

III Doppia Giunzione Tunnel

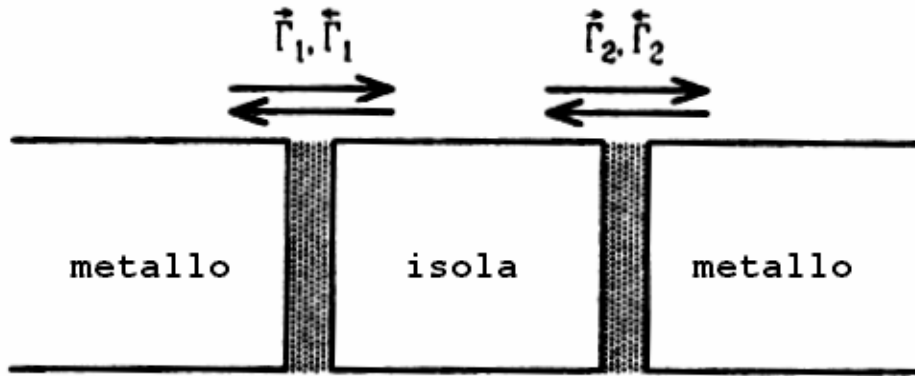


Fig. 1: Schema di un sistema a doppia giunzione. Il tunneling attraverso la prima giunzione è considerato diretto se l'elettrone entra dentro l'isola, quello attraverso la seconda giunzione è considerato diretto se l'elettrone esce dall'isola.

Consideriamo il circuito multigiunzione più semplice: la serie di due giunzioni tunnel connesse ad un generatore di tensione V tramite un'impedenza $Z(\omega)$.

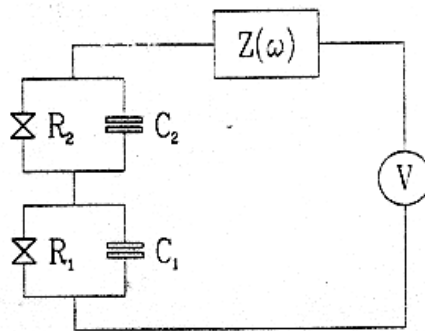


Fig. 2: Sistema a doppia giunzione, accoppiato ad un generatore di tensione V tramite l'impedenza esterna $Z(\omega)$.

III.1 Analisi intuitiva del comportamento del Sistema

Per ricavare l'energia di caricamento del sistema, si considerano le due giunzioni come semplici condensatori, trascurando per il momento la possibilità che un elettrone faccia tunneling. Il comportamento del sistema può essere descritto in termini delle cariche Q_1 e Q_2 sulle giunzioni, ma anche, equivalentemente, tramite V e la carica in eccesso presente sull'isola metallica individuata dalle due giunzioni.

Tale carica in eccesso sarà:

$$\tilde{Q} = Q_0 + (n_2 - n_1)e$$

ove n_1 è il numero di elettroni che ha attraversato la giunzione 1 entrando nell'isola, e n_2 è il numero di elettroni che ha attraversato la giunzione 2 uscendo dall'isola: n_1 ed n_2 sono numeri interi. Posto poi

$q = (n_2 - n_1)e = ne$, si può scrivere :

$$\tilde{Q} = Q_0 + q$$

Il termine Q_0 è dovuto ad una carica costante di offset presente nell'isola. Detta Q_0' la carica dell'isola fissata dalla differenza tra le funzioni lavoro dei metalli che costituiscono le giunzioni¹, si ha:

$$Q_0' = \frac{C_1(\Phi_1 - \Phi_{is}) - C_2(\Phi_{is} - \Phi_2)}{e}$$

ove Φ_{is} è la funzione lavoro del metallo dell'isola, e Φ_1 e Φ_2 sono quelle degli elettrodi inferiore e superiore rispettivamente.

Questa carica è di per sè considerevole ($Q_0' \gg e$), ma di fatto viene quasi integralmente compensata da cariche che fanno tunneling. La compensazione, proprio a causa della natura discreta della carica elettrica, non sarà mai completa: si avrà sempre la carica residua Q_0 che è una variabile aleatoria con

densità di probabilità uniforme in $\left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right]$.

