta)]_{x+dx} = \sin(\vartheta)+\cos(\vartheta)\cdot dx$$

$$[\sin(\vartheta)]_{x+dx} = \frac{-\dfrac{dr(x)}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2} dx \right)$$

Basta quindi inserire tutto nell'equazione di equilibrio:

$$\sigma_l(x) \cdot r(x) \cdot \left[\frac{-\dfrac{dr(x)}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}} \right] - (\sigma_l(x) + d\sigma_l(x)) \cdot (r(x) + dr(x)) \cdot \left[\frac{-\dfrac{dr(x)}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}} \right] +$$

$$-(\sigma_l(x) + d\sigma_l(x)) \cdot (r(x) + dr(x)) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2}} \cdot \left(\frac{-\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2} dx \right) \right]$$

$$\sigma_t(x) \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

Si trascurano ancora gli infinitesimi di ordine superiore al primo:

$$\sigma_t(x) = \frac{\sigma_l(x) \cdot r(x) \cdot \left(\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}\right)}{\left[1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2\right]^2} + \frac{\sigma_l(x) \cdot \left(\dfrac{d^2r(x)}{dx^2}\right)}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2} + r(x) \cdot \frac{\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right) \cdot \left(\dfrac{d\sigma_l(x)}{dx}\right)}{1+\left(\dfrac{dr(x)}{dx}\right)^2} \qquad \text{Equazione II}$$

Equazione di equilibrio globale

A questo punto i risultati precedenti possono essere utilizzati per scrivere una equazione di equilibrio complessivo del tubo.
Si sostituisce l'equazione I in II:

$$\sigma_t(x) = K\cdot\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)}\right)\cdot\frac{r(x)\cdot\left(\frac{d^2r(x)}{dx^2}\right)}{\left[1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2\right]^2} + K\cdot\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)}\right)\cdot\frac{\left(\frac{d^2r(x)}{dx^2}\right)}{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2} +$$

$$K\cdot r(x)\cdot\frac{\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}\cdot\frac{d\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)}\right)}{dx}$$

La derivata che compare nell'ultimo termine si calcola facilmente:

$$\frac{d\left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)}\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)\cdot\left(\frac{d^2r(x)}{dx^2}\right)}{r(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}} + \frac{\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r^2(x)}$$

Sostituendo e sviluppando i calcoli si ha:

$$\sigma_t(x) = K \cdot \frac{r(x) \cdot \left(\frac{d^2 r(x)}{dx^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - K \cdot \frac{\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2 \cdot \left(\frac{d^2 r(x)}{dx^2}\right)}{\left[1 + \left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Quella appena ottenuta é una equazione differenziale del secondo ordine che può essere scritta sotto forma di sistema di equazioni differenziali del primo ordine:

$$r_1 = r(x)$$

$$r_2 = \frac{dr(x)}{dx}$$

$$\sigma_t(x) = K \cdot \frac{r_1 \cdot \left(\frac{dr_2}{dx}\right)}{\left[1 + (r_2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + K \cdot \frac{(r_2)^2 \cdot \left(\frac{dr_2}{dx}\right)}{\left[1 + (r_2)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = K \cdot \frac{\left(\frac{dr_2}{dx}\right)}{\sqrt{1 + (r_2)^2}}$$

Da qui è quindi possibile scrivere il sistema costituito dalle due equazioni:

$$\frac{dr_1}{dx} = r_2$$

$$\frac{dr_2}{dx} = \sigma_t(x) \cdot \frac{\sqrt{1 + (r_2)^2}}{K}$$

Calcolo della costante K

Il risultato sopra ottenuto definisce il comportamento della membrana a meno di una costante **K** che può essere determinata facilmente.
Si utilizzano le seguenti relazioni:

$$\sigma_l(x) = K \cdot \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)} \right)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sigma_l(x)}{EL\_L}}$$

$$\varepsilon = \frac{dl}{dx} - 1$$

Dove **ε** rappresenta la deformazione assiale dell’elemento infinitesimo preso in esame e **EL_L** il modulo di elasticità corrispondente del tessuto. Si noti che la relazione costitutiva non é lineare ma segue un andamento di tipo quadratico.
La terza relazione riporta la definizione di deformazione longitudinale.
La lunghezza totale della curva può essere calcolata risolvendo l’integrale:

$$\int_0^L dl = \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\, dx$$

Si mettono insieme la seconda e la terza equazione:

$$\sqrt{\frac{\sigma_l(x)}{EL\_L}} = \frac{dl}{dx} - 1$$

$$dl = dx + \sqrt{\frac{\sigma_l(x)}{EL\_L}} \cdot dx$$

E sostituendo nell’equazione integrale:

$$\int_0^L dl = \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^L dx + \int_0^L \sqrt{\frac{\sigma_l(x)}{EL\_L}}dx$$

$$\int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^L \left[1+\sqrt{\frac{\frac{K}{r(x)}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}}{EL\_L}}\right]dx$$

$$\int_0^L dx + \sqrt{\frac{\sigma_l(x)}{EL\_L}}\cdot\int_0^L \sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}}{r(x)}}dx = \int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$\sqrt{\frac{\sigma_l(x)}{EL\_L}} = \frac{\int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,dx - \int_0^L dx}{\int_0^L \sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}}{r(x)}}dx}$$

$$K = EL\_L\cdot\left[\frac{\int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,dx - \int_0^L dx}{\int_0^L \sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}}{r(x)}}dx}\right]^2$$

Questo risultato permette infine di scrivere l'andamento completo delle tensioni longitudinali:

$$\sigma_l(x) = EL\_L \cdot \left[\frac{\int_0^L \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}\,dx - \int_0^L dx}{\int_0^L \sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2}}{r(x)}}\,dx} \right]^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dr(x)}{dx}\right)^2}}{r(x)} \right)$$