La capacità vista dal circuito elettrico esterno sarà:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

che porta una carica pari a:

$$Q = \frac{C_1 Q_2 + C_2 Q_1}{C_1 + C_2}$$

L'energia di caricamento del sistema sarà:

$$E = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} \quad (\text{III.1})$$

Esprimiamo ora le cariche Q_1 e Q_2 in funzione di \tilde{Q} e V usando:

$$Q_1 - Q_2 = \tilde{Q}$$

$$\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = V$$

$$Q_1 = CV + \frac{C_1 \tilde{Q}}{C_\Sigma}$$

$$Q_2 = CV - \frac{C_2 \tilde{Q}}{C_\Sigma}$$

¹ È comunque vero anche che persino un piccolo spostamento di un'impurezza ionizzata all'intero di una delle barriere tunnel può portare ad un considerevole cambiamento di Q_0' .

Risolvendo il sistema 2×2 si ottiene:

$$Q_1 = CV + \frac{C_1 \tilde{Q}}{C_\Sigma}$$

$$Q_2 = CV - \frac{C_2 \tilde{Q}}{C_\Sigma}$$

Che, sostituite nella (III.1), portano a:

$$E = \frac{CV^2}{2} + \frac{\tilde{Q}^2}{2C_\Sigma}$$

ove:

$$C_\Sigma = C_1 + C_2$$

Siamo ora in grado di scrivere l'espressione dell'energia libera di questo sistema, che comprende l'energia di caricamento delle due capacità di giunzione appena ricavata, ed il lavoro compiuto dal generatore di tensione per ristabilire l'equilibrio di carica quando gli elettroni attraversano le giunzioni:

$$E(n_1, n_2) = \frac{CV^2}{2} + \frac{\tilde{Q}^2}{2C_\Sigma} - e \left[n_1 \frac{C_2}{C_\Sigma} + n_2 \frac{C_1}{C_\Sigma} \right] V$$

Calcolando adesso la diminuzione di energia (energia iniziale – energia finale) associata ad un evento di tunneling:

$$\Delta E_i^\pm = E(n_i, n_j) - E(n_i \pm 1, n_j) \quad \text{con } i = 1, 2 \text{ e } j = 3 - i$$

si ottiene:

$$\Delta E_1^+ = \frac{e}{C_\Sigma} \left[C_2 V + \tilde{Q} - \frac{e}{2} \right]$$

$$\Delta E_1^- = \frac{e}{C_\Sigma} \left[-C_2 V - \tilde{Q} - \frac{e}{2} \right]$$

$$\Delta E_2^+ = \frac{e}{C_\Sigma} \left[C_1 V - \tilde{Q} - \frac{e}{2} \right]$$

$$\Delta E_2^- = \frac{e}{C_\Sigma} \left[-C_1 V + \tilde{Q} - \frac{e}{2} \right]$$

Cerchiamo adesso di ragionare intuitivamente per poi dare una prova più formale e convincente dei risultati cui arriveremo.

Perchè si verifichi un evento di tunneling, esso deve essere vantaggioso dal punto di vista energetico, ovvero dovrà minimizzare l'energia del sistema, per cui il ΔE_i^\pm associato ad una transizione dovrà

essere > 0 . Imponendo dunque $\Delta E_i^\pm < 0$, ovvero che lo stato iniziale sia di equilibrio, si ottiene che il tunneling attraverso le due giunzioni è soppresso per:

$$V^- < V < V^+$$

con:

$$V^- = \max \left[\frac{\left(-\tilde{Q} - \frac{e}{2} \right)}{C_2}, \frac{\left(\tilde{Q} - \frac{e}{2} \right)}{C_1} \right]$$

$$V^+ = \max \left[\frac{\left(-\tilde{Q} + \frac{e}{2} \right)}{C_2}, \frac{\left(\tilde{Q} + \frac{e}{2} \right)}{C_1} \right]$$

III.2 Frequenze di Tunneling

Passiamo ora ad un approccio più rigoroso, anche se in alcuni punti, come per la singole giunzione tunnel, ci limiteremo a giustificare intuitivamente i risultati della teoria generale senza specificare come si ricavino effettivamente.

Assumiamo innanzitutto trascurabile la carica di sbilanciamento Q_0' : la carica sull'isola sarà quindi semplicemente $\tilde{Q} = q$.

Scriviamo ora l'espressione della frequenza di tunneling diretta (le transizioni dirette sono quelle favorite da una tensione applicata positiva, ovvero la $\bar{\Gamma}_1$ è la frequenza con cui gli elettroni attraversano la giunzione 1 per entrare nell'isola, e parimente $\bar{\Gamma}_2$ è quella con cui attraversano la giunzione 2 per uscire dall'isola) attraverso la prima giunzione:

$$\bar{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(E) [1 - f(E')] P(\kappa_i; E + E_1(V, q) - E') dE dE' \quad (\text{III.2})$$

Dove:

$$\kappa_i = \frac{C}{C_i} \quad \text{con } i = 1, 2$$

$$E_i(V, q) = \kappa_i eV + \frac{e \left(q - \frac{e}{2} \right)}{C_\Sigma} \quad \text{con } i = 1, 2$$

La $E_1(V, q)$ quindi non è che la diminuzione di energia libera prima e dopo l'evento di tunneling: ΔE_1^+ .

Se fossero assenti interazioni con l'ambiente elettromagnetico, si avrebbe ovviamente:

$$E + E_1(V, q) = E'$$

Ma in realtà l'elettrone che sta facendo tunneling ha la possibilità di scambiare energia con l'ambiente con probabilità:

$$P(\kappa_1, E) = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\kappa_1^2 J(t) + \frac{iEt}{\hbar}\right] dt$$

ove:

$$J(t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}\{Z_t(\omega)\}}{\omega R_K} \left\{ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2K_B T}\right) [\cos(\omega t) - 1] - j \sin(\omega t) \right\} d\omega$$

e la C che compare nella $Z_t(\omega)$ è la capacità parallelo tra C_1 e C_2 .

La (III.2) si può scrivere alternativamente come:

$$\bar{\Gamma}_1(V) = \frac{1}{e^2 R_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E}{\left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K_B T}\right)\right]} P(\kappa_1; E_1(V, q) - E) dE$$

Per la frequenza di transizione inversa sulla giunzione 1 si ottiene:

$$\bar{\Gamma}_1(V, q) = \bar{\Gamma}_1(-V, -q)$$

Per la giunzione 2 avremo dunque:

$$\bar{\Gamma}_2(V) = \frac{1}{e^2 R_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E}{\left[1 - \exp\left(-\frac{E}{K_B T}\right)\right]} P(\kappa_2; E_2(V, -q) - E) dE$$

ove $E_2(V, -q)$ è la diminuzione dell'energia libera prima e dopo l'evento di tunneling: ΔE_2^+ .

$$\bar{\Gamma}_2(V, q) = \bar{\Gamma}_2(-V, -q)$$

Studiamo adesso i casi limite di alta e bassa impedenza.

III.2.1 Ambiente di Bassa Impedenza

Nel caso di bassa impedenza, si ottiene che $P(\kappa_i, E) \approx \delta(E)$, ovvero il tunneling è elastico, e quindi:

$$\bar{\Gamma}_1(V) = \frac{1}{e^2 R_1} \frac{E_1(V, q)}{\left[1 - \exp\left(-\frac{E_1(V, q)}{K_B T}\right)\right]}$$

A $T=0K$ poi:

$$\bar{\Gamma}_1(V) = \frac{1}{e^2 R_1} E_1(V, q) H(E_1(V, q))$$

Da qui si ritrova che il tunneling è bloccato per $E_1(V, q) < 0$.

Prendendo poi in considerazione le alte frequenze di transizione, ed imponendo che anch'esse si azzerino, si ottengono le condizioni su V trovate prima intuitivamente:

$$\bar{\Gamma}_1(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < \frac{-q + \frac{e}{2}}{C_2}$$

$$\bar{\Gamma}_1(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < \frac{-q - \frac{e}{2}}{C_2}$$

$$\bar{\Gamma}_2(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < \frac{q + \frac{e}{2}}{C_1}$$

$$\bar{\Gamma}_2(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < \frac{q - \frac{e}{2}}{C_1}$$

Fig. 1: Diagramma di stabilità nel caso di bassa impedenza.

In figura è presentato il diagramma di stabilità del sistema nello spazio (q, V) . La zona chiara è la regione di stabilità del sistema: tutte le frequenze di tunneling sono infatti nulle in tale dominio. Nella zona ombreggiata, invece, una o più frequenze di tunneling sono diverse da zero. Di conseguenza, a

$0K$ non c'è conduzione se il valore assoluto della tensione è inferiore a $\min\left(\frac{e}{2C_1}; \frac{e}{2C_2}\right)$: si ha quindi un Coulomb gap pur essendo nel caso di bassa impedenza. In presenza della carica di sbilanciamento

Q_0 , finora trascurata, l'intervallo di tensioni per cui lo stato rimane stabile diminuisce: per $Q_0 = \frac{e}{2}$ non esiste nessun intervallo di stabilità, ed il Coulomb gap scompare.

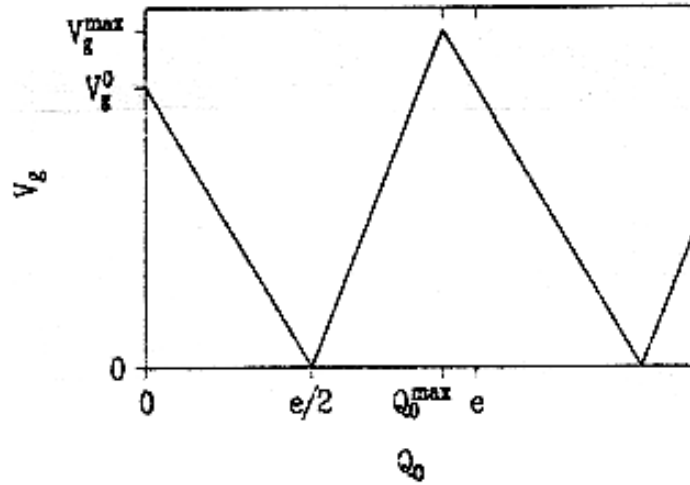


Fig. 2: Coulomb gap in caso di bassa impedenza in funzione della carica di offset.

III.2.2 Ambiente di Alta Impedenza

Nel caso, invece, di alta impedenza, si ottiene, per temperature finite $T > 0$:

$$P(\kappa_i, E) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa_i^2 E_c K_B T}} \exp \left[-\frac{(E - \kappa_i^2 E_c)^2}{4\kappa_i^2 E_c K_B T} \right]$$

A $T = 0K$, si ottiene $P(\kappa_i, E) \approx d(E - \kappa_i^2 E_c)$, ove $E_c = \frac{e^2}{2C_\Sigma}$. Per cui, considerando la frequenza di tunneling attraverso la prima giunzione si ottiene:

$$\bar{\Gamma}_1(V) = \frac{1}{e^2 R_1} [E_1(V, q) - \kappa_1^2 E_c] H[E_1(V, q) - \kappa_1^2 E_c]$$

Osservando che:

$$E_1(V, q) - \kappa_1^2 E_c = \frac{Q_1^2}{2C_1} - \frac{(Q_1 - e)^2}{2C_1}$$

si nota come gli stessi risultati potrebbero esser ottenuti semplicemente trattando il sistema secondo la *visione locale*.

Si consideri che ora il limite di alta impedenza è molto più difficile da raggiungere perchè il peso dell'impedenza esterna nell'espressione di $P(E)$ è diminuito di un fattore $\kappa_i^2 < 1$ (la capacità parallelo C è infatti $< C_1, C_2$).

Le condizioni perchè le quattro frequenze di transizione siano nulle a $T = 0K$ saranno:

$$\bar{\Gamma}_1(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < -\frac{q}{C_2} + \frac{e}{2C}$$

$$\bar{\Gamma}_1(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < -\frac{q}{C_2} + \frac{e}{2C}$$

$$\bar{\Gamma}_2(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < \frac{q}{C_1} + \frac{e}{2C}$$

$$\bar{\Gamma}_2(V, q) = 0 \quad \text{per} \quad V < \frac{q}{C_1} - \frac{e}{2C}$$

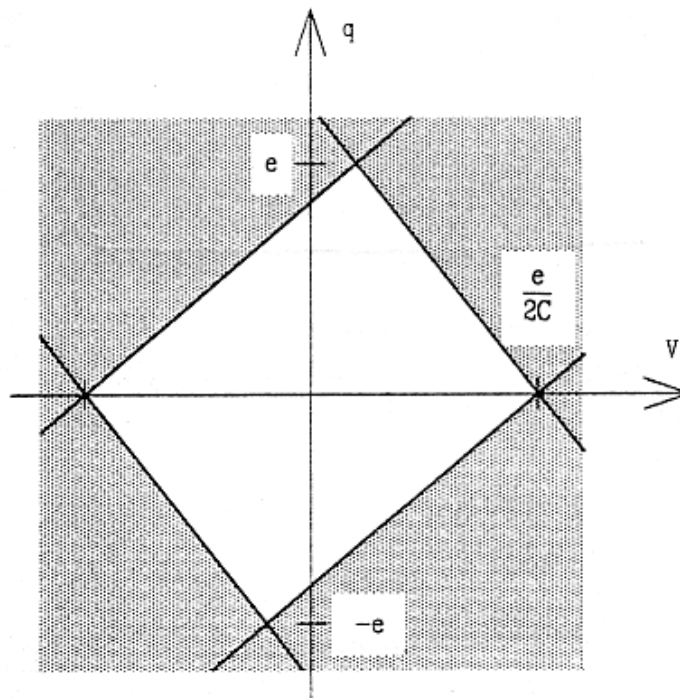


Fig. 1: Diagramma di stabilità nel caso di alta impedenza

Come si vede, la regione di stabilità individuata da queste condizioni è più grande rispetto a quella nel caso di bassa impedenza. In assenza di carica di offset, il Coulomb gap è dato da $\frac{e}{2C}$, che supera il Coulomb gap a bassa impedenza perchè $C < C_1, C_2$. Inoltre, sono osservabili effetti di bloccaggio fino ad un valore e della carica di offset.

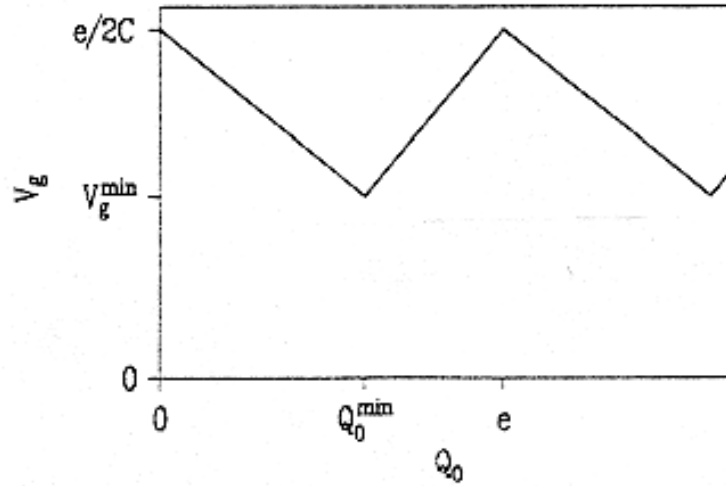


Fig. 2: Coulomb gap nel caso di alta impedenza in funzione della carica di offset.

III.3 Caratteristica Tensione-Corrente

Per il calcolo della corrente che scorre in questo sistema, la situazione è decisamente più complicata che nel caso della singola giunzione: le frequenze di tunneling infatti dipendono dai precedenti eventi di tunneling che conducono ad una certa carica nell'isola.

Si è visto come lo stato del sistema possa essere caratterizzato dalla tensione V e la carica in eccesso nell'isola q . Assumendo che dopo un evento di tunneling si raggiunga di nuovo una condizione di equilibrio con l'ambiente prima che un'altro se ne verifichi, durante una sequenza di eventi di tunneling la tensione V può essere considerata costante, mentre cambia solo la carica nell'isola q : si possono dunque pensare le frequenze di tunneling dipendenti solo da q , e quindi da n , il numero di cariche positive in eccesso nell'isola.

Scriviamo ora un'equazione che ci permetta di mettere in relazione stati con differenti cariche nell'isola: la probabilità p_n di trovare nell'isola n cariche cambia nel tempo se si lascia questo stato o se vi si arriva dagli stati $n-1$ o $n+1$.

$$\frac{\partial p_n}{\partial t} = \Gamma_{n+1,n} p_{n+1} + \Gamma_{n-1,n} p_{n-1} - (\Gamma_{n,n+1} + \Gamma_{n,n-1}) p_n \quad (\text{III.3})$$

Ove $\Gamma_{l,k}$ è la frequenza di transizione dallo stato l allo stato k .

Si può cambiare la carica nell'isola con un evento di tunneling attraverso la prima o la seconda giunzione, per cui si ha (si noti che, come anticipato, è stata eliminata la dipendenza dalla tensione):

$$\Gamma_{n,n+1} = \bar{\Gamma}_1(n) + \bar{\Gamma}_2(n)$$

$$\Gamma_{n,n-1} = \bar{\Gamma}_1(n) + \bar{\Gamma}_2(n)$$

Per risolvere la (III.3) si usano le condizioni:

$$p_n(t=0) = \delta_{0,n}$$

Ove $\delta_{k,j}$ è la delta di Kronecker.

$$p_{n\text{lim}}(t) = 0$$

Ove n_{lim} è tale che:

$$\sum_{n=n_{\text{lim}}}^{+\infty} p_n < 10^{-5}$$

Siamo interessati alle probabilità stazionarie, per cui richiediamo che $\frac{\partial p_n}{\partial t} = 0$. Si trova infine che la (III.3) è soddisfatta dalle probabilità che soddisfano il bilancio dettagliato:

$$\Gamma_{n+1,n} p_{n+1} = \Gamma_{n,n+1} p_n$$

Da cui si ottiene:

$$p_n = p_0 \prod_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma_{m,m+1}}{\Gamma_{m-1,m}}$$

$$p_{-n} = p_0 \prod_{m=-n+1}^0 \frac{\Gamma_{m,m-1}}{\Gamma_{m-1,m}}$$

Ove p_0 , la probabilità di isola scarica, si ottiene dalla condizione di normalizzazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n = 1$$

Siamo adesso in grado di scrivere l'espressione della corrente valida a qualsiasi temperatura e per qualsiasi ambiente:

$$I = e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n [\bar{\Gamma}_1(n) - \bar{\Gamma}_1(n)] = e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n [\bar{\Gamma}_2(n) - \bar{\Gamma}_2(n)]$$

La corrente può esser espressa in funzione della frequenze di tunneling della giunzione 1 e 2 in virtù della conservazione della carica elettrica.

È interessante a questo punto considerare un caso particolare: $T = 0K$, bassa impedenza, $C_1 < C_2$, carica di offset assente.

Per:

$$-\frac{e}{2C_2} < V < \frac{e}{2C_2}$$

si ottiene per le probabilità:

$$p_n = \delta_{0,n}$$

e quindi la corrente è zero.

Per:

$$\frac{e}{2C_2} < V < \frac{e}{2C_1}$$

Partendo da $n=0$, è permesso solo il tunneling di un elettrone attraverso la prima giunzione dentro l'isola. A $n=1$ si possono verificare solo transizioni verso lo stato $n=0$ attraverso la seconda giunzione. Il processo presenta un elevato grado di correlazione mutua tra gli eventi di tunneling: un elettrone che entra nell'isola, la lascia pochissimo tempo dopo.

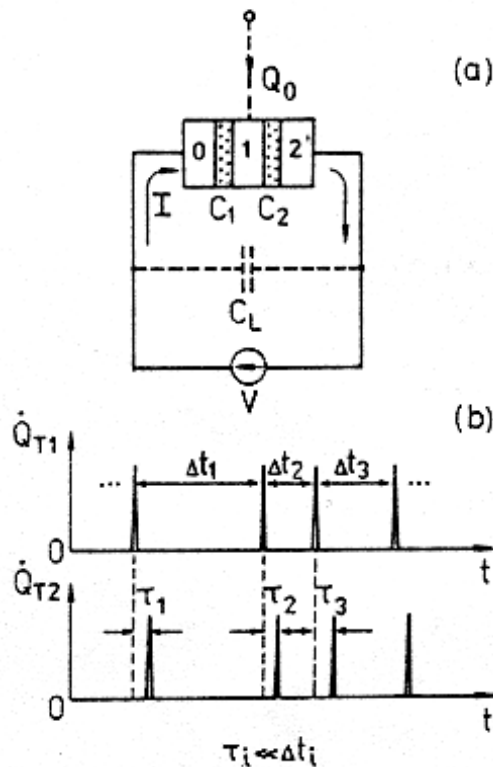


Fig. 1: Correlazione mutua degli eventi di tunneling nel sistema.

Si aumenti ancora la tensione:

$$\frac{e}{2C_1} < V < \frac{3e}{2C_2}$$

Se si assume che $1 < \frac{C_2}{C_1} < 3$ di sicuro l'isola non si caricherà con due elettroni. Ora si hanno due possibilità per lasciare lo stato per $n=0$: un elettrone può lasciare l'isola attraverso la giunzione 2 o può entrarvi attraverso la giunzione 1. A seconda di cosa accade, la carica sull'isola diventa $+e$ o $-e$. Al passo successivo un elettrone farà tunneling ripristinando la neutralità di carica. Si hanno quindi due processi che assicurano la conduzione: $n=0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ e $n=0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$. Aumentando ulteriormente la tensione, la situazione si fa sempre più complicata.

Fig. 2: Caratteristica I-V di una doppia giunzione con $R_{T1} = R_{T2}$ e $C_1 = C_2$, in un ambiente di bassa impedenza, per vari valori di Q_{ex} , la carica di offset nell'isola. Q_{ex} , espressa in unità di e , va da 0 a 0.5 con uno step di 0.1.

BIBLIOGRAFIA

1. "Electrical Conduction Mechanism in Ultrathin, Evaporated Metal Films" C. A. Neugebauer, M. B. Webb, J. Appl. Phys. 33,74 (1962)
2. "Single electron tunneling rates in multijunction circuits" H. Grabert, G. L. Ingold, M. Devoret, D.Estève, H. Pothier, C. Urbina Z. Phys. B-Condensed Matter 84, 143 (1991)
3. "Effect of the Electromagnetic Environment on the Coulomb Blockade in Ultrasmall Tunnel Junctions" M. Devoret, D.Estève, H. Grabert, G. L. Ingold, H. Pothier, C. Urbina Phys. Rev. Lett. 64, 1824 (1990)
4. "Finite-Temperature Current-Voltage Characteristics of Ultrasmall Tunnel Junctions" G. L. Ingold, H. Grabert Europhys. Lett. 14, 371 (1990)
5. "Introduction to single charge tunneling" M. H. Devoret, H. Grabert in "Single charge tunneling", M. H. Devoret, H. Grabert, eds. New York: Plenum (1992)
6. "Charge tunneling rates in ultrasmall junctions", G. L. Ingold, Yu. V. Nazarov in "Single charge tunneling", M. H. Devoret, H. Grabert, eds. New York: Plenum (1992)
7. "Effect of High-Frequency Electrodynamical Environment on the Single-Electron Tunneling in Ultrasmall Junctions" P. Delsing, K. K. Likharev, L.S. Kuzmin, T. Cleason, Phys. Rev. Lett. 63, 1180 (1989)
8. "Coulomb Blockade of Single Electron Tunneling, and Coherent Oscillations in Small Tunnel Junctions", D. V. Averin, K. K. Likharev, J. Low Temp. Phys. 62, 345 (1986)
9. "Single Electronics: a Correlated Transfer of Single Electron and Cooper Pairs in Systems of Small Tunnel Junctions" D. V. Averin, K. K. Likharev in "Mesoscopic Phenomena in Solids", B. L. Altshuler, P. A. Lee, R. A. Webb, eds. Amsterdam: Elsevier (1991)
10. "Correlated Discrete Transfer of Single Electrons in Ultrasmall Tunnel Junctions", K. K. Likharev, IBM J. Res. Dev. 32, 144 (1988)
11. "Quantum Fluctuations and the Single-Junction Coulomb Blockade", S. M. Girvin, L. I. Glazman, M. Jonson, D. R. Penn, M. D. Stiles, Phys. Rev. Lett. 64, 3183 (1990)
12. "Charge Fluctuations in Small-Capacitance Junctions", A. N. Cleland, J. M. Schmidt, J. Clarke, Phys. Rev. Lett. 64, 1565 (1990